Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις για τον επιμελή μαθητή – 2ο

Μπάμπης Στεργίου Μάρτιος 2015

Λυμένες Ασκήσεις

1.15 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x)=e^{-\int_1^x f(t)dt},\ x>0$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) η f είναι παραγωγίσιμη.

β) $f'(x)=-f^2(x)$, για κάθε $x>0$.

γ) $f(x)=\frac{1}{x}$, για κάθε $x>0$.

Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f στο μεταβλητό της σημείο Μ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β. Να αποδειχθεί ότι:

δ) ΜΑ = ΜΒ.

ε) Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδόν, ανεξάρτητο δηλαδή από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

α) Η συνάρτηση του δευτέρου μέλους είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών, αφού η f(t) μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής, οπότε η f(x) είναι παραγωγίσιμη.

β) Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x)=-e^{-\int_1^x f(t)dt}f(x)\Leftrightarrow f'(x)=-f^2(x)\quad(1)$$

αφού $e^{-\int_1^x f(t)dt} = f(x)$.

γ) Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$, $x > 0$ και από την (1) έχουμε:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = x' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x + c \qquad (2)$$

Από την αρχική παίρνουμε $f(1) = 1$. Με $x = 1$ η (2) δίνει $c = 0$, οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

δ) Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ με $x_0 > 0$ έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}$$

Με $y = 0$ είναι $x = 2x_0$. Έτσι $A(2x_0, 0)$. Με $x = 0$ είναι $y = \frac{2}{x_0}$, έτσι $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$. Είναι $(MA) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$ και $(MB) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}$, οπότε $MA = MB$.

(Καλύτερα είναι όμως να διαπιστώσουμε ότι το μέσο του ΑΒ είναι το Μ, αφού $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = x_0$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{x_0}$.)

ε) $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$ τ.μ. σταθερό $(x_0 > 0)$.

1.16 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x)+f(x)=x\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρεθεί το f(0).

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f(x).

δ) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{4}\left[3xf(x)-f^2(x)\right]$.

στ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση

α) Για $x=0$: $f^3(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

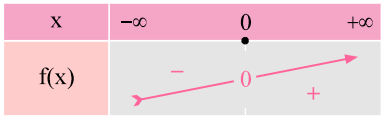
β) Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.
Είναι $f'(0)=1$, οπότε (ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

γ) Είναι $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0)=0$ θα ισχύει:

- $x<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$.
- $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.



Άρα:

- για $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)>0$.
- για $x\in(-\infty,0)$ είναι $f(x)<0$.

δ) Είναι $3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με f(x) παίρνουμε:

$$3f^3(x)f'(x)+f'(x)f(x)=f(x)$$

Επειδή $f^3(x)=x-f(x)$, αυτή γίνεται:

$$\big(3x-3f(x)\big)f'(x)+f(x)f'(x)=f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x) \qquad (1)$$

ε) Ολοκληρώνουμε την (1):

$$I=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 3tf'(t)dt-2\int_0^x f(t)f'(t)dt=$$

$$=\big[3tf(t)\big]_0^x-\int_0^x 3f(t)dt-2\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x=3xf(x)-3I-f^2(x)$$

διότι $f(0)=0$ και μια αρχική της $g(t)=f(t)f'(t)$ είναι η $G(t)=\dfrac{f^2(t)}{2}$. Άρα:

$$I+3I=3xf(x)-f^2(x)\Leftrightarrow I=\frac{1}{4}\big[3xf(x)-f^2(x)\big]$$

Σχόλιο

Τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ την πολλαπλασιάζουμε με $f'(x)\neq 0$ και παίρνουμε:

$$f^3(x)f'(x)+f(x)f'(x)=xf'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f^4(x)}{4}\right)'+\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'+f(x)=\big[xf(x)\big]'$$

Άρα:

$$\int_0^x\left(\frac{f^4(t)}{4}\right)'dt+\int_0^x\left(\frac{f^2(t)}{2}\right)'dt+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\big[tf(t)\big]'dt$$

Επομένως:

$$\int_0^x f(t)dt=-\left[\frac{f^4(t)}{4}\right]_0^x-\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x+\big[tf(t)\big]_0^x=-\frac{f^4(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$=-\frac{f^3(x)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=-\frac{\big(x-f(x)\big)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$= \frac{4xf(x) - xf(x) + f^2(x) - 2f^2(x)}{4} = \frac{3xf(x) - f^2(x)}{4}$$

στ) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \beta$.
Θέτουμε $\alpha = \beta^3 + \beta$. Τότε: $f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha$ και $\alpha = \beta^3 + \beta$. Άρα:

$$f^3(\alpha) + f(\alpha) = \beta^3 + \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(\alpha) - \beta]\left[f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$$

διότι $f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1 > 0$. Η σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ με x το $f^{-1}(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$ δίνει:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3 + f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x^3 + x$$

Γενικά σχόλια

i) Από τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$, και χωρίς άλλο δεδομένο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν δεν ήταν γνησίως αύξουσα, θα υπήρχαν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Έτσι $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, οπότε:

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2, \text{ άτοπο.}$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφαιρώντας τις σχέσεις $f^3(x) + f(x) = x$ και $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0$.

ii) Το σύνολο τιμών σε παρόμοιες ασκήσεις βρίσκεται και ως εξής:

- *Η πιθανή αντίστροφη της f είναι η $g(x) = x^3 + x$.*
- *Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.*
- *Η δοσμένη δίνει $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι $f(x) = g^{-1}(x)$. Αλλά η g^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το $\mathbb{R}$. Άρα και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. (Ας τονίσουμε ότι:*
  $g(f(x)) = x = g(g^{-1}(x)) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x)$.)

1.17 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με τις ιδιότητες:

$$2+\int_0^x f(x-t)dt=\frac{2}{g(x)},\quad 2+\int_0^x g(x-t)dt=\frac{2}{f(x)}$$

για κάθε $x>-1$.
α) Να αποδειχθεί ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
β) Να αποδειχθεί ότι $f=g$.
γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.
δ) Αν $h(x)=\int_1^x f(t^2)dt$, με $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_h και τους άξονες x′x, y′y.

Λύση

α) Αν θέσουμε $x-t=u$, τότε $dt=-du$. Έτσι:

t	0	x
u	x	0

- $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(t)dt$.
- $\int_0^x g(x-t)dt=\int_x^0 g(u)(-du)=\int_0^x g(t)dt$.

Η πρώτη σχέση γίνεται:

$$2+\int_0^x f(t)dt=\frac{2}{g(x)}\Leftrightarrow g(x)=\frac{2}{2+\int_0^x f(t)dt}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και έτσι η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι και η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Αφού $2+\int_0^x f(t)dt=\frac{2}{g(x)}$, παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f(x)=-\frac{2g'(x)}{g^2(x)}\ \text{και όμοια}\ g(x)=-\frac{2f'(x)}{f^2(x)}$$

Άρα $2f'(x)=-f^2(x)g(x)$, $2g'(x)=-g^2(x)f(x)$. Αυτές δίνουν:

$$\frac{2f'(x)}{f(x)} = -f(x)g(x)\,,\quad \frac{2g'(x)}{g(x)} = -f(x)g(x)$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)},\quad x > -1 \qquad (1)$$

Οι δοσμένες για $x = 0$ δίνουν $f(0) = g(0) = 1$, οπότε $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, διότι είναι συνεχείς συναρτήσεις και δεν μηδενίζονται. Η (1) επομένως δίνει:

$$\big(\ln(f(x))\big)' = \big(\ln(g(x))\big)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c\,,\ x > -1$$

Για $x = 0$ παίρνουμε $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα:

$$\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

για κάθε $x > -1$, δηλαδή $f = g$.

δ) Αφού $g = f$ η σχέση $2f'(x) = -f^2(x)g(x)$ δίνει:

$$\frac{2f'(x)}{f^3(x)} = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f^2(x)}\right)' = (-x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x + c$$

Για $x = 0$ παίρνουμε $\frac{1}{f^2(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $\frac{1}{f^2(x)} = x + 1$ και επειδή η f είναι θετική, προκύπτει ότι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}},\quad x > -1$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή διότι επαληθεύει την $2 + \int_0^x f(t)dt = \frac{2}{g(x)}$, που είναι ισοδύναμη με την αρχική. Πραγματικά:

$$2 + \int_0^x f(t)dt = 2 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = 2 + \Big[2\sqrt{t+1}\Big]_0^x =$$

$$= 2 + 2\sqrt{t+1} - 2 = 2\sqrt{t+1} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{t+1}}} = \frac{2}{g(x)}$$

δ) Είναι $h'(x) = f(t^2) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.
Για $x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$, οπότε $h(x) \le 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
h´(x)	+	+	+	
h(x)	−	−	0	+

$$E = -\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 x'h(x)dx =$$

$$= -\left[xh(x)\right]_0^1 + \int_0^1 xh'(x)dx = 0 + \int_0^1 xf(x^2)dx =$$

$$= \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

1.18 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) = \beta^3$, όπου $0 < \alpha < \beta < \gamma$ και $\beta^2 = \alpha\gamma$. Να αποδειχθεί ότι:
α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) Υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \gamma]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \beta$.
γ) Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[\alpha,\beta]$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Αν υποθέσουμε ότι $f(x) < 0$, τότε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) < 0$ και $f(\gamma) < 0$, οπότε $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$, άτοπο.

β) Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \gamma]$, ώστε $f(\xi) = \beta$. Τότε $f(x) \neq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \beta$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο [α,γ]. Ας υποθέσουμε ότι $g(x)>0$, δηλαδή $f(x)>\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$. Τότε:

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)>\beta\cdot\beta\cdot\beta=\beta^3\text{, άτοπο}$$

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν θεωρήσουμε ότι $g(x)<0$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=x$ είναι αδύνατη. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

- Η h είναι συνεχής στο [α,γ] ως διαφορά συνεχών.
- $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$.

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο [α,γ]. Αν είναι $h(x)<0$, δηλαδή $f(x)<x$ για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$, τότε

- $f(\alpha)<\alpha$, $f(\beta)<\beta$, $f(\gamma)<\gamma$.
- $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma\beta=\beta^2\beta=\beta^3$, άτοπο.

Όμοια απορρίπτουμε και την περίπτωση να είναι $h(x)>0$, $x\in[\alpha,\gamma]$.

1.19 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(0)=1$ και $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f=g$.
β) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).
γ) Να αποδειχθεί ότι $f(3)+f(7)>2f(5)$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f'(x)g(x)=e^{2x}\quad\text{και}\quad f(x)g'(x)=e^{2x}\qquad(1)$$

Επειδή $e^{2x}\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από την (1) παίρνουμε επίσης ότι:

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c$$

Για $x=0$ παίρνουμε $c=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{1}{1}=1$. Έτσι:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Επειδή $f=g$, η (1) δίνει:

$$f'(x)g(x)=e^{2x}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c$$

Για $x=0$ αυτή δίνει $f^2(0)=1+c$, δηλαδή $c=0$. Έτσι:

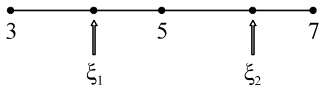
$$f^2(x)=e^{2x}\Leftrightarrow |f(x)|=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (λόγω της (1)). Άρα η f διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)=1$, είναι $f(x)>0$. Άρα:

$$|f(x)|=e^x \overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow} f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\frac{3+7}{2}=5$, οπότε η άσκηση μας οδηγεί σε εφαρμογή για την f του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [3,5] και [5,7].
Η f είναι λοιπόν συνεχής στα [3,5] και [5,7] ως παραγωγίσιμη και προφανώς παραγωγίσιμη στα (3,5) και (5,7). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(3,5)$ και $\xi_2\in(5,7)$ τέτοιοι, ώστε:

- $f'(\xi_1)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{f(5)-f(3)}{2}$.



- $f'(\xi_2)=\dfrac{f(7)-f(5)}{7-5}=\dfrac{f(7)-f(5)}{2}$.

Είναι δε $f'(x)=e^x$ και επειδή $\xi_1<\xi_2$ είναι $e^{\xi_1}<e^{\xi_2}$. Έτσι:

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(5)-f(3)}{2}<\frac{f(7)-f(5)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(5)-f(3)<f(7)-f(5)\Leftrightarrow f(3)+f(7)>2f(5)$$

Άλλος τρόπος

Είναι $f(3)+f(7)\geq 2\sqrt{f(3)f(7)}=2\sqrt{e^{3+7}}=2e^5=2f(5)$.

1.20 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και:

$$\mathbf{xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1},\ x\in(0,+\infty)}$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι 1-1.

β) $f(x)=\ln x$, $x>0$.

γ) $1-\dfrac{1}{x}\leq f(x)\leq x-1$, για κάθε $x>0$.

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

Λύση

α) Έστω $x_1,\ x_2\in D_g=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2$.

Επομένως $g(x_1)<g(x_2)$, που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g είναι και 1-1.

Η μονοτονία της g προκύπτει πιο εύκολα από το γεγονός ότι $g'(x)=e^x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ κάτι όμως που διαπραγματευόμαστε σε άλλη ενότητα.

β) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x)+xf'(x)=x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'+f'(x)=(x+\ln x)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c$$

Για $x=1$ και επειδή $f(1)=0$, αυτή δίνει:

$$e^{f(1)}+f(1)=1+\ln 1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Είναι λοιπόν $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$, οπότε με βάση το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x\Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(\ln x)\Leftrightarrow$$

$$\overset{g:\,1-1}{\Longleftrightarrow} f(x)=\ln x,\ x>0$$

γ) Παρατηρούμε ότι για $x=1$ η δοσμένη σχέση ισχύει ως ισότητα.

- Έστω $x>1$. Για την $f(t)=\ln t$ πληρούνται στο [1,x] οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln x}{x-1} \qquad (1)$$

Όμως $1<\xi<x\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\frac{1}{\xi}<1$, οπότε η (1) δίνει:

$$\frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x-1}<1\overset{x>1}{\Leftrightarrow}1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

- Όμοια, με $0<x<1$, το Θ.Μ.Τ. δίνει ότι υπάρχει $\xi\in(x,1)$, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{-\ln x}{1-x}$$

Είναι όμως $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ και $0<x<\xi<1$, οπότε:

$$1<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow 1<\frac{-\ln x}{1-x}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{x}\overset{x<1}{\Leftrightarrow}x>\ln x>1-\frac{1}{x}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση είναι $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le x-1$.

Επίσης , το σκέλος $\ln x\le x-1$ αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου. Από αυτή , θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε και το άλλο σκέλος της ζητούμενης ανισότητας.

δ) Αποφεύγουμε σκόπιμα τον κανόνα de L'Hospital .Έχουμε $1-\frac{1}{x}\le \ln x\le x-1$, οπότε:

- Για $x>1$ παίρνουμε:
  $\frac{x-1}{x}\le \ln x\le x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\le \frac{\ln x}{x-1}\le 1$
  Από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1$.
- Για $0<x<1$, όμοια παίρνουμε ότι $\frac{x-1}{x}\le \ln x\le x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ge \frac{\ln x}{x-1}\ge 1$, οπότε το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$.

Σημειώνουμε ότι για την εύρεση της παραγώγου της $f(x)=\ln x$ χρησιμοποιούμε το παραπάνω όριο. Ωστόσο, για την εύρεση του παραπάνω ορίου χρησιμοποιήσαμε στο ερώτημα γ) τον τύπο $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Υπό αυτή την έννοια έχει γίνει κάποιος " φαύλος κύκλος", αυτό όμως δεν μειώνει σε τίποτα το διδακτικό χαρακτήρα της άσκησης.

1.21 Μια συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, υπάρχει αρχική F της f με $F(0)=F(1)=0$ και ισχύει ότι $xf(x^2)=F(x)f'(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

α) Να αποδειχθεί ότι αν $\int_0^1 f^2(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$, $x\in[0,1]$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 xf(x^2)dx = 0$ **.**

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση

α) Επειδή $f^2(x) \geq 0$ και η f είναι συνεχής, αν υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε θα ήταν $\int_0^1 f^2(x)dx > 0$, άτοπο. Άρα $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

β) Θέτουμε $x^2 = u$. Τότε $2xdx = du$, οπότε:

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2}\big(F(1) - F(0)\big) = 0$$

x	0	1
u	0	1

γ) Στη σχέση $xf(x^2) = F(x)f'(x)$ παίρνουμε ολοκλήρωμα στα δύο μέλη, οπότε:

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \int_0^1 F(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

Είναι όμως:

- $$\int_0^1 F(x)f'(x)dx = \big[F(x)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 F'(x)f(x)dx =$$
  $$F(1)f(1) - F(0)f(0) - -\int_0^1 f^2(x)dx = -\int_0^1 f^2(x)dx$$

- $\int_0^1 xf^2(x)dx \overset{(\beta)}{=} 0$.

Η σχέση (1) δίνει επομένως:

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x) = 0$$

Άρα η f είναι σταθερή και μάλιστα $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

1.22 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$\mathbf{f(x)=\frac{F(x+\nu)-F(x)}{\nu}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x+1)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $G(x)=F(x+1)-F(x)$ είναι σταθερή.

δ) Αν $f(0)=2014$, να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$f(x)=\frac{F(x+\nu)-F(x)}{\nu} \quad (1)$$

Η σχέση (1), σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Επειδή η F είναι αρχική της f, η F παραγωγίζεται. Άρα και η f, λόγω της (1), παραγωγίζεται και μάλιστα είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{F(x+\nu)-F(x)}{\nu}\right)'=\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu},\ x\in\mathbb{R}$$

β) Για $\nu=2$ παίρνουμε:

$$f(x)=\frac{F(x+2)-F(x)}{2}\Leftrightarrow 2f(x)=F(x+2)-F(x) \qquad (2)$$

Για $\nu=1$ παίρνουμε:

$$f(x)=F(x+1)-F(x) \qquad (3)$$

Έτσι η (2) γράφεται:

$$2f(x)=F(x+2)-F(x+1)+F(x+1)-F(x)=$$

$$\overset{(3)}{=}f(x+1)-f(x)$$

Αυτή δίνει $2f(x)=f(x+1)+f(x)$, δηλαδή $f(x)=f(x+1)$.

γ) Η G είναι προφανώς παραγωγίσιμη με:

$$G'(x) = \big(F(x+1) - F(x)\big)' = f(x+1) - f(x) \overset{(\alpha)}{=} 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Άρα η G είναι σταθερή

δ) Είναι $G(x) = c$, οπότε:

$$F(x+1) - F(x) = c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x) = c$$

Αφού $f(0) = 2014$, είναι $f(x) = 2014$, $x \in \mathbb{R}$.

Μέθοδος

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 0$, όπου f συνεχής συνάρτηση. Έστω ότι:

- Για την f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο [α,β].
- Για μια αρχική F της f δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α,β].

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε κατάλληλη αρχική F της f στο [α,β] και εξασφαλίζουμε με το θεώρημα Bolzano δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 για την F στο [α,β]. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια θεώρημα Rolle για την F στο $[\rho_1, \rho_2]$ εξασφαλίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

1.23 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3 - 15x^2 - 18x = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

Η πρώτη μας προσπάθεια είναι να μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α′ μέλος:

$$4x^3 - 15x^2 - 18x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 15x^2 - 18x - 1 = 0$$

Η δεύτερη βασική ενέργεια είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x - 1$$

και να εξετάσουμε αν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
- $f(-1) = -4 - 15 + 18 - 1 = -2 < 0$ και $f(1) = 4 - 15 - 18 - 1 = -30 < 0$.

Είναι λοιπόν $f(-1)f(1) > 0$, οπότε το θεώρημα Bolzano δεν προσφέρει αποτελεσματική βοήθεια. Στην περίπτωση αυτή είμαστε αναγκασμένοι να αναζητήσουμε παράγουσα της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με όσα έχουμε γράψει στο σχετικό σχόλιο, είναι:

$$F(x) = \frac{4x^4}{4} - \frac{15x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} - x = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - x$$

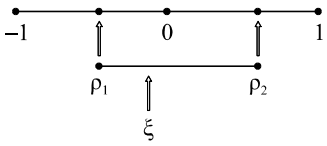
Για την F εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1, 1]$. Είναι όμως:

$$F(-1) = 1 + 5 - 9 + 1 = -2 \text{ και } F(1) = 1 - 5 - 9 - 1 = -14 \neq F(-1)$$

Θα προσπαθήσουμε ωστόσο να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στην F σε άλλο διάστημα.
Θεωρούμε την αρχική $G(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - x + 1$ της f.
Για τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ είναι:

- $G(-1) = 1 + 5 - 9 + 1 + 1 = -1 < 0$.
- $G(0) = 1 > 0$.
- $G(1) = 1 - 5 - 9 - 1 - 1 = -13 < 0$.

Η G λοιπόν είναι συνεχής στα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και επιπλέον $G(-1)G(0) < 0$, $G(0)G(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχουν $\rho_1 \in (-1, 0)$ και $\rho_2 \in (0, 1)$, ώστε:



$$G(\rho_1) = 0 \quad \text{και} \quad G(\rho_2) = 0$$

Βλέπουμε τώρα ότι:

- Η G είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- Παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2).
- $G(\rho_1) = G(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, ώστε:

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Συνεπώς το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, άρα και της δοσμένης εξίσωσης.

1.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f.
γ) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$ είναι συνεχής και $D_\varphi = \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt \right)' = \frac{2}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$$

β) Έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επίσης $f(1)=\int_1^1 \dfrac{2}{1+t^2}dt=0$, οπότε το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

x	$-\infty$		$+\infty$
f΄(x)		+	
f(x)		↗	

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

- $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$.
- $x<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$.

Άρα το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	−	0	+

γ) Αφού $f(x)=\int_1^x \dfrac{2}{1+t^2}dt$, είναι:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x'\left(\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right)dx=\left[x\int_1^x \frac{2}{1+t^2}dt\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{2}{1+x^2}dx=$$

$$=(0-0)-\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx=-\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=$$

$$=-\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=-\ln 2+\ln 1=-\ln 2$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να γράψουμε:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=$$

$$=0-\int_0^1 x\frac{2}{1+x^2}dx=-\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx \text{ κ.λπ.}$$

κάτι που καθιστά την όλη διαδικασία πιο εύκολη. Αυτό όμως που πρέπει σε κάθε περίπτωση να επισημάνουμε είναι ότι σε παρόμοια θέματα εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

1.25 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx$$

α) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^4dx$.

β) Αν $g(x)=f(x^3)-x^2$, $x\in[0,1]$, να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 g^2(x)dx=0$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f(x).

Λύση

α) Είναι $\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$.

β) Όπως διαπιστώνει κανείς με την πρώτη ματιά, ο όρος που παρουσιάζει ιδιαιτερότητα είναι ο $\int_0^1 f^2(x^3)dx$.

x	0	1
t	0	1

Θέτουμε λοιπόν στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ $x=t^3$,

οπότε $dx=3t^2dt$ και έτσι:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t^3)3t^2dt=$$

$$=3\int_0^1 t^2f(t^3)dt=3\int_0^1 x^2f(x^3)dt$$

Η δοσμένη λοιπόν σχέση γίνεται:

$$3\int_0^1 x^2f(x^3)dx=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3)dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x^3)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x^3)dx - 2\int_0^1 x^2 f(x^3)dx + \frac{1}{5} = 0 \qquad (1)$$

Επειδή οι δύο από τους τρεις όρους της (1) είναι σε ολοκληρωτική μορφή, αναγκαζόμαστε να γράψουμε $\frac{1}{5} = \int_0^1 x^4 dx$ (αυτός είναι ο λόγος ύπαρξης του α′ ερωτήματος). Έτσι η (1) γράφεται:

$$\int_0^1 \left(f^2(x^3) - 2x^2 f(x^3) + x^4\right)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x^3) - x^2\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g^2(x)dx = 0 \qquad (2)$$

γ) Επειδή $g^2(x) \geq 0$ και η $g^2(x)$ είναι επίσης συνεχής, η (2) δίνει αναγκαστικά $g^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3) = x^2,\ x \in [0,1]$. Τονίζουμε ότι αν για κάποιο $x_0 \in [0,1]$ είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε $\int_0^1 g^2 dx > 0$, άτοπο. Αν θέσουμε όπου x το $\sqrt[3]{x}$ (αυτό μπορεί να γίνει διότι με $x \in [0,1]$ είναι και $\sqrt[3]{x} \in [0,1]$), παίρνουμε:

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ x \in [0,1]$$

Σημείωση
Είναι φανερό ότι αν ζητηθεί απευθείας το ερώτημα (γ) το πρόβλημα γίνεται σαφέστατα πιο δύσκολο.

1.26 Έστω F μια αρχική της περιττής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $f(x) = 2xe^{-F(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(0) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) $xf'(x) = f(x) - xf^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) μεταξύ της C_f, του άξονα x′x και της ευθείας $x = \lambda$, με $\lambda > 0$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $e^{-\lambda}E(\lambda)$, καθώς $\lambda \to +\infty$

Λύση

α) Επειδή η f είναι περιττή, θα ισχύει $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή για $x = 0$ δίνει:

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

β) Από την υπόθεση έχουμε $f(x) = 2xe^{-F(x)}$ (1) και $F'(x) = f(x)$. Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $f(0) = 0$. Επειδή η $e^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων e^x και $-F(x)$ (ή των e^{-x} και F(x)), η συνάρτηση $2xe^{-F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων. Άρα και η f, λόγω της (1), παραγωγίζεται.

γ) Η (1), παραγωγίζοντας, δίνει:

$$f'(x) = 2e^{-F(x)} - 2xe^{-F(x)}f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{f(x)}{x} - f(x)f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = f(x) - f^2(x) \qquad (2)$$

Αλλά επειδή $f(0) = 0$, η (2) επαληθεύεται και για $x = 0$ και έτσι η (2) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Εδώ απαιτείται περισσότερη προσπάθεια. Η (2) γράφεται:

$$f(x) - xf'(x) = xf^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'f(x) - xf'(x) = xf^3(x),\ x \neq 0 \qquad (3)$$

Όμως η (1) εξασφαλίζει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$. Έτσι με $x \neq 0$ η (3) γίνεται:

$$\frac{x'f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} = x \Leftrightarrow \left(\frac{x}{f(x)}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right),\ x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1, & x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Για $x = 1$ παίρνουμε $\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$, οπότε:

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x^2+1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x > 0$$

Για $x = -1$ παίρνουμε $\frac{-1}{f(-1)} = \frac{1}{2} + c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2}$, διότι $f(-1) = -f(1) = -1$. Άρα:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x < 0$$

Επειδή $f(0) = 0$, τελικά είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

ε) Για $x > 0$ είναι $f(x) > 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^{\lambda} = \ln(\lambda^2+1)$$

στ) Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(e^{-\lambda}E(\lambda)\right) = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln(\lambda^2+1)}{e^{\lambda}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right)\cdot\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda} = 0\cdot 0 = 0$$

διότι $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2+1} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\lambda} = 0$.

1.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln(e^x+1)$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-x-2=\ln\dfrac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}$.

Λύση

α) Επειδή $e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.
Έστω λοιπόν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Είναι τότε:

- $e^{x_1}<e^{x_2}$, $e^{x_1}+1<e^{x_2}+1$, $\ln(e^{x_1}+1)<\ln(e^{x_2}+1)$.
- $x_1+\ln(e^{x_1}+1)<x_2+\ln(e^{x_2}+1)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η f είναι και 1-1.

γ) Η εξίσωση έχει σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$, διότι $\dfrac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Θα γράψουμε την εξίσωση σε πιο απλή μορφή. Είναι:

$$x^2-x-2=\ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=\ln\left(e^{x+2}+1\right)-\ln\left(e^{x^2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x^2}+1\right)+x^2=\ln\left(e^{x+2}+1\right)+(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)=f(x+2)\overset{f:\,1-1}{\Leftrightarrow} x^2=x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-1\ \text{ή}\ x=2)$$

Προφανώς, οι τιμές αυτές είναι δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού της εξίσωσης.

1.28 Αν η συνάρτηση f έχει θετική παράγωγο στο διάστημα [α,β], να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Λύση

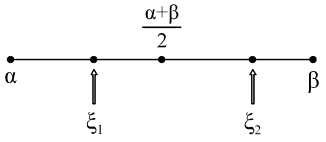
Πρόκειται για άσκηση με ιδιαίτερο διδακτικό χαρακτήρα. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με:

- $g'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x),\ x \in [\alpha, \beta]$.
- $g''(x) = f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Η g′ είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα.

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ ως παραγωγίσιμη σ' αυτά.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε:



- $g'(\xi_1) = \dfrac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \dfrac{2\left(g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)\right)}{\beta - \alpha}$
- $g'(\xi_2) = \dfrac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{2\left(g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta - \alpha}$

Επειδή η g′ είναι γνησίως αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$, παίρνουμε:

$$g'(\xi_1) < g(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{2\left(g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} < \frac{2\left(g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\beta>\alpha}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha) < g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(g(\alpha)+g(\beta)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt < \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

αφού $g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$.

1.29 Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ έχει συνεχή παράγωγο και $f(1)-f(0)=1-e$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}dx$.

Λύση

Προσπαθούμε στον αριθμητή να εμφανίσουμε τον παρονομαστή. Γράφουμε λοιπόν:

- $\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x} = \frac{f(x)+e^x-e^x-f'(x)}{f(x)+e^x} = 1-\frac{e^x+f'(x)}{f(x)+e^x} = 1-\frac{\left(e^x+f(x)\right)'}{e^x+f(x)}$.
- $I = \int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{\left(e^x+f(x)\right)'}{e^x+f(x)}\right)dx = \left[x-\ln(e^x+f(x)\right]_0^1 =$

$$= 1-\ln(e+f(1))-\left(0-\ln(1+f(0))\right) = 1-\ln(e+f(1))+\ln(1+f(0)) = 1+\ln\frac{1+f(0)}{e+f(1)}.$$

Είναι όμως $f(1)-f(0)=1-e$, οπότε $1+f(0)=e+f(1)$. Άρα $I=1+\ln 1=1$.