

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: ΤΡΕΙΣ (3) ΩΡΕΣ
ΣΕΛΙΔΕΣ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 8

A.2 Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Μονάδες 4

A.3 Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = (z\bar{z})^2$

Μονάδες 1,5

β. Αν f, g δύο συναρτήσεις που ορίζουν τις $(g \circ f), (f \circ g)$, τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 1,5

γ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 1,5

δ. Αν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα όρια των συναρτήσεων f, g τότε υπάρχει το όριο του αθροίσματος των δύο συναρτήσεων σε θέση x_0 .

Μονάδες 1,5

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$. Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα των τετμημένων, μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα των τετμημένων.

Μονάδες 1,5

στ. Αν το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το διάστημα $[m, M]$, m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της, τότε κατ'ανάγκη η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w με τις αντίστοιχες εικόνες τους A, B στο μιγαδικό επίπεδο.

B.1 Να δείξετε ότι η αρχή των αξόνων και τα σημεία A, B είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, ο αριθμός $u = z\bar{w}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 7

B.2 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών $z - i, \frac{1}{\bar{z}-2}$ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

Μονάδες 7

B.3 Αν z_0 ο μοναδικός φανταστικός αριθμός από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος (β), να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $z_0^n = 5n - 31$.

Μονάδες 5

B.4 Αν $u \in \mathbb{C}$, και ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού αριθμού u στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο μοναδιαίος κύκλος, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|u - 2z|$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \int_{|w-i|}^{x+1} 2\operatorname{Re}(z)f(t)dt + \int_{2x+1}^{\frac{|w-i|}{|w-i|}} \operatorname{Im}(z)f(t)dt, z, w \in \mathbb{C}.$$

Επιπλέον, δίνεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 0$ και ισχύει ότι $f(1) \neq 0$.

Γ.1 Να δείξετε ότι ο z^2 είναι φανταστικός αριθμός.

Μονάδες 8

Γ.2 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x\operatorname{Re}(z)} + e^{x\operatorname{Im}(z)} = 2$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ.3 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w στο μιγαδικό επίπεδο, αν το σημείο A με τετμημένη $x_0 = 0$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και στη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 4

Γ.4 Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)\eta\mu f(x)} + x - 1}{f(x)\eta\mu f(x)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x) = e - \int_1^x \left(e + \int_1^u \frac{tf'(t) - 2f(t)}{t^3} dt \right) du, x > 0$$

Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x (1 - 2t)e^{\frac{1}{t}} dt, x \geq 1$.

Δ.1 Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 9

Δ.2 Να βρείτε τη συνάρτηση F .

Μονάδες 4

Δ.3 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης F και στη συνέχεια, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_1^x f(t)dt + 2 \int_x^1 tf(t)dt < 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Μονάδες 7

Δ.4 Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$2 + \int_1^\alpha f(x)dx = \alpha + 2 \int_1^\alpha xf(x)dx$$

.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία