

2^ο Μέρος

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Ασκήσεις για τον επιμελή μαθητή

Μπάμπης Στεργίου Μάρτιος 2015

Λυμένες Ασκήσεις

1.16 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρεθεί το $f(0)$.
- β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.
- γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$.
- δ) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3xf'(x) - 2f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4}[3xf(x) - f^2(x)]$.
- στ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1} .

Λύση

α) Για $x = 0$: $f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0) + 1] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 1} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $f'(0)=1$, οπότε (ε) : $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

γ) Είναι $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0)=0$ θα ισχύει:

- $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.
- $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.



Άρα:

- για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$.
- για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f(x) < 0$.

δ) Είναι $3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με $f(x)$ παίρνουμε:

$$3f^3(x)f'(x) + f'(x)f(x) = f(x)$$

Επειδή $f^3(x) = x - f(x)$, αυτή γίνεται:

$$(3x - 3f(x))f'(x) + f(x)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3xf'(x) - 2f(x)f'(x) \quad (1)$$

ε) Ολοκληρώνουμε την (1):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3tf'(t)dt - 2 \int_0^x f(t)f'(t)dt = \\ &= [3tf(t)]_0^x - \int_0^x 3f(t)dt - 2 \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_0^x = 3xf(x) - 3I - f^2(x) \end{aligned}$$

διότι $f(0)=0$ και μια αρχική της $g(t) = f(t)f'(t)$ είναι η $G(t) = \frac{f^2(t)}{2}$. Άρα:

$$I + 3I = 3xf(x) - f^2(x) \Leftrightarrow I = \frac{1}{4} [3xf(x) - f^2(x)]$$

Σχόλιο

Τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ την πολλαπλασιάζουμε με $f'(x) \neq 0$ και παίρνουμε:

$$f^3(x)f'(x) + f(x)f'(x) = xf'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f^4(x)}{4}\right)' + \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' + f(x) = [xf(x)]'$$

Άρα:

$$\int_0^x \left(\frac{f^4(t)}{4}\right)' dt + \int_0^x \left(\frac{f^2(t)}{2}\right)' dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x [tf(t)]' dt$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= -\left[\frac{f^4(t)}{4}\right]_0^x - \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x + [tf(t)]_0^x = -\frac{f^4(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = \\ &= -\frac{f^3(x)f(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = -\frac{(x-f(x))f(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = \\ &= \frac{4xf(x) - xf(x) + f^2(x) - 2f^2(x)}{4} = \frac{3xf(x) - f^2(x)}{4} \end{aligned}$$

στ) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \beta$.

Θέτουμε $\alpha = \beta^3 + \beta$. Τότε: $f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha$ και $\alpha = \beta^3 + \beta$. Άρα:

$$f^3(\alpha) + f(\alpha) = \beta^3 + \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(\alpha) - \beta][f^2(\alpha) + f(\alpha) \cdot \beta + \beta^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$$

διότι $f^2(\alpha) + f(\alpha) \cdot \beta + \beta^2 + 1 > 0$. Η σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ με x το $f^{-1}(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$ δίνει:

$$[f(f^{-1}(x))]^3 + f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x^3 + x$$

Γενικά σχόλια

i) Από τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$, και χωρίς άλλο δεδομένο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν δεν ήταν γνησίως αύξουσα, θα υπήρχαν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Έτσι $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, οπότε:

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2, \text{ άτοπο.}$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφαιρώντας τις σχέσεις $f^3(x) + f(x) = x$ και $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0$.

ii) Το σύνολο τιμών σε παρόμοιες ασκήσεις βρίσκεται και ως εξής:

- Η πιθανή αντίστροφη της f είναι η $g(x) = x^3 + x$.
- Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.
- Η δοσμένη δίνει $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι $f(x) = g^{-1}(x)$. Αλλά η g^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g , δηλαδή το $\mathbb{R}$. Άρα και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. (Ας τονίσουμε ότι:

$$g(f(x)) = x = g(g^{-1}(x)) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x).$$

1.17 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ με τις ιδιότητες:

$$2 + \int_0^x f(x-t)dt = \frac{2}{g(x)}, \quad 2 + \int_0^x g(x-t)dt = \frac{2}{f(x)}$$

για κάθε $x > -1$.

α) Να αποδειχθεί ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

β) Να αποδειχθεί ότι $f = g$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της f .

δ) Αν $h(x) = \int_1^x f(t^2)dt$, με $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το εμβαδόν που

περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x, y'y$.

Λύση

α) Αν θέσουμε $x - t = u$, τότε $dt = -du$. Έτσι:

- $\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(t)dt$.
- $\int_0^x g(x-t)dt = \int_x^0 g(u)(-du) = \int_0^x g(t)dt$.

t	0	x
u	x	0

Η πρώτη σχέση γίνεται:

$$2 + \int_0^x f(t)dt = \frac{2}{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{2 + \int_0^x f(t)dt}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και έτσι η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι και η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Αφού $2 + \int_0^x f(t)dt = \frac{2}{g(x)}$, παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f(x) = -\frac{2g'(x)}{g^2(x)} \text{ και } \text{όμοια } g(x) = -\frac{2f'(x)}{f^2(x)}$$

Άρα $2f'(x) = -f^2(x)g(x)$, $2g'(x) = -g^2(x)f(x)$. Αυτές δίνουν:

$$\frac{2f'(x)}{f(x)} = -f(x)g(x), \quad \frac{2g'(x)}{g(x)} = -f(x)g(x)$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}, \quad x > -1$$

(1)

Οι δοσμένες για $x = 0$ δίνουν $f(0) = g(0) = 1$, οπότε $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, διότι είναι συνεχείς συναρτήσεις και δεν μηδενίζονται. Η (1) επομένως δίνει:

$$(\ln(f(x)))' = (\ln(g(x)))' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c, \quad x > -1$$

Για $x=0$ παίρνουμε $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα:

$$\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

για κάθε $x > -1$, δηλαδή $f = g$.

δ) Αφού $g = f$ η σχέση $2f'(x) = -f^2(x)g(x)$ δίνει:

$$\frac{2f'(x)}{f^3(x)} = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f^2(x)} \right)' = (-x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x + c$$

Για $x=0$ παίρνουμε $\frac{1}{f^2(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $\frac{1}{f^2(x)} = x + 1$ και επειδή η f είναι θετική, προκύπτει τελικά ότι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει την $2 + \int_0^x f(t)dt = \frac{2}{g(x)}$, που είναι ισοδύναμη με την αρχική. Πραγματικά:

$$\begin{aligned} 2 + \int_0^x f(t)dt &= 2 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = 2 + [2\sqrt{t+1}]_0^x = \\ &= 2 + 2\sqrt{x+1} - 2 = 2\sqrt{x+1} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \frac{2}{g(x)} \end{aligned}$$

δ) Είναι $h'(x) = f(t^2) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$, οπότε $h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	+	+
$h(x)$	-	-	0	+

$$\begin{aligned} E &= -\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 x'h(x)dx = \\ &= -[xh(x)]_0^1 + \int_0^1 xh'(x)dx = 0 + \int_0^1 xf(x^2)dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

1.18 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα

$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) = \beta^3$, όπου $0 < \alpha < \beta < \gamma$ και $\beta^2 = \alpha\gamma$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \gamma]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \beta$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[\alpha, \beta]$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Αν υποθέσουμε ότι $f(x) < 0$, τότε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) < 0$ και $f(\gamma) < 0$, οπότε $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$, άτοπο.

β) Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \gamma]$, ώστε $f(\xi) = \beta$. Τότε $f(x) \neq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \beta$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha, \gamma]$. Ας υποθέσουμε ότι $g(x) > 0$, δηλαδή $f(x) > \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$. Τότε:

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) > \beta \cdot \beta \cdot \beta = \beta^3, \text{ άτοπο}$$

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν θεωρήσουμε ότι $g(x) < 0$, $x \in [\alpha, \gamma]$.

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = x$ είναι αδύνατη. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - x, \quad x \in [\alpha, \gamma].$$

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ ως διαφορά συνεχών.
- $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$.

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $[a, \gamma]$. Αν είναι $h(x) < 0$, δηλαδή $f(x) < x$ για κάθε $x \in [a, \gamma]$, τότε

- $f(a) < a$, $f(\beta) < \beta$, $f(\gamma) < \gamma$.
- $f(a)f(\beta)f(\gamma) < a\beta\gamma = \alpha\gamma\beta = \beta^2\beta = \beta^3$, άτοπο.

Όμοια απορρίπτουμε και την περίπτωση να είναι $h(x) > 0$, $x \in [a, \gamma]$.

1.19 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) = 1$, $f'(x)g(x) = e^{2x}$ και $f(x)g'(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f = g$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $f(3) + f(7) > 2f(5)$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f'(x)g(x) = e^{2x} \text{ και } f(x)g'(x) = e^{2x} \quad (1)$$

Επειδή $e^{2x} \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την (1) παίρνουμε επίσης ότι:

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) &= f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \end{aligned}$$

Για $x = 0$ παίρνουμε $c = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Έτσι:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Επειδή $f = g$, η (1) δίνει:

$$f'(x)g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c$$

Για $x=0$ αυτή δίνει $f^2(0)=1+c$, δηλαδή $c=0$. Έτσι:

$$f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)| = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

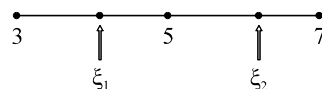
Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (λόγω της (1)). Άρα η f διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)=1$, είναι $f(x) > 0$. Άρα:

$$|f(x)| = e^x \xLeftrightarrow{f(x)>0} f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\frac{3+7}{2}=5$, οπότε η άσκηση μας οδηγεί σε εφαρμογή για την f του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[3,5]$ και $[5,7]$.

Η f είναι λοιπόν συνεχής στα $[3,5]$ και $[5,7]$ ως παραγωγίσιμη και προφανώς παραγωγίσιμη στα $(3,5)$ και $(5,7)$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (3,5)$ και $\xi_2 \in (5,7)$ τέτοιοι, ώστε:

$$\bullet \quad f'(\xi_1) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{f(5)-f(3)}{2}.$$



$$\bullet \quad f'(\xi_2) = \frac{f(7)-f(5)}{7-5} = \frac{f(7)-f(5)}{2}.$$

Είναι δε $f'(x) = e^x$ και επειδή $\xi_1 < \xi_2$ είναι $e^{\xi_1} < e^{\xi_2}$. Έτσι:

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(5)-f(3)}{2} < \frac{f(7)-f(5)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(5)-f(3) < f(7)-f(5) \Leftrightarrow f(3)+f(7) > 2f(5)$$

Άλλος τρόπος

Είναι $f(3)+f(7) \geq 2\sqrt{f(3)f(7)} = 2\sqrt{e^{3+7}} = 2e^5 = 2f(5)$.

1.20 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)} + 1}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

β) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

γ) $1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$.

Επομένως $g(x_1) < g(x_2)$, που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g είναι και 1-1.

Η μονοτονία της g προκύπτει πιο εύκολα από το γεγονός ότι $g'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κάτι όμως που διαπραγματευόμαστε σε άλλη ενότητα.

β) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \frac{x+1}{e^{f(x)} + 1} \Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x) + xf'(x) = x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' + f'(x) = (x + \ln x)' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c \end{aligned}$$

Για $x = 1$ και επειδή $f(1) = 0$, αυτή δίνει:

$$e^{f(1)} + f(1) = 1 + \ln 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Είναι λοιπόν $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, οπότε με βάση το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \Leftrightarrow g(f(x)) = g(\ln x) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{g: 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln x, \quad x > 0$$

γ) Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ η δοσμένη σχέση ισχύει ως ισότητα.

- Έστω $x > 1$. Για την $f(t) = \ln t$ πληρούνται στο $[1, x]$ οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $\xi \in (1, x)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1} \quad (1)$$

Όμως $1 < \xi < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < 1$, οπότε η (1) δίνει:

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x - 1} < 1 \stackrel{x > 1}{\Leftrightarrow} 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

- Όμοια, με $0 < x < 1$, το Θ.Μ.Τ. δίνει ότι υπάρχει $\xi \in (x, 1)$, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{-\ln x}{1 - x}$$

Είναι όμως $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ και $0 < x < \xi < 1$, οπότε:

$$1 < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 < \frac{-\ln x}{1 - x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{x} \stackrel{x < 1}{\Leftrightarrow} x > \ln x > 1 - \frac{1}{x}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση είναι $1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$.

Να σημειώσουμε ότι η ανισότητα μπορεί επίσης να αποδειχθεί με τη μέθοδο της μονοτονίας, που είναι επίσης πολύ βασική.

δ) Έχουμε $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, οπότε:

- Για $x > 1$ παίρνουμε:

$$\frac{x - 1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x - 1} \leq 1$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$.

- Για $0 < x < 1$, όμοια παίρνουμε ότι $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{\ln x}{x-1} \geq 1$, οπότε το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

Σημειώνουμε ότι για την εύρεση της παραγώγου της $f(x) = \ln x$ χρησιμοποιούμε το παραπάνω όριο. Ωστόσο, για την εύρεση του παραπάνω ορίου

χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Υπό αυτή την έννοια έχει γίνει κάποιος

"κύκλος", αυτό όμως δεν μειώνει σε τίποτα το διδακτικό χαρακτήρα της άσκησης.

1.21 Μια συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, υπάρχει αρχική F της f με $F(0) = F(1) = 0$ και ισχύει ότι $xf(x^2) = F(x)f'(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

α) Να αποδειχθεί ότι αν $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 xf(x^2)dx = 0$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Λύση

α) Επειδή $f^2(x) \geq 0$ και η f είναι συνεχής, αν υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε θα ήταν $\int_0^1 f^2(x)dx > 0$, άτοπο. Άρα $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

β) Θέτουμε $x^2 = u$. Τότε $2xdx = du$, οπότε:

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2}(F(1) - F(0)) = 0$$

x	0	1
u	0	1

γ) Στη σχέση $xf(x^2) = F(x)f'(x)$ παίρνουμε ολοκλήρωμα στα δύο μέλη, οπότε:

$$\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 F(x) f'(x) dx \quad (1)$$

Είναι όμως:

- $\int_0^1 F(x) f'(x) dx = [F(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 F'(x)f(x) dx = F(1)f(1) - F(0)f(0) - \int_0^1 f^2(x) dx = -\int_0^1 f^2(x) dx .$
- $\int_0^1 x f^2(x) dx \stackrel{(\beta)}{=} 0 .$

Η σχέση (1) δίνει επομένως:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x) = 0$$

Άρα η f είναι σταθερή και μάλιστα $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

1.22 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$f(x) = \frac{F(x+v) - F(x)}{v}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

α) Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x+1) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $G(x) = F(x+1) - F(x)$ είναι σταθερή.

δ) Αν $f(0) = 2014$, να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{F(x+v) - F(x)}{v} \quad (1)$$

Η σχέση (1), σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$. Επειδή η F είναι αρχική της f , η F παραγωγίζεται. Άρα και η f , λόγω της (1), παραγωγίζεται και μάλιστα είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{F(x+v) - F(x)}{v} \right)' = \frac{f(x+v) - f(x)}{v}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για $v=2$ παίρνουμε:

$$f(x) = \frac{F(x+2) - F(x)}{2} \Leftrightarrow 2f(x) = F(x+2) - F(x) \quad (2)$$

Για $v=1$ παίρνουμε:

$$f(x) = F(x+1) - F(x) \quad (3)$$

Έτσι η (2) γράφεται:

$$\begin{aligned} 2f(x) &= F(x+2) - F(x+1) + F(x+1) - F(x) = \\ &\stackrel{(3)}{=} f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

Αυτή δίνει $2f(x) = f(x+1) + f(x)$, δηλαδή $f(x) = f(x+1)$.

γ) Η G είναι προφανώς παραγωγίσιμη με:

$$G'(x) = (F(x+1) - F(x))' \stackrel{(a)}{=} f(x+1) - f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η G είναι σταθερή

δ) Είναι $G(x) = c$, οπότε:

$$F(x+1) - F(x) \stackrel{(3)}{=} c \Leftrightarrow f(x) = c$$

Αφού $f(0) = 2014$, είναι $f(x) = 2014$, $x \in \mathbb{R}$.

Μέθοδος

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 0$, όπου f συνεχής συνάρτηση. Έστω ότι:

- Για την f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο $[a, b]$.
- Για μια αρχική F της f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, b]$.

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε κατάλληλη αρχική F της f στο $[a, \beta]$ και εξασφαλίζουμε με το θεώρημα Bolzano δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 για την F στο $[a, \beta]$. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια θεώρημα Rolle για την F στο $[\rho_1, \rho_2]$ εξασφαλίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

1.23 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3 - 15x^2 - 18x = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

Η πρώτη μας προσπάθεια είναι να μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α' μέλος:

$$4x^3 - 15x^2 - 18x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 15x^2 - 18x - 1 = 0$$

Η δεύτερη βασική ενέργεια είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x - 1$$

και να εξετάσουμε αν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
- $f(-1) = -4 - 15 + 18 - 1 = -2 < 0$ και $f(1) = 4 - 15 - 18 - 1 = -30 < 0$.

Είναι λοιπόν $f(-1)f(1) > 0$, οπότε το θεώρημα Bolzano δεν προσφέρει αποτελεσματική βοήθεια, τουλάχιστον στο συγκεκριμένο διάστημα. Στην περίπτωση αυτή είμαστε αναγκασμένοι να αναζητήσουμε παράγουσα της f , δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με όσα έχουμε γράψει στο σχετικό σχόλιο, είναι:

$$F(x) = \frac{4x^4}{4} - \frac{15x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} - x = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - x$$

Για την F εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1, 1]$. Είναι όμως:

$$F(-1) = 1 + 5 - 9 + 1 = -2 \text{ και } F(1) = 1 - 5 - 9 - 1 = -14 \neq F(-1)$$

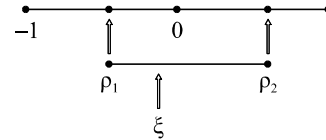
Θα προσπαθήσουμε ωστόσο να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στην F σε άλλο διάστημα.

Θεωρούμε την αρχική $G(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - x + 1$ της f .

Για τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ είναι:

- $G(-1) = 1 + 5 - 9 + 1 + 1 = -1 < 0$.
- $G(0) = 1 > 0$.
- $G(1) = 1 - 5 - 9 - 1 - 1 = -13 < 0$.

Η G λοιπόν είναι συνεχής στα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και επιπλέον $G(-1)G(0) < 0$, $G(0)G(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχουν $\rho_1 \in (-1, 0)$ και $\rho_2 \in (0, 1)$, ώστε:



$$G(\rho_1) = 0 \text{ και } G(\rho_2) = 0$$

Βλέπουμε τώρα ότι:

- Η G είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- Παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) .
- $G(\rho_1) = G(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, ώστε:

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Συνεπώς το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, άρα και της δοσμένης εξίσωσης.

1.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

- β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f .
- γ) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$ είναι συνεχής και $D_\varphi = \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \right)' = \frac{2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Έχουμε ότι $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως

αύξουσα. Είναι επίσης $f(1) = \int_1^1 \frac{2}{1+t^2} dt = 0$,

οπότε το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

- $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Άρα το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		→

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

γ) Αφού $f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt$, είναι:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x' \left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \right) dx = \left[x \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2}{1+x^2} dx = \\
&= (0-0) - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \\
&= - \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2
\end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x' f(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = \\
&= 0 - \int_0^1 x \frac{2}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \text{ κ.λπ.}
\end{aligned}$$

κάτι που καθιστά την όλη διαδικασία πιο εύκολη. Αυτό όμως που πρέπει σε κάθε περίπτωση να επισημάνουμε είναι ότι σε παρόμοια θέματα εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

1.25 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{10} + \frac{3}{2} \int_0^1 f^2(x^3) dx$$

α) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^4 dx$.

β) Αν $g(x) = f(x^3) - x^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 g^2(x) dx = 0$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f(x)$.

Λύση

α) Είναι $\int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$.

β) Όπως διαπιστώνει κανείς με την πρώτη ματιά, ο όρος που παρουσιάζει ιδιαιτερότητα είναι ο $\int_0^1 f^2(x^3) dx$.

x	0	1
t	0	1

Θέτουμε λοιπόν στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ $x = t^3$, οπότε $dx = 3t^2 dt$ και έτσι:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(t^3)3t^2 dt = \\ &= 3\int_0^1 t^2 f(t^3)dt = 3\int_0^1 x^2 f(x^3)dx\end{aligned}$$

Η δοσμένη λοιπόν σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}3\int_0^1 x^2 f(x^3)dx &= \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3)dx &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x^3)dx - 2\int_0^1 x^2 f(x^3)dx + \frac{1}{5} &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Επειδή οι δύο από τους τρεις όρους της (1) είναι σε ολοκληρωτική μορφή, αναγκάζομαστε να γράψουμε $\frac{1}{5} = \int_0^1 x^4 dx$ (αυτός είναι ο λόγος ύπαρξης του α' ερωτήματος). Έτσι η (1) γράφεται:

$$\int_0^1 (f^2(x^3) - 2x^2 f(x^3) + x^4)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x^3) - x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g^2(x)dx = 0 \quad (2)$$

γ) Επειδή $g^2(x) \geq 0$ και η $g^2(x)$ είναι επίσης συνεχής, η (2) δίνει αναγκαστικά $g^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Τονίζουμε ότι αν για κάποιο $x_0 \in [0, 1]$ είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε $\int_0^1 g^2 dx > 0$, άτοπο. Αν θέσουμε όπου x το $\sqrt[3]{x}$ (αυτό μπορεί να γίνει διότι με $x \in [0, 1]$ είναι και $\sqrt[3]{x} \in [0, 1]$), παίρνουμε:

$$f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

Σημείωση

Είναι φανερό ότι αν ζητηθεί απευθείας το ερώτημα (γ) το πρόβλημα γίνεται σαφέστερα πιο δύσκολο.

- 1.26** Έστω F μια αρχική της περιττής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $f(x) = 2xe^{-F(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδειχθεί ότι:
- α) $f(0) = 0$.
 - β) Η f είναι παραγωγίσιμη.
 - γ) $xf'(x) = f(x) - f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - δ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .
 - ε) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ μεταξύ της C_f , του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = \lambda$, με $\lambda > 0$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι περιττή, θα ισχύει $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή για $x = 0$ δίνει:

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

β) Από την υπόθεση έχουμε $f(x) = 2xe^{-F(x)}$ (1) και $F'(x) = f(x)$. Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $f(0) = 0$. Επειδή η $e^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων e^x και $-F(x)$ (ή των e^{-x} και $F(x)$), η συνάρτηση $2xe^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων. Άρα και η f , λόγω της (1), παραγωγίζεται.

γ) Η (1), παραγωγίζοντας, δίνει:

$$f'(x) = 2e^{-F(x)} - 2xe^{-F(x)}f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{f(x)}{x} - f(x)f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = f(x) - f^2(x) \quad (2)$$

Αλλά επειδή $f(0) = 0$, η (2) επαληθεύεται και για $x = 0$ και έτσι η (2) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Εδώ απαιτείται περισσότερη προσπάθεια. Η (2) γράφεται:

$$f(x) - xf'(x) = xf^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'f(x) - xf'(x) = xf^3(x), \quad x \neq 0 \quad (3)$$

Όμως η (1) εξασφαλίζει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$. Έτσι με $x \neq 0$ η (3) γίνεται:

$$\frac{x'f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} = x \Leftrightarrow \left(\frac{x}{f(x)} \right)' = \left(\frac{x^2}{2} \right)', \quad x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1, & x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Για $x = 1$ παίρνουμε $\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$, οπότε:

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x^2 + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

Για $x = -1$ παίρνουμε $\frac{-1}{f(-1)} = \frac{1}{2} + c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2}$, διότι $f(-1) = -f(1) = -1$. Άρα:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x < 0$$

Επειδή $f(0) = 0$, τελικά είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Για $x > 0$ είναι $f(x) > 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^\lambda = \ln(\lambda^2 + 1)$$

στ) Είναι:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda} E(\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\lambda^2 + 1)}{e^\lambda} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \quad$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{\frac{\lambda^2+1}{e^\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1} \right) \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0 \cdot 0 = 0$$

διότι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda} = 0.$

1.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - x - 2 = \ln \frac{e^{x+2} + 1}{e^{x^2} + 1}.$

Λύση

α) Επειδή $e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Είναι τότε:

- $e^{x_1} < e^{x_2}$, $e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$, $\ln(e^{x_1} + 1) < \ln(e^{x_2} + 1)$.
- $x_1 + \ln(e^{x_1} + 1) < x_2 + \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η f είναι και 1-1.

γ) Η εξίσωση έχει σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$, διότι $\frac{e^{x+2} + 1}{e^{x^2} + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα γράψουμε την εξίσωση σε πιο απλή μορφή. Είναι:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= \ln \frac{e^{x+2} + 1}{e^{x^2} + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = \ln(e^{x+2} + 1) - \ln(e^{x^2} + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{x^2} + 1) + x^2 = \ln(e^{x+2} + 1) + (x + 2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) = f(x+2) \stackrel{f: 1-1}{\Leftrightarrow} x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 2)$$

Προφανώς, οι τιμές αυτές είναι δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού της εξίσωσης.

1.28 Αν η συνάρτηση f έχει θετική παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$, να αποδειχθεί ότι $\int_a^{\frac{a+\beta}{2}} f(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_a^\beta f(x)dx$.

Λύση

Πρόκειται για άσκηση με ιδιαίτερο διδακτικό χαρακτήρα. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, \beta]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με:

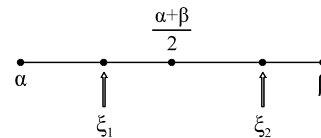
- $g'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$, $x \in [a, \beta]$.
- $g''(x) = f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Η g' είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα.

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[a, \frac{a+\beta}{2} \right]$, $\left[\frac{a+\beta}{2}, \beta \right]$ ως παραγωγίσιμη σ' αυτά.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(a, \frac{a+\beta}{2} \right)$, $\left(\frac{a+\beta}{2}, \beta \right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+\beta}{2} \right)$

και $\xi_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2}, \beta \right)$ τέτοια, ώστε:



- $g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - g(a)}{\frac{a+\beta}{2} - a} = \frac{2\left(g\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - g(a)\right)}{\beta - a}$

$$\bullet \quad g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\left(g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta - \alpha}$$

Επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g'(\xi_1) < g'(\xi_2) &\Leftrightarrow \frac{2\left(g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)\right)}{\beta - \alpha} < \frac{2\left(g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha) < g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{1}{2}(g(\alpha) + g(\beta)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt < \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \end{aligned}$$

αφού $g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$.

1.29 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ έχει συνεχή παράγωγο και

$$f(1) - f(0) = 1 - e, \text{ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα } I = \int_0^1 \frac{f(x) - f'(x)}{f(x) + e^x} dx.$$

Λύση

Προσπαθούμε στον αριθμητή να εμφανίσουμε τον παρονομαστή. Γράφουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{f(x) - f'(x)}{f(x) + e^x} &= \frac{f(x) + e^x - e^x - f'(x)}{f(x) + e^x} = 1 - \frac{e^x + f'(x)}{f(x) + e^x} = 1 - \frac{(e^x + f(x))'}{e^x + f(x)}. \\ \bullet \quad I &= \int_0^1 \frac{f(x) - f'(x)}{f(x) + e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{(e^x + f(x))'}{e^x + f(x)} \right) dx = \left[x - \ln(e^x + f(x)) \right]_0^1 = \\ &= 1 - \ln(e + f(1)) - (0 - \ln(1 + f(0))) = 1 - \ln(e + f(1)) + \ln(1 + f(0)) = 1 + \ln \frac{1 + f(0)}{e + f(1)}. \end{aligned}$$

Είναι όμως $f(1) - f(0) = 1 - e$, οπότε $1 + f(0) = e + f(1)$. Άρα $I = 1 + \ln 1 = 1$.