Α΄, Β΄ Λυκείου

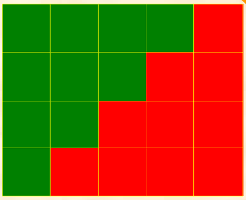
Προαπαιτούμενα: Αλγεβρικές ταυτότητες.

Αθροίσματα δυνάμεων φυσικών αριθμών

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με εύρεση τύπων που δίνουν αθροίσματα δυνάμεων φυσικών αριθμών, δηλαδή αθροίσματα της μορφής $1+2+3+\ldots+\nu$, $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$ και γενικότερα $1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+\nu^\kappa$, όπου $\nu\geq 1$, $\kappa\geq 1$ φυσικοί αριθμοί.

Ο τύπος $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ ήταν γνωστός στους αρχαίους Πυθαγορείους. Συστηματική μελέτη του υπάρχει, μεταξύ άλλων, στο έργο *Αριθμητικής Εισαγωγή* του Πυθαγόρειου φιλοσόφου Νικομάχου του Γεραστινού (2ος αι. μ.Χ.). Επίσης, σε κάποια χειρόγραφα σώζεται ένα θεώρημα του Νικομάχου το οποίο δεν βρίσκεται στην *Αριθμητικής Εισαγωγή*. Άμεσο πόρισμά του είναι ο τύπος $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\frac{1}{4}\nu^2(\nu+1)^2$. Ο τύπος $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$ ήταν γνωστός στον Αρχιμήδη, ο οποίος τον απέδειξε στο *Περί Ελίκων* και κατόπιν τον χρησιμοποίησε για να βρει το εμβαδόν έλικας. Από τα σωζόμενα κείμενα δεν φαίνεται αν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν ή όχι τύπους για τα αθροίσματα $1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+\nu^\kappa$, όπου $\kappa\geq 4$.

Τα πράσινα τετραγωνάκια (που είναι όσα τα κόκκινα) είναι $1+2+3+4$. Επομένως από το σχήμα έχουμε ότι



$$2(1+2+3+4)=4\cdot(4+1) \text{ ή } 1+2+3+4=\frac{4\cdot(4+1)}{2}.$$

Με παρόμοιο συλλογισμό (εφαρμοσμένο στο ορθογώνιο $\nu\times(\nu+1)$) βρίσκουμε ότι

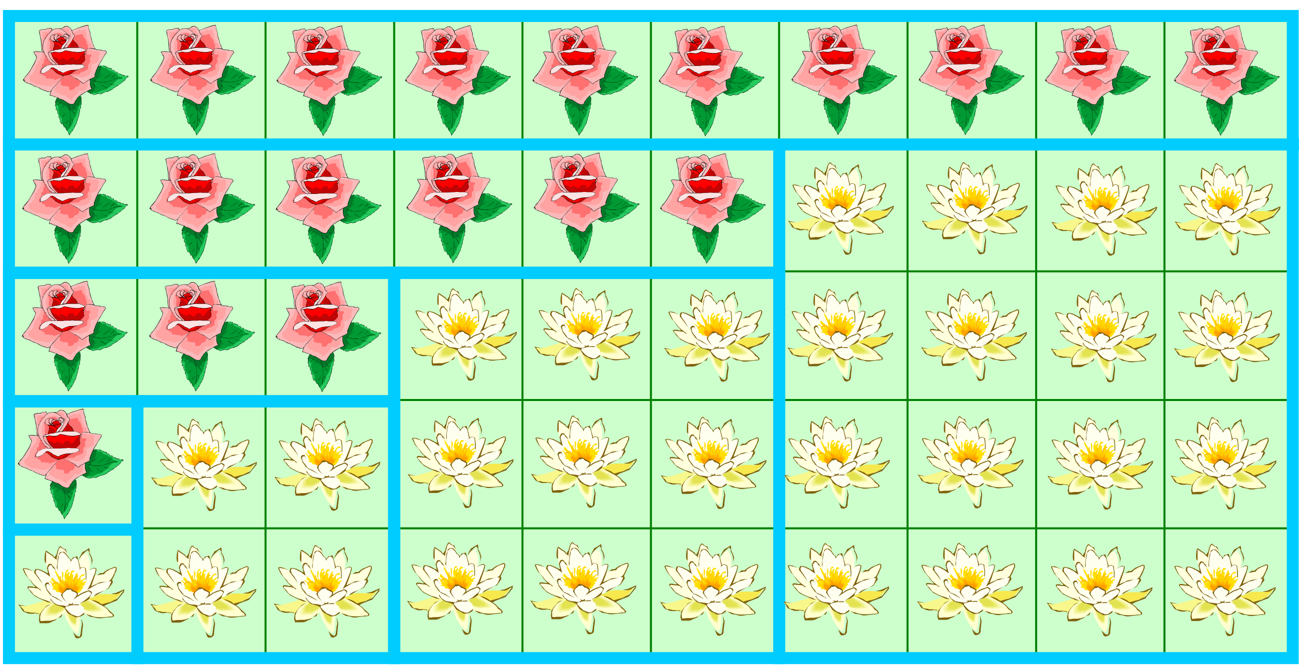
$$1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}.$$

Για μελέτη αυτών των γενικότερων αθροισμάτων πρέπει να ανατρέξει κανείς στους Άραβες μαθηματικούς, οι οποίοι ήσαν βαθείς γνώστες της ελληνικής γραμματείας. Η πρώτη συστηματική μελέτη οφείλεται στον Άραβα μαθηματικό Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham, γνωστό και ως Alhazen (965 – 1039). Ο Alhazen μελέτησε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών, αστρονομίας και οπτικής. Ειδικά, προσδιόρισε το εμβαδόν ορισμένων καμπυλόγραμμων σχημάτων, χρησιμοποιώντας μεθόδους του Αρχιμήδη. Στις αποδείξεις του χρειάστηκε να υπολογίσει αθροίσματα δυνάμεων της μορφής $1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+\nu^\kappa$. Μερικά από τα αποτελέσματα που ανακάλυψε περιγράφονται εδώ.

Το χαρτονόμισμα εκδόθηκε στο Ιράκ τη δεκαετία 1980 και είναι αφιερωμένο στον Alhazen που εικονίζεται στη μία πλευρά του. Το γεωμετρικό σχήμα στο χαρτονόμισμα, είναι από τις εργασίες του στην οπτική.

Ας αρχίσουμε με την απλούστερη περίπτωση της μεθόδου του για αθροίσματα δυνάμεων, που είναι το $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$.

Παρατηρούμε το επόμενο σχήμα.



Βλέπουμε ότι τα ρόδα είναι $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$ και τα κρίνα $1^2+2^2+3^2+4^2$.

Όλα μαζί τα λουλούδια είναι $(1+4)\cdot(1+2+3+4)$, επομένως

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=(1+4)\cdot(1+2+3+4).$$

Με παρόμοιο σχήμα συμπεραίνουμε ότι, γενικότερα, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$ ισχύει

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+\nu)+\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2\right)=(1+\nu)\cdot(1+2+3+\ldots+\nu).$$

Ορίζουμε $A=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$, οπότε η τελευταία ισότητα γράφεται διαδοχικά

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+\nu)+A=(1+\nu)\cdot(1+2+3+\ldots+\nu)$$

$$\left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3^2}{2}+\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}\right)+A=(\nu+1)\cdot\left(\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2\right)+\frac{1}{2}(1+2+3+4+\ldots+\nu)+A=\frac{\nu^3}{2}+\nu^2+\frac{\nu}{2}$$

$$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}(1+2+3+4+\ldots+\nu)+A=\frac{\nu^3}{2}+\nu^2+\frac{\nu}{2}$$

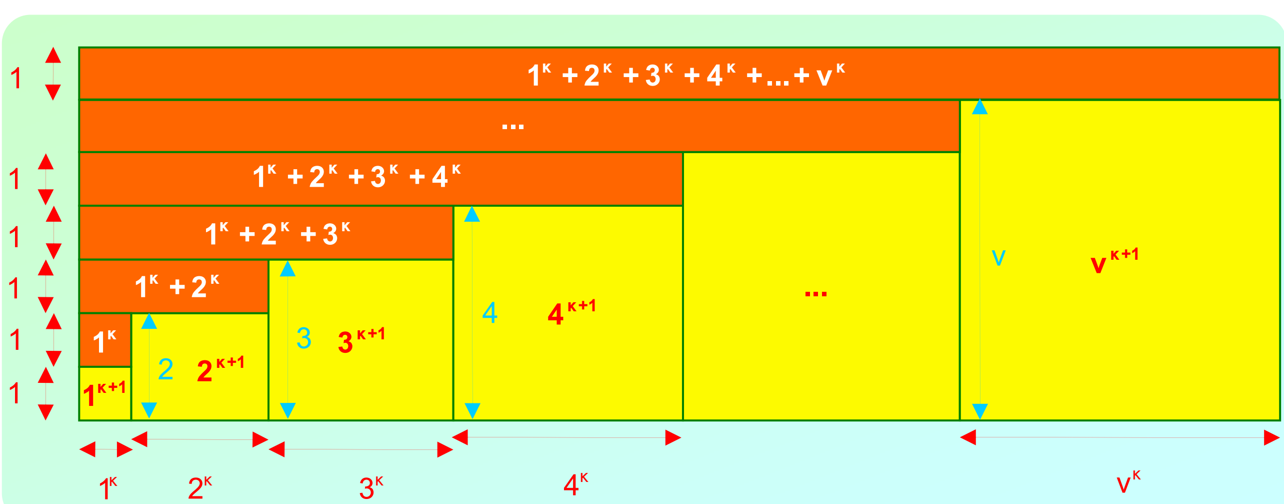
$$\frac{3}{2}A=\frac{\nu^3}{2}+\nu^2+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+\nu)=\frac{\nu^3}{2}+\nu^2+\frac{\nu}{2}-\frac{\nu^2+\nu}{4}$$

$$\frac{3}{2}A=\frac{\nu^3}{2}+\nu^2+\frac{\nu}{2}-\frac{\nu^2+\nu}{4}=\frac{\nu^3}{2}+\frac{3\nu^2}{4}+\frac{\nu}{4}$$

$$A=\frac{2}{3}\left(\frac{\nu^3}{2}+\frac{3\nu^2}{4}+\frac{\nu}{4}\right)=\frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1).$$

Άρα $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$.

Το παραπάνω είναι η περίπτωση $\kappa=2$ του αθροίσματος $1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+\nu^\kappa$. Για την γενική περίπτωση ο Alhazen χρησιμοποίησε το παρακάτω σχήμα, το οποίο γενικεύει την περίπτωση που μελετήσαμε.



.

(Η κλίμακα στο σχήμα δεν είναι η ίδια οριζόντια και κατακόρυφα, όμως αυτό δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Οι κόκκινες παραστάσεις δείχνουν το εμβαδό των κίτρινων ορθογωνίων και οι άσπρες το εμβαδό των κόκκινων ορθογωνίων).

Μετρώντας με δυο διαφορετικούς τρόπους το εμβαδόν του σχήματος παίρνουμε ότι

$$\left(1^{\kappa+1}+2^{\kappa+1}+3^{\kappa+1}+4^{\kappa+1}+\ldots+\nu^{\kappa+1}\right)$$

$$+\left(1^{\kappa}+\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}\right)+\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}+3^{\kappa}\right)\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}+3^{\kappa}+4^{\kappa}\right)+\ldots+\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}+3^{\kappa}+4^{\kappa}+\ldots+\nu^{\kappa}\right)\right)$$

$$=\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}+3^{\kappa}+4^{\kappa}+\ldots+\nu^{\kappa}\right)\cdot\underbrace{(1+1+1+1+\ldots+1)}_{\nu+1\ \text{προσθετέοι}}$$

$$=\left(1^{\kappa}+2^{\kappa}+3^{\kappa}+4^{\kappa}+\ldots+\nu^{\kappa}\right)\cdot(\nu+1).$$

Ειδικά για $\kappa=2$ και με διαδικασία παρόμοια με παραπάνω χρησιμοποιώντας το $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}$ που βρήκαμε, θα καταλήξουμε (παραλείπονται οι πράξεις) στο

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=\frac{\nu^4}{4}+\frac{\nu^3}{2}+\frac{\nu^2}{4}=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2.$$

Παρατηρούμε ότι: $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+\ldots+\nu)^2$

Με ανάλογη εργασία η περίπτωση $\kappa=3$ δίνει

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+\nu^4=\frac{1}{5}\nu^5+\frac{1}{2}\nu^4+\frac{1}{3}\nu^3-\frac{1}{30}\nu=\frac{1}{30}\nu(\nu+1)(2\nu+1)\left(3\nu^2+3\nu-1\right).$$

Φυσικά μπορούμε να συνεχίσουμε διαδοχικά για όσα κ θέλουμε. Στην κάθε περίπτωση για μία νέα τιμή του κ χρησιμοποιούμε την προηγούμενη.

Καταγράφουμε τις επόμενες λίγες τιμές του κ:

$$1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots+\nu^5=\frac{1}{12}\nu^2(\nu+1)^2\left(2\nu^2+2\nu-1\right)$$

$$1^6+2^6+3^6+4^6+\ldots+\nu^6=\frac{1}{42}\nu(\nu+1)(2\nu+1)\left(3\nu^4+6\nu^3-3\nu+1\right)$$

$$1^7+2^7+3^7+4^7+\ldots+\nu^7=\frac{1}{24}\nu^2(\nu+1)^2\left(3\nu^4+6\nu^3-\nu^2-4\nu+2\right)$$

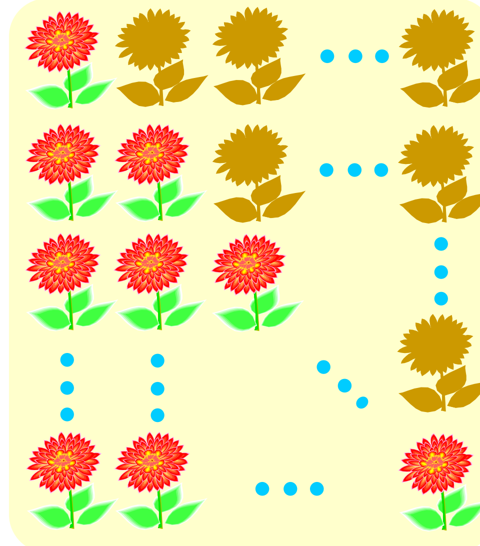
Άσκηση 1: Να βρεθεί φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε $1+2+3+4+\ldots+\nu=1128$.

Λύση

1ος τρόπος: Είναι $1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}$, οπότε $\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{2}=1128$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα $\nu^2+\nu=2256$ ή $\nu^2+\nu-2256=0$ ή $\nu=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2256)}}{2\cdot1}$ ή $\nu=\frac{-1\pm95}{2}$ ή $\nu=47$ (η άλλη λύση της εξίσωσης απορρίπτεται γιατί είναι αρνητικός αριθμός).

Επομένως $1+2+3+4+\ldots+47=1128$.

2ος τρόπος (χωρίς τη χρήση προηγουμένων αποτελεσμάτων):



Στο σχήμα δίπλα είναι ζωγραφισμένα έγχρωμα και μονόχρωμα λουλούδια σε ν γραμμές και ν στήλες. Όλα μαζί τα λουλούδια σχηματίζουν ένα τετράγωνο με πλευρά ν. Τα έγχρωμα λουλούδια είναι $1+2+3+4+\ldots+\nu=1128$. Επομένως όλα τα λουλούδια του σχήματος είναι λιγότερα από $2\cdot 1128=2256$, γιατί η διαγώνιος μετρήθηκε δύο φορές. Άρα η πλευρά του τετραγώνου, που ισούται με ν, είναι μικρότερη από $\sqrt{2256}=47{,}49\ldots$. Επομένως είναι $\nu\leq 47$. Θα αποδείξουμε ότι $\nu=47$. Εξετάζουμε λοιπόν το διπλανό τετράγωνο με πλευρά 47, με στόχο να αποδείξουμε ότι τα έγχρωμα λουλούδια είναι πράγματι 1128. Όλα τα λουλούδια είναι $47^2=2209$. Τα μονόχρωμα λουλούδια είναι όσα τα έγχρωμα που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο. Στην διαγώνιο βρίσκονται 47 έγχρωμα τα λουλούδια. Επομένως κάτω (ή πάνω) από τη διαγώνιο βρίσκονται $\dfrac{2209-47}{2}=1081$ λουλούδια. Άρα τα έγχρωμα λουλούδια είναι $1081+47=1128$, όπως θέλαμε να διαπιστώσουμε.

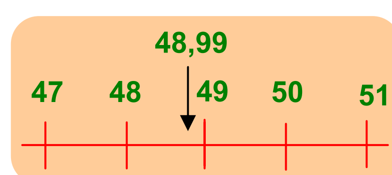
Άσκηση 2: Να βρεθεί, αν υπάρχει, φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=4900.$$

Λύση

Είναι $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$, οπότε $\dfrac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)=4900$ ή $\nu(\nu+1)(2\nu+1)=29400$ ή $(2\nu)(2\nu+2)(2\nu+1)=4\cdot 29400$ ή $(2\nu)(2\nu+1)(2\nu+2)=117600$.

Όμως $(2\nu)^3<(2\nu)(2\nu+1)(2\nu+2)<(2\nu+2)^3$ ή $(2\nu)^3<117600<(2\nu+2)^3$ ή $2\nu<\sqrt[3]{117600}<2\nu+2$ ή $2\nu<48{,}99\ldots<2\nu+2$. Δηλαδή ο 48,99 είναι μεταξύ των διαδοχικών άρτιων φυσικών 2ν και $2\nu+2$. Προφανώς $2\nu=48$ ή $\nu=24$.



Προσοχή! Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι *αν υπάρχει* ν που ικανοποιεί την υπόθεση, τότε $\nu=24$. Με έλεγχο θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η τιμή του ν επαληθεύει την εξίσωση της υπόθεσης. Πράγματι είναι $\dfrac{1}{6}\cdot 24(24+1)(2\cdot 24+1)=4900$.

Παρατήρηση: Ο τελευταίος έλεγχος είναι απαραίτητος. Πράγματι, αν εργαζόμασταν π.χ. με την εξίσωση $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=4901$, όπως παραπάνω θα συμπεραίναμε ξανά ότι $\nu=24$. Κάνοντας έλεγχο θα βλέπαμε ότι αυτή η τιμή του ν δεν ικανοποιεί την υπόθεση. Επομένως η $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=4901$ δεν έχει λύση φυσικό αριθμό.