ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Γ΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 18/04/2015 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>Πρόβλημα 1</u> : Αν α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$$

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\chi^2 + \frac{2}{\chi} \geq 3 : (1)$, για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς χ.
Πράγματι,
$\chi^2 + \frac{2}{\chi} \geq 3 \Leftrightarrow \chi^3 + 2 \geq 3\chi \Leftrightarrow \chi^3 - 3\chi + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi^3 + 2\chi^2 - 2\chi^2 - 4\chi + \chi + 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow \chi^3 - 2\chi^2 + \chi + 2\chi^2 - 4\chi + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi(\chi^2 - 2\chi + 1) + 2(\chi^2 - 2\chi + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\chi - 1)^2(\chi + 2) \geq 0$, που ισχύει.

Εφαρμόζουμε την (1) διαδοχικά για $\chi = \alpha, \chi = \beta, \chi = \gamma$ και στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις ομοιόστροφες ανισότητες, οπότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9 .$$

<u>Πρόβλημα 2</u> : Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $1 - xy$ είναι τέλειο τετράγωνο.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

Αν $xy = 0$, το ζητούμενο ισχύει.
Αν $xy \neq 0$, τότε διαιρούμε την δεδομένη σχέση με x^2y^2 και έχουμε

$$\frac{x^5}{x^2y^2}+\frac{y^5}{x^2y^2}=2 \Leftrightarrow x\left(\frac{x}{y}\right)^2+y\left(\frac{y}{x}\right)^2=2.$$

Θέτουμε $\frac{y}{x}=\kappa \Leftrightarrow y=\kappa x$, οπότε η τελευταία ισότητα γίνεται

$$\frac{x}{\kappa^2}+\kappa^3 x=2 \Leftrightarrow (1+\kappa^5)x=2\kappa^2 \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa^2}{1+\kappa^5} \ : \ (1)$$

Επομένως

$$y=\kappa x=\frac{2\kappa^3}{1+\kappa^5} \ : \ (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$1-xy=1-\frac{2\kappa^2}{1+\kappa^5}\cdot\frac{2\kappa^3}{1+\kappa^5}=\frac{(1+\kappa^5)^2-4\kappa^5}{(1+\kappa^5)^2}=\left(\frac{1-\kappa^5}{1+\kappa^5}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3 **:** Η κάθε έδρα ενός κύβου χρωματίζεται με ένα από 6 διαθέσιμα διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε, κάθε δύο γειτονικές έδρες του να έχουν διαφορετικό χρώμα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους είναι δυνατόν να γίνει αυτό;

Προτεινόμενη λύση

Είναι προφανές ότι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν λιγότερα από 3 χρώματα.

(α) Αν θα χρησιμοποιηθούν μόνο 3 χρώματα, το κάθε χρώμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να χρωματίσει ένα ζεύγος απέναντι εδρών. Υπάρχουν $\binom{6}{3}=20$ διαφορετικοί τρόποι για να επιλεγεί η τριάδα των χρωμάτων που θα χρησιμοποιηθεί.

(β) Αν θα χρησιμοποιηθούν μόνο 4 χρώματα, 2 από αυτά θα χρησιμοποιηθούν για να χρωματίσουν δύο ζεύγη απέναντι εδρών. Υπάρχουν $\binom{6}{2}=15$ διαφορετικοί τρόποι για να επιλεγεί η δυάδα των χρωμάτων αυτών. Άλλα 2 χρώματα που θα χρησιμοποιηθούν, θα επιλεγούν με $\binom{4}{2}=6$ διαφορετικούς τρόπους. Συνολικά, έχουμε $15\cdot 6=90$ διαφορετικούς τρόπους.

(γ) Αν θα χρησιμοποιηθούν μόνο 5 χρώματα, 1 από αυτά θα χρησιμοποιηθεί για να χρωματίσει ένα ζεύγος απέναντι εδρών. Υπάρχουν $\binom{6}{1}=6$ διαφορετικοί τρόποι για να επιλεγεί το χρώμα αυτό. Άλλα 4 χρώματα που θα χρησιμοποιηθούν, θα επιλεγούν με $\binom{5}{4}=5$ διαφορετικούς τρόπους και θα

χωριστούν σε δύο ζεύγη με 3 διαφορετικούς τρόπους έτσι, ώστε το κάθε ζεύγος να χρωματίσει μία δυάδα απέναντι εδρών. Συνολικά, έχουμε $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ διαφορετικούς τρόπους.

(δ) Αν θα χρησιμοποιηθούν και τα 6 χρώματα, μπορούμε να τα χωρίσουμε σε 3 ζεύγη με $\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 15$ διαφορετικούς τρόπους και κάθε ζεύγος θα χρησιμοποιηθει, για να χρωματίζει μία δυάδα απέναντι εδρών. Σε αυτή την περίπτωση, όταν θα χρωματίσουμε το τελευταίο ζεύγος εδρών, διαλέγουμε ποιο χρώμα θα χρησιμοποιήσουμε πρώτο και ποιο δεύτερο με 2 διαφορετικούς τρόπους. Συνολικά, έχουμε $15 \cdot 2 = 30$ διαφορετικούς τρόπους.

Τέλος, οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να χρωματίσουμε τον κύβο, κάτω από τις προϋποθέσεις του προβλήματος, είναι: $20 + 90 + 90 + 30 = 230$

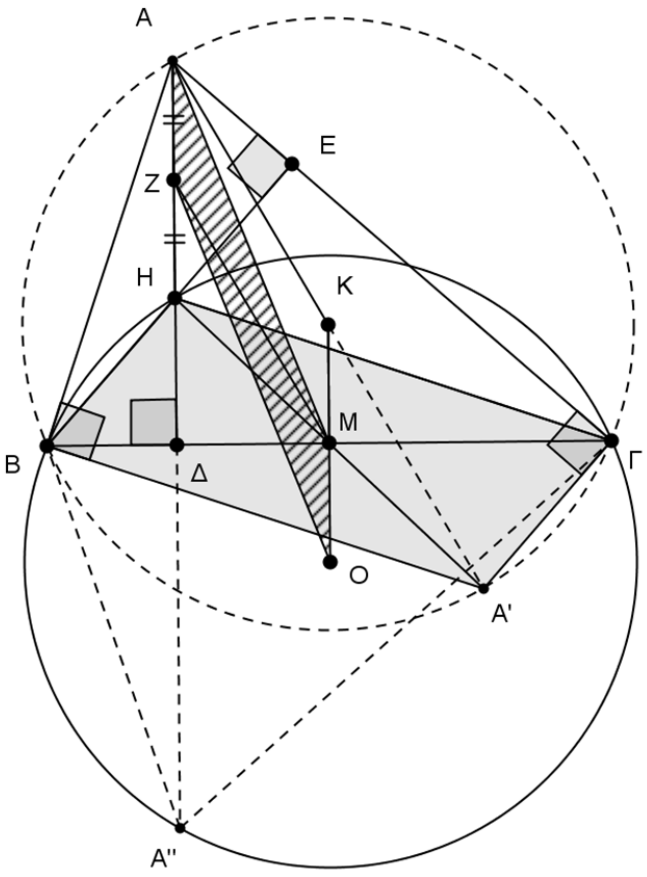
Πρόβλημα 4 **:** Δίνεται τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $AB \neq A\Gamma$. Έστω M το μέσον του $B\Gamma$, H το ορθόκεντρο του $\Delta AB\Gamma$, Z το μέσον του AH και O το περίκεντρο του τριγώνου $\Delta BH\Gamma$. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $AZOM$ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση 1

Έστω K το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και A' το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Τότε $BE \perp A\Gamma$ και $A'\Gamma \perp A\Gamma$ ($\angle A'\Gamma A = 90^0$). Άρα $BE \parallel A'\Gamma$. Ανάλογα, $\Gamma H \parallel A'B$. Άρα το τετράπλευρο $A'BH\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς το HA' περνά από το M. Στο τρίγωνο AHA' το

$$KM \parallel = \frac{AH}{2} \parallel = AZ \ : (1) .$$

Επειδή το συμμετρικό του ορθοκέντρου ενός τριγώνου ως προς μια πλευρά του είναι σημείο του περιγεγραμμένου του κύκλου, έχουμε πως το συμμετρικό A'' του σημείου A (που είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $BH\Gamma$) ως προς την πλευρά του $B\Gamma$, είναι σημείο του κύκλου (O). Όμως τα τρίγωνα $AB\Gamma, A''B\Gamma$ είναι ίσα, λόγω συμμετρίας και έτσι οι περιγεραμμένοι τους κύκλοι είναι ίσοι. Άρα και τα αποστήματα KM, OM της κοινής τους χορδής $B\Gamma$ είναι ίσα. Συνεπώς, λόγω της (1), είναι $OM \parallel = KM \parallel = AZ$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $AZOM$ είναι παραλληλόγραμμο.



Προτεινόμενη λύση 2

Πρώτα απ' όλα οι ευθείες AZ, OM είναι παράλληλες, ως κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$.
Είναι γνωστό ότι το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο κάθε τριγώνου βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ευθεία Euler).
Στο πρόβλημά μας τα σημεία A, K και O είναι αντίστοιχα το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο, και το περίκεντρο του τριγώνου $BH\Gamma$ (διπλανό σχήμα). Άρα τα τρία σημεία βρίσκονται στην ευθεία (ε) .
Από τα όμοια τρίγωνα AHK και OMK έχουμε:

$$\frac{OM}{HA} = \frac{KO}{KA} = \frac{KM}{KH} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$OM = \frac{1}{2} \cdot HA = AZ\,.$$

Συνεπώς $AZ \parallel = OM$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $AZOM$ είναι παραλληλόγραμμο.

