

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t) = \frac{1}{2+it}$, $t \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z(t) + \overline{z(t)} = 4z(t) \cdot \overline{z(t)}$.

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

ΘΕΜΑ 18ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) + 2xf(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $f(0) = 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2}-1)$.

ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ln(x^4 + 1) < 1 - \ln 2$.

ΘΕΜΑ 10^ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 3$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Αν $g(x) = \ln f(x)$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε την g' και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

ΟΕΦΕ ΘΕΜΑ 3 (2007)

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0$.

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 7