

100 Ασκήσεις συνδυαστικής για το 2015

Έκδοση 3η: Τρίτη, 30 Ιουνίου 2015

Εδώ μάζεψα 100 ασκήσεις συνδυαστικής οι οποίες τέθηκαν σε εθνικούς και διεθνείς διαγωνισμούς το έτος 2014. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρόσθεσα και ασκήσεις από την IMO Shortlist του 2013. Τις περισσότερες από αυτές τις ασκήσεις τις έχω πάρει από το www.mathlinks.ro. Πολλές φορές έχω αγνοήσει ασκήσεις που μπήκαν σε αρχικούς γύρους εθνικών διαγωνισμών. Σε κάθε άσκηση προσπάθησα να δώσω ένα βαθμό δυσκολίας από το 1 ως το 5. Κάθε τέτοια βαθμολόγηση εννοείται ότι είναι υποκειμενική αλλά η προσπάθειά μου ήταν οι βαθμοί δυσκολίας να αντιπροσωπεύουν τα εξής:

- 1: Τα μέλη της ομάδας μας πρέπει να έχουν από την αρχή ξεκάθαρη ιδέα στο πως να την λύσουν.
- 2: Η λύση της άσκησης δεν είναι τόσο άμεση αλλά η άσκηση δεν είναι αρκετά δύσκολη ώστε να μπορούσε να εμφανιστεί στην Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.
- 3: Ασκήσεις εύκολου επιπέδου για ΔΜΟ.
- 4: Ασκήσεις μέτριου επιπέδου για ΔΜΟ.
- 5: Ασκήσεις δύσκολου επιπέδου για ΔΜΟ.

Στις περιπτώσεις όπου ταλαντεύομαι μεταξύ δύο διαφορετικών βαθμών δυσκολίας τελικά πρόσθεσα ένα + στον βαθμό δυσκολίας. Π.χ. ένα πρόβλημα που αμφιταλαντεύομαι μεταξύ βαθμού δυσκολίας 2 και 3 εν τέλει του έβαλα βαθμό δυσκολίας 2+.

Τα μέλη της ομάδας πρέπει απαραίτητα να γνωρίζουν κάποιες γνωστές και κλασικές τεχνικές όπως:

1. Αρχή περιστερών.
2. Αναλλοίωτες. (Συμπεριλαμβανομένων π.χ. ημι-αναλλοίωτων αλλά και χρωματισμών ώστε να κατασκευαστούν οι αναλλοίωτες.)
3. Απλές μέθοδοι απαρίθμησης. (Όπως π.χ. προσθετική και πολλαπλασιαστική αρχή, θεώρημα αποκλεισμού-εγκλεισμού)
4. Προχωρημένες μέθοδοι απαρίθμησης. (Όπως π.χ. κατασκευή αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών, κατασκευή και επίλυση αναγωγικών τύπων, χρήση γεννήτριων συναρτήσεων.)
5. Διπλή απαρίθμηση.
6. Extremal Principle.
7. Απλή θεωρία γραφημάτων. (Μετάφραση προβλημάτων στην γλώσσα της θεωρίας γραφημάτων, και γνώσεις απλών θεωρημάτων για δέντρα κύκλους, συνεκτικά γραφήματα, γραφήματα Euler κ.τ.λ.)

Στην βαθμολόγηση των ασκήσεων υπέθεσα πως όλα τα πιο πάνω είναι γνωστά. Έτσι π.χ. μια άσκηση η οποία ζητάει να απαριθμήσουμε κάποια αντικείμενα και είναι άμεσο πως θα κατασκευαστεί η αναδρομική ακολουθία θα πάρει βαθμό 1. Εννοείται βέβαια ότι ο βαθμός δυσκολίας αυξάνει ανάλογα και με το πόσο δύσκολο είναι να χρησιμοποιηθεί η πιο πάνω τεχνική. Π.χ. αν είναι δύσκολο να βρούμε την αναλλοίωτη τότε πιθανώς ο βαθμός δυσκολίας να αυξηθεί μέχρι το 3 ή και το 4.

Πέραν των πιο πάνω τεχνικών υπάρχουν και κάποια άλλα θεωρήματα και τεχνικές που καλό είναι τα μέλη της ομάδας μας να γνωρίζουν όσα πιο πολλά και σε όσο περισσότερο βάθος γίνεται. Μερικά από αυτά έχουν εμφανιστεί σε αρκετά παλαιότερες ολυμπιάδες, άλλα έχουν κάνει την εμφάνισή τους πρόσφατα ενώ άλλα ίσως κάνουν την εμφάνισή τους στο μέλλον. Αναφέρω ενδεικτικά:

1. Προχωρημένη θεωρία γραφημάτων. (Π.χ. επίπεδα γραφήματα και τύπος του Euler, κύκλοι Hamilton και θεώρημα Dirac, θεώρημα γάμου, ανεξάρτητα σύνολα και χρωματικοί αριθμοί, θεώρημα Tóran.)
2. Απλή θεωρία ομάδων. (Για χρήση σε απαρίθμηση με το θεώρημα Burnside και σε κατασκευή αναλλοίωτων.)
3. Θεωρία Ramsey.
4. Θεώρημα Dilworth.
5. Ακρότατη θεωρία συνόλων. (Π.χ. θεωρήματα Sperner, Erdős-Ko-Rado, Kruskal-Katona)
6. Πιθανολογικές μέθοδοι.

Μερικές από τις πιο κάτω ασκήσεις είναι εξαιρετικά δύσκολες χωρίς γνώση κάποιου εκ των πιο πάνω προχωρημένων θεωρημάτων, αλλά αρκετές απλές με την γνώση του. Τέτοιες ασκήσεις είναι πολύ δύσκολο να δώσεις ένα αντιπροσωπευτικό βαθμό δυσκολίας. Προτίμησα να δώσω βαθμό δυσκολίας θεωρώντας ότι όλα τα πιο πάνω είναι γνωστά! Για να μπορέσω να επισημάνω όμως ότι χρειάζεται κάποιος να έχει κάποιες από αυτές τις επιπλέον γνώσεις πρόσθεσα ένα αστεράκι. Έτσι π.χ. ένα πρόβλημα με βαθμό δυσκολίας 1* σημαίνει ότι είναι άμεση εφαρμογή κάποιου από τα πιο πάνω θεωρήματα. Εννοείται ότι χωρίς τέτοια γνώση ο βαθμός δυσκολίας του ιδίου προβλήματος μπορεί να αυξηθεί μέχρι και το 5.

Οι ασκήσεις

1. Δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με $n \geq 6$ κορυφές. Να βρεθεί ο αριθμός των τριγώνων με τις κορυφές τους να είναι κορυφές του πολυγώνου και τις πλευρές του να είναι διαγώνιοι (αλλά όχι πλευρές) του πολυγώνου.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Βοσνία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.](#)

2. Μπορούν να τοποθετηθούν οι αριθμοί 1 ως 9 στα κελιά ενός 3×3 πίνακα ώστε το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται σε κάθε δύο κελιά τα οποία έχουν κοινή πλευρά να είναι πρώτος;

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Ινδονησία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 1.](#)

3. Μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς $0, 1, 2, \dots, 9$ σε ένα κύκλο ώστε το άθροισμα κάθε τριών συνεχόμενων αριθμών να είναι το πολύ

(α) 13

(β) 14

(γ) 15

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Ισπανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 1.](#)

4. Κάθε ένας από τους ακεραίους από το 1 ως το 4027 χρωματίζεται πράσινο ή κόκκινο. Σε κάθε βήμα μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς $m, n \in \{1, 2, \dots, 4027\}$ ώστε ο m/n ή ο n/m να είναι πρώτος, και να αλλάξουμε το χρώμα και των δύο αριθμών.

Ναδειχθεί ότι μπορούμε να κάνουμε μια ακολουθία βημάτων ώστε να κάνουμε κάθε ακέραιο από το 1 ως το 2014 πράσινο.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Μεξικό, Μαθηματική Ολυμπιάδα, Πρόβλημα 1.](#)

5. Έστω ακέραιος $n > 1$. Χρωματίζουμε n τετραγωνάκια μιας $n \times n$ σκακιέρας πράσινα, άλλα n τα χρωματίζουμε μπλε, και τα υπόλοιπα τα χρωματίζουμε άσπρα.

Να εξεταστεί ποιοι χρωματισμοί με την πιο πάνω ιδιότητα είναι περισσότεροι: Αυτοί όπου υπάρχει ακριβώς ένα πράσινο τετραγωνάκι σε κάθε σειρά και ακριβώς ένα μπλε σε κάθε σειρά ή αυτοί όπου υπάρχει ακριβώς ένα πράσινο τετραγωνάκι σε κάθε σειρά και ακριβώς ένα μπλε σε κάθε στήλη;

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Νότιος Αφρική, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 5.](#)

6. Στην περιφέρεια ενός κύκλου είναι τοποθετημένοι 99 φυσικοί αριθμοί. Αν a, b είναι δυο γειτονικοί αριθμοί πάνω στην περιφέρεια του κύκλου με $a \geq b$ τότε είτε $a - b \in \{1, 2\}$ είτε $a/b = 2$.

Να δείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς που βρίσκονται στον κύκλο είναι πολλαπλάσιο του 3.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 1.](#)

7. Ναδειχθεί ότι δοθέντων 16 τέλειων κύβων, υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται με το 91.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 2.

8. Οι αριθμοί από το 1 ως το 2014 είναι γραμμένοι στον πίνακα. Σε κάθε βήμα μπορούμε να σβήσουμε δυο αριθμούς που βρίσκονται γραμμένοι στον πίνακα, έστω τους a και b , και στην θέση τους να γράψουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους.

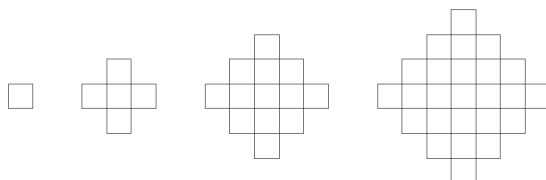
Ναδειχθεί ότι σε κάθε βήμα, το άθροισμα των αριθμών που υπάρχουν στον πίνακα είναι μεγαλύτερο του $2014 \sqrt[2014]{2014!}$.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: Ολυμπιάδα Cono Sur 2014, Πρόβλημα 1.

9. Χρησιμοποιώντας τετράγωνα μήκους ένα κατασκευάζουμε μια σταυροειδή φιγούρα σε διάφορα βήματα ακολουθώντας τον ειρμό που φαίνεται στο σχήμα. Π.χ. στο πρώτο στάδιο χρησιμοποιούμε 1 τετράγωνο, στο δεύτερο 5, κ.τ.λ.

Να βρεθεί το τελευταίο στάδιο κατά το οποίο η φιγούρα χρησιμοποιεί λιγότερα από 2014 τετράγωνα.



Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: Κεντροαμερικανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.

10. Ο Αλή Μπαμπάς και οι 40 κλέφτες θέλουν να περάσουν τα στενά του Βοσπόρου. Έχουν σταθεί σε μια γραμμή μπροστά τον Αλή Μπαμπά πρώτο, ώστε κάθε δυο συνεχόμενα άτομα να είναι φίλοι μεταξύ τους. Επίσης, ο Αλή Μπαμπάς είναι φίλος και με τον τρίτο στην σειρά ενώ δεν υπάρχουν άλλες φιλίες. Έχουν στην διάθεσή τους μια βάρκα στην οποία μπορούν να μπουν είτε 2 είτε 3 άτομα.

Μπορούν να την χρησιμοποιήσουν για να περάσουν τα στενά;

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Ο-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα

5

11. Σε ένα τραπέζι υπάρχει άρτιος αριθμός χαρτιών. Σε κάθε χαρτί είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Έστω a_k ο αριθμός των χαρτιών που έχουν γραμμένο το k . Γνωρίζουμε ότι

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots \geq 0$$

για κάθε θετικό ακέραιο n . Ναδειχθεί ότι τα χαρτιά μπορούν να διαμεριστούν σε ζεύγη ώστε οι αριθμοί σε κάθε ζεύγος να διαφέρουν κατά 1.

Βαθμός Δυσκολίας: 1

Πηγή: [Ολυμπιάδα Tuymaada για Seniors 2014, Πρόβλημα 5.](#)

12. Έστω μια μη φθίνουσα ακολουθία $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ θετικών ακεραίων. Ονομάζουμε ένα θετικό ακέραιο καλό αν υπάρχει δείκτης i έτσι ώστε $n = \frac{i}{a_i}$. Ναδειχθεί ότι αν ο 2013 είναι καλός τότε και ο 20 είναι καλός.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: [Γερμανία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3.](#)

13. Έχουμε 100 καλάθια που συνολικά περιέχουν 1000 κιλά ρύζι και 3000 αυγά. Θέλουμε τα καλάθια να έχουν από 10 κιλά ρύζι και από 30 αυγά. Σε κάθε βήμα μπορούμε να πάρουμε δύο καλάθια και να μεταφέρουμε από το ένα καλάθι στο άλλο όσο ρύζι και όσα αυγά θέλουμε. (Επιτρέπεται να μεταφέρουμε ρύζι από το πρώτο καλάθι στο δεύτερο και αυγά από το δεύτερο στο πρώτο.)

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων ώστε να είμαστε σίγουροι πως θα τα καταφέρουμε.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: [Ιράν, Μαθηματική Ολυμπιάδα, Δεύτερος Γύρος 2014, Πρόβλημα 1.](#)

14. Έχουμε 2014 μπάλες χρωματισμένες με 106 διαφορετικά χρώματα, με 19 μπάλες από κάθε χρώμα. Να βρεθεί το ελάχιστο n ώστε ανεξάρτητα από το πως θα διαρρυθμιστούν οι μπάλες σε ένα κύκλο να μπορούμε να επιλέξουμε n συνεχόμενες από αυτές με 53 διαφορετικά χρώματα.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: [Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής για Juniors 2014, Πρόβλημα 3.](#)

15. Σε ένα τραπέζι βρίσκονται 100 χαρτιά αριθμημένα από το 1 ως το 100. Ο Αντρέας και ο Νίκος πήραν τον ίδιο αριθμό από χαρτιά με τέτοιο τρόπο ώστε αν ο Αντρέας πήρε το χαρτί με τον αριθμό n , τότε ο Νίκος πήρε το χαρτί με τον αριθμό $2n + 2$. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χαρτιών που μπορεί να πήραν οι δυο παίκτες;

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: [Ουκρανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 4.](#)

16. Δίνεται σύνολο S και συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ με την ιδιότητα $f(x) \neq f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{N}$ με $|x - y|$ ίσο με πρώτο.

Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός στοιχείων του S .

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 2.

17. Η μητέρα της Όλγας έφτιαξε 15 πίτες. Τις έβαλε σε ένα κυκλικό ταψί με την εξής κυκλική σειρά: 7 με λάχανο, 7 με κρέας, και μία με κεράσια και τις έβαλε στον φούρνο να ψηθούν. Η Όλγα θέλει να φάει την πίτα με τα κεράσια. Όλες οι πίτες φαίνονται ίδιες. Η Όλγα γνωρίζει την σειρά αλλά δεν γνωρίζει πως περιστράφηκε το ταψί.

Μπορεί να φάει την πίτα με τα κεράσια αν επιτρέπεται να φάει μόνο 4 πίτες;

Βαθμός Δυσκολίας: 1+

Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Ο-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 2

18. Σε κάθε σημείο X του χώρου, αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό $f(X) \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε μη εκφυλισμένο τετράεδρο $ABCD$ με κέντρο εγγεγραμμένης σφαίρας O ισχύει ότι

$$f(O) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$

Να δειχθεί ότι $f(X) = 1$ για κάθε σημείο του χώρου X .

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Βουλγαρία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

19. Σε ένα σχολείο υπάρχουν n μαθητές. Κάποιοι είναι φίλοι μεταξύ τους και κάποιοι όχι με τις φιλίες να είναι αμοιβαίες. Ορίζουμε τα a, b ως τις ελάχιστες τιμές ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

(α) Μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε a ομάδες ώστε σε κάθε ομάδα όλοι είναι φίλοι μεταξύ τους.

(β) Μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε b ομάδες ώστε να μην υπάρχουν σε καμία ομάδα δυο μαθητές που να είναι φίλοι.

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του $N = a + b$ σε σχέση με το n .

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Ιαπωνία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

20. Δίνονται θετικοί ακέραιοι n, k, m με $k \leq n$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{r=0}^m \frac{k \binom{m}{r} \binom{n}{k}}{(k+r) \binom{m+n}{r+k}} = 1.$$

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Ινδονησία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.

21. Δίνεται ένα δέντρο με n κορυφές αριθμημένες από το 1 ως το n ώστε κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό αριθμό. Αλλάζουμε την αρίθμηση με τον πιο κάτω τρόπο: Παίρνουμε τις ακμές μία προς μία (με κάποια σειρά) και ανταλλάζουμε τις αριθμήσεις στις κορυφές της ακμής. Αφού το κάνουμε αυτό για όλες τις κορυφές παίρνουμε μια καινούργια αρίθμηση των κορυφών η οποία είναι μια μετάθεση της αρχικής.

Ναδειχθεί ότι αυτή η μετάθεση είναι ένας πλήρης κύκλος σε n στοιχεία.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Ιράν, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.](#)

22. Ναδειχθεί ότι υπάρχει φυσικός ο οποίος μπορεί να γραφτεί με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους ως

$$x_1^{2014} + \dots + x_{2015}^{2014}.$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ διακεκριμένοι φυσικοί.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Ιταλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 5.](#)

23. Έστω περιττοί θετικοί ακέραιοι m, n . Χρωματίζουμε κάθε τετράγωνο ενός $m \times n$ πίνακα είτε κόκκινο είτε μπλε. Μια σειρά ονομάζεται κόκκινα-κυριαρχημένη αν έχει περισσότερα κόκκινα τετράγωνα από μπλε. Μια στήλη ονομάζεται μπλε-κυριαρχημένη αν έχει περισσότερα μπλε τετράγωνα από κόκκινα. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό άθροισμα των κόκκινα-κυριαρχημένων σειρών και μπλε-κυριαρχημένων στηλών.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Καναδάς, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.](#)

24. Έστω θετικός ακέραιος $n \geq 4$. Σε ένα διαγωνισμό επιτραπέζιας αντισφαίρισης λαμβάνουν μέρος n άτομα με όλα τα ζεύγη να παίζουν από ακριβώς ένα αγώνα μεταξύ τους με κάθε αγώνα να έχει ένα νικητή.

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του n ώστε όπως και να έρθουν τα αποτελέσματα να μπορούμε να βρούμε μια τετράδα ατόμων (a_1, a_2, a_3, a_4) ώστε ο a_i να έχει κερδίσει τον a_j για κάθε $1 \leq i < j \leq 4$.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11 Νοτιοανατολικής Κίνας, Πρόβλημα 2.](#)

25. Έστω σύνολα θετικών ακεραίων A, B . Το άθροισμα κάθε δύο διακεκριμένων στοιχείων του A ανήκει στο B . Το πηλίκο κάθε δύο διακεκριμένων στοιχείων του B , όπου διαιρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο με το μικρότερο, είναι ένα στοιχείο του A .

Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός στοιχείων του $A \cup B$.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Ολλανδία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.](#)

26. Σε μια χώρα οι μαθηματικοί θέλουν να επιλέξουν ένα $\alpha > 2$ και να εκδώσουν νομίσματα σε ονομαστικές αξίες α^k ρουβλιών για κάθε μη αρνητικό ακέραιο α ώστε όλες οι αξίες για k θετικό ακέραιο να είναι άρρητοι.

Μπορούν να κάνουν την επιλογή με τέτοιο τρόπο ώστε οποιαδήποτε ακέραια ποσότητα ρουβλιών να μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας το πολύ 6 νομίσματα από κάθε ονομαστική αξία;

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 7.

27. Ο Πέτρος και ο Μπομπ παίζουν ένα παιχνίδι σε μια $n \times n$ σκακιέρα. Στην αρχή όλη η σκακιέρα είναι άσπρη εκτός από το γωνιακό κουτάκι στο οποίο υπάρχει ένας πύργος και είναι μαύρο. Σε κάθε γύρο κάθε παίκτης μπορεί να κουνήσει τον πύργο όπως θέλει (οριζόντια ή κάθετα όπως στο σκάκι) και βάφονται μαύρα τα κουτάκια από τα οποία περνά ο πύργος. Ο πύργος δεν μπορεί να περάσει από κουτάκια που είναι ήδη βαμμένα μαύρα. Στο τέλος χάνει αυτός που δεν μπορεί να κάνει καμία κίνηση. Ο Πέτρος ξεκινάει πρώτος.

Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 2.

28. Ορίζουμε ως ντόμινο ένα διατεταγμένο ζεύγος διακεκριμένων θετικών ακεραίων. Μια γνήσια ακολουθία από ντόμινο είναι μια λίστα από διακεκριμένα ντόμινο ώστε η πρώτη συντεταγμένη κάθε ζεύγους, εκτός από το πρώτο, ισούται με την δεύτερη συντεταγμένη του προηγούμενου ζεύγους, και επιπλέον, για κάθε $i \neq j$ τα ντόμινο (i, j) και (j, i) δεν εμφανίζονται και τα δύο στην λίστα. Έστω D_n το σύνολο όλων των ντόμινο με συντεταγμένες μικρότερες ή ίσες του n . Να βρεθεί το μέγιστο μήκος μιας γνήσιας ακολουθίας από ντόμινο που ανήκουν στο σύνολο D_n .

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.

29. Έστω θετικός ακέραιος $n \geq 2$ και έστω n σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά. Αποδείξτε ότι μπορούμε να ονομάσουμε τα σημεία ώστε το $P_1 P_2 \dots P_n$ να είναι πολύγωνο με πλευρές που δεν τέμνονται εσωτερικά. (Το πολύγωνο δεν πρέπει να είναι απαραίτητα κυρτό.)

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 4.

30. Έχουμε 2015 νομίσματα σε ένα τραπέζι. Για $i = 1, 2, \dots, 2015$ διαδοχικά, μπορούμε να αναποδογυρίσουμε ακριβώς i νομίσματα. Ναδειχθεί ότι μπορούμε πάντα να κάνουμε την διαδικασία με τέτοιο τρόπο ώστε η πάνω όψη όλων των νομισμάτων να είναι κορώνα ή όλων να είναι γράμματα αλλά δεν μπορούμε να επιτύχουμε και τα δύο.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 3.

31. Δυο πιόνια βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες. Σε κάθε βήμα επιτρέπεται να επιλέξουμε ένα από τα πιόνια και να το τοποθετήσουμε σε ένα άλλο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες με την προϋπόθεση η απόσταση μεταξύ των δύο πιονιών να μείνει σταθερή.

Μπορούμε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων να εναλλάξουμε τις θέσεις των δύο πιονιών;

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Τέταρτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3.

32. Δίνονται $3m$ μπάλες αριθμημένες ως $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, m, m, m$. Τις τοποθετούμε σε 8 κουτιά ώστε κάθε δύο κουτιά να έχουν από μία μπάλα με τον ίδιο αριθμό. Να βρεθεί το ελάχιστο m για το οποίο μπορεί να επιτευχθεί αυτό.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός επιλογής για Juniors 2014, Πρόβλημα 2.

33. Έχουμε ένα κουτί με 1007 μαύρες και 1007 άσπρες μπάλες αριθμημένες αυθαίρετα από το 1 ως το 2014. Σε κάθε βήμα παίρνουμε μία μπάλα από το κουτί και την βάζουμε σε ένα τραπέζι. Αφού το κάνουμε αυτό, αν θέλουμε, μπορούμε να πάρουμε δυο μπάλες από το τραπέζι διαφορετικού χρώματος και να τις βάλουμε σε ένα άλλο κουτί. Αν το κάνουμε αυτό τότε κερδίζουμε βαθμούς ίσους με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών των δύο μπαλών.

Πόσους πόντους μπορούμε να εγγυηθούμε πως θα κερδίσουμε στα σίγουρα μετά από 2014 βήματα;

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Τουρκία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος, Πρόβλημα 1.

34. Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων $(a_1, \dots, a_{2014})$ του $(1, 2, \dots, 2014)$ με την ιδιότητα $i + a_i \leq j + a_j$ για κάθε $1 \leq i \leq j \leq 2014$.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.

35. Ο Αντρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι: Υπάρχουν 100 μπλε μπάλες σε ένα κόκκινο κουτί και 100 κόκκινες μπάλες σε ένα μπλε κουτί. Σε κάθε του κίνηση ένας παίκτης μπορεί να κάνει μία από τις εξής κινήσεις:

- (α) Να αφαιρέσει δυο κόκκινες μπάλες από το μπλε κουτί και να τις βάλει στο κόκκινο.
- (β) Να αφαιρέσει δυο μπλε μπάλες από το κόκκινο κουτί και να τις βάλει στο μπλε.

(γ) Να αφαιρέσει δυο μπάλες διαφορετικών χρωμάτων από το ίδιο κουτί και να τις πετάξει.

Οι δυο παίκτες ξεκινώντας από τον Αντρέα κινούνται εναλλάξ. Ο παίκτης που πρώτος αφαιρεί την τελευταία κόκκινη μπάλα από το μπλε κουτί ή την τελευταία μπλε από το κόκκινο κουτί κερδίζει.

Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Διαγωνισμός Βαλτικών χωρών 2014, Πρόβλημα 8.](#)

36. Έστω θετικός ακέραιος k . Έχουμε $4k$ πούλια εκ των οποίων τα $2k$ είναι κόκκινα και τα άλλα $2k$ είναι μπλε. Αρχικά τα πούλια τοποθετούνται σε μια σειρά. Σε κάθε βήμα μπορούμε να ανταλλάξουμε ένα αριθμό συνεχόμενων κόκκινων πουλιών με τον ίδιο αριθμό από συνεχόμενα μπλε πούλια. (Π.χ. μπορούμε να μετακινηθούμε από την διάταξη $RBBBRRRB$ στην διάταξη $RRRBRBBB$. (Όπου με R συμβολίζουμε τα κόκκινα πούλια και με B τα μπλε πούλια.)

Να βρεθεί συναρτήσει του k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n , ώστε ξεκινώντας από οποιαδήποτε διάταξη να μπορούμε να καταλήξουμε στην διάταξη όπου τα πρώτα $2k$ πούλια είναι κόκκινα, κάνοντας το πολύ n κινήσεις.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Μπένελουξ, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.](#)

37. Έχουμε 16 καρέκλες στην σειρά τις οποίες θέλουμε να βάψουμε κόκκινες και πράσινες ώστε ο αριθμός συνεχόμενων καρεκλών του ίδιου χρώματος να είναι πάντα περιττός. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε;

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 6.](#)

38. Για πόσες μεταθέσεις $p_1, \dots, p_{30}$ των $1, 2, \dots, 30$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450;$$

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 7.](#)

39. Σε κάθε κελί ενός 7×5 πίνακα τοποθετούμε ένα αριθμό με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε 2×3 και σε κάθε 3×2 υποπίνακα το άθροισμα των αριθμών να είναι 0.

Ο Πέτρος μπορεί να επιλέξει κάποια κελιά και να μάθει τους αριθμούς που είναι γραμμένους σε αυτά.

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ερωτήσεων που μπορεί να κάνει ώστε να είναι σίγουρος για το άθροισμα όλων των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Τουρνουά των Πόλεων για Junior, O-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 3](#)

40. Ο Πέτρος σημαδεύει κάποια κελιά μιας 5×5 σκακιέρας. Ακολουθώς ο Βασίλης τοποθετεί γωνίες τριών κελιών στην σκακιέρα ώστε κάθε γωνία να βρίσκεται πλήρως μέσα στην σκακιέρα και να μην καλύπτουν κοινά κελιά. Στόχος του Βασίλη είναι να καλύψει όλα τα τετραγωνάκια που σημάδεψε ο Πέτρος.

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός τετραγώνων που πρέπει να σημαδέψει ο Πέτρος ώστε να μην μπορεί να κερδίσει ο Βασίλης.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Τουρνουά των Πόλεων για Junior, A-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 2](#)

41. Ο Αστυνόμος Σαΐνης έχει 36 πέτρες με βάρη $1, 2, \dots, 36$ γραμμάρια αντίστοιχα. Ο Δόκτορας Κλάου έχει μια σούπερ γόμα ώστε να μπορεί με μία σταγόνα να συνδέσει δύο από τις πέτρες. (Με δύο σταγόνες μπορεί να συνδέσει τρεις πέτρες κ.ο.κ.) Ο Δόκτορας Κλάου θέλει να συνδέσει κάποιες πέτρες ώστε ο Αστυνόμος Σαΐνης να μην μπορεί να επιλέξει κάποιες από αυτές με συνολικό βάρος 37 γραμμάρια. Εννοείται ότι ο Σαΐνης μπορεί να επιλέξει κάποιες από τις συνδεδεμένες πέτρες αλλά τότε πρέπει να πάρει όλες που έχουν συνδεθεί μεταξύ τους.

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σταγόνων που χρειάζεται ο Δόκτορας Κλάου ώστε να επιτύχει τον σκοπό του.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Τουρνουά των Πόλεων για Senior, O-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 1.](#)

42. Έχουμε n μαύρα και n άσπρα τετράγωνα ίδιων διαστάσεων στο επίπεδο. Κάθε δύο τετράγωνα διαφορετικού χρώματος έχουν κοινό σημείο. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα σημείο που ανήκει σε τουλάχιστον n τετράγωνα.

Βαθμός Δυσκολίας: 2

Πηγή: [Ολυμπιάδα Tuymaada για Seniors 2014, Πρόβλημα 6.](#)

43. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε πύργους σε μια 8×8 σκακιέρα ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχει τουλάχιστον ένα πύργο.

Βαθμός Δυσκολίας: 2?

Πηγή: [Ινδία, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής, Πρόβλημα 3.](#)

44. Έχουμε 120 σακούλια με 100 νομίσματα το κάθε ένα. Στο ένα σακούλι όλα τα νομίσματα ζυγίζουν από εννιά γραμμάρια, ενώ στα υπόλοιπα σακούλια τα νομίσματα ζυγίζουν από δέκα γραμμάρια. Επιτρέπεται να επιλέξουμε ένα αριθμό νομισμάτων (όχι απαραίτητα από το ίδιο σακούλι) και να τα

τοποθετήσουμε σε μια ζυγαριά. Η ζυγαριά θα δώσει την ακριβή απάντηση αν το συνολικό βάρος είναι λιγότερο από 1000 γραμμάρια.

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός φορών που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ζυγαριά ώστε να εντοπίσουμε το σακούλι με τα νομίσματα των εννιά γραμμαρίων.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Αργεντινή, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για την Ολυμπιάδα Cono Sur, Πρόβλημα 6.](#)

45. Δίνεται κανονικό 103-γωνο. 79 κορυφές του χρωματίζονται κόκκινες και οι υπόλοιπες χρωματίζονται μπλε. Έστω A ο αριθμός των ζευγών γειτονικών κόκκινων κορυφών και B ο αριθμός των ζευγών γειτονικών μπλε κορυφών.

(α) Να βρεθούν όλα τα πιθανά ζεύγη (A, B) .

(β) Να βρεθούν όλοι οι διαφορετικοί χρωματισμοί που δίνουν $B = 14$. Δύο χρωματισμοί θεωρούνται ίδιοι αν και μόνο αν μπορούμε να πάρουμε τον ένα από τον άλλο με χρωματισμό του πολυγώνου.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Βιετνάμ, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.](#)

46. Για τον άρτιο θετικό ακέραιο n βάζουμε όλους τους αριθμούς $1, 2, \dots, n^2$ στα κελιά μιας $n \times n$ σκακιέρας. (Με κάθε αριθμό να εμφανίζεται από μία ακριβώς φορά και κάθε κελί να περιέχει από ένα αριθμό.) Έστω S_1 το άθροισμα των αριθμών στα μαύρα τετραγωνάκια και S_2 το άθροισμα των αριθμών στα λευκά τετραγωνάκια.

Να βρεθούν όλα τα n για να είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση ώστε να έχουμε $\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}$.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Ελλάδα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.](#)

47. Δίνεται μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του $[n]$ με την ιδιότητα $|A \Delta B| \geq 2$ για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$. Ναδειχθεί ότι $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Να βρεθούν επίσης όλες οι οικογένειες $\mathcal{F}$ με το μέγιστο δυνατόν μέγεθος.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Ινδία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.](#)

48. Δίνονται 60 σημεία σε ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας 1. Ναδειχθεί ότι υπάρχει σημείο X στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του X από τα 60 σημεία να είναι το πολύ 80.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Ισπανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.](#)

49. Έστω p περιττός πρώτος. Μια p -άδα ακεραίων $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ ονομάζεται καλή αν

(α) $0 \leq a_i \leq p-1$ για κάθε i ,

(β) το $a_1 + \dots + a_p$ δεν διαιρείται με το p , και

(γ) το $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_pa_1$ διαιρείται με το p

Να υπολογιστεί ο αριθμός των καλών τριάδων.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Καναδάς, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.](#)

50. Έχουμε n μαθητές. Κάθε μαθητής γνωρίζει ακριβώς d κορίτσια και ακριβώς d αγόρια. (Η γνωριμία θεωρείται συμμετρική σχέση.) Να βρεθούν όλα τα δυνατά ζεύγη ακεραίων (n, d) για τα οποία αυτό είναι εφικτό.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2014, Πρόβλημα 3.](#)

51. Έστω θετικός ακέραιος n . Ο Δανιήλ και ο Μέρλιν παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Δανιήλ έχει k χαρτιά. Σε κάθε ένα από αυτά τα χαρτιά γράφει στην μια του μεριά κάποιους ακεραίους από το 1 ως το n και στην άλλη του μεριά γράφει τους υπόλοιπους. Ακολουθώς τοποθετεί τα χαρτιά πάνω στο τραπέζι. Ο Μέρλιν μπορεί να αναποδογυρίσει όποια από τα χαρτιά θέλει και σκοπός του είναι κάθε αριθμός από το 1 ως το n να φαίνεται σε τουλάχιστον ένα από τα χαρτιά.

Να βρεθεί το μικρότερο δυνατό k για το οποίο ο Μέρλιν έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Ολλανδία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για Μαθηματική Ολυμπιάδα Μπένελουξ 2014, Πρόβλημα 5.](#)

52. Έχουμε ένα $3 \times 3 \times 3$ κύβο ο οποίος αποτελείτε από $1 \times 1 \times 1$ κυβάκια κολλημένα μεταξύ τους. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός από κυβάκια που μπορούμε να αφαιρέσουμε ώστε για τα κυβάκια που θα παραμείνουν

(α) Η προβολή τους σε όλες τις έδρες του αρχικού κύβου να σχηματίζει ένα 3×3 τετράγωνο.

(β) Μπορούμε να συνδέσουμε κάθε δυο κυβάκια που παραμένουν με μια ακολουθία από κυβάκια που έχουν παραμείνει ώστε το πρώτο και τελευταίο κυβάκι της ακολουθίας να είναι αυτά τα δύο ενώ κάθε δύο συνεχόμενα κυβάκια να έχουν κοινή έδρα.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+

Πηγή: [Τουρνουά των Πόλεων για Junior, A-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 6](#)

53. Έστω άρτιος θετικός ακέραιος k και διακεκριμένοι πρώτοι $p_1, \dots, p_k$. Έστω $N = p_1 \cdots p_k$ και έστω a, b θετικοί ακέραιοι με $a, b \leq N$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$S_1 = \{d : d|N, a \leq d \leq b, \text{ και ο } d \text{ έχει άρτιο αριθμό πρώτων διαιρετών}\}$$

και

$S_2 = \{d|d|N, a \leq d \leq b, \text{ και ο } d \text{ έχει περιττό αριθμό πρώτων διαιρετών}\}.$

Να δειχθεί ότι $|S_1| - |S_2| \leq \binom{k}{k/2}.$

Βαθμός δυσκολίας: 2*

Πηγή: [Κίνα, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 6.](#)

54. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός μεταθέσεων του $\{1, 2, \dots, 2014\}$ ώστε για κάθε δύο στοιχεία a, b αυτού του συνόλου να υπάρχει τουλάχιστον μία μετάθεση ώστε το b να έπεται αμέσως του a .

Βαθμός δυσκολίας: 2*

Πηγή: [Ιράν, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4](#)

55. Σε μια χώρα με 36 πόλεις λειτουργούν 5 αεροπορικές εταιρίες. Μεταξύ κάθε δύο πόλεων υπάρχει ακριβώς μια εταιρεία που τις συνδέει με απευθείας πτήσεις δύο κατευθύνσεων. Αν μια εταιρεία συνδέει απευθείας τις πόλεις A και καθώς και τις B και C τότε λέμε ότι η τριάδα $\{A, B, C\}$ είναι κανονικώς συνδεδεμένη. Να βρεθεί το μεγαλύτερο k ώστε όπως και να διαμορφωθούν οι πτήσεις με βάση τα πιο πάνω κριτήρια να υπάρχουν τουλάχιστον k κανονικώς συνδεδεμένες τριάδες.

Βαθμός δυσκολίας: 2*

Πηγή: [Τουρκία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος, Πρόβλημα 6.](#)

56. Σε κάποια χώρα υπάρχουν 100 αεροδρόμια. Η εταιρεία «Super-Air» προσφέρει απευθείας πτήσεις (διπλής κατεύθυνσης) μεταξύ κάποιων αεροδρομίων. Η «κίνηση» ενός αεροδρομίου είναι ο αριθμός των άλλων αεροδρομίων προς τα οποία υπάρχει απευθείας πτήση από την «Super-Air».

Η «Concur-Air» προσφέρει απευθείας πτήση μεταξύ δύο αεροδρομίων αν και μόνο αν το άθροισμα των «κινήσεων» των δύο αεροδρομίων είναι τουλάχιστον 100.

Γνωρίζουμε ότι η «Concur-Air» μπορεί να προσφέρει ένα αεροπορικό γύρο περνώντας από όλα τα αεροδρόμια ακριβώς από μία φορά. Να δειχθεί ότι το ίδιο μπορεί να κάνει και η «Super-Air»

Βαθμός δυσκολίας: 2*

Πηγή: [Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 10.](#)

57. Σε ένα νησί υπάρχουν n κάστρα. Κάθε κάστρο ανήκει είτε στην χώρα A είτε στην χώρα B . Σε κάθε κάστρο υπάρχει ακριβώς ένας διοικητής ο οποίος κατάγεται από την χώρα στην οποία ανήκει τα κάστρα. Μεταξύ κάποιων από τα κάστρα υπάρχουν δρόμοι. (Πιθανώς να υπάρχουν και δρόμοι μεταξύ κάστρων σε διαφορετικές χώρες.) Θα λέμε ότι δυο κάστρα είναι γειτονικά αν υπάρχουν δρόμοι που τα ενώνουν απευθείας. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1) Αν κάποιοι διοικητές από την χώρα B αποφασίσουν να επιτεθούν σε κάποια κάστρα της χώρας A , ώστε κάθε διοικητής να επιτίθεται σε ακριβώς ένα γειτονικό του κάστρο, τότε υπάρχουν διοικητές στην χώρα A που μπορούν είτε να μείνουν στα κάστρα τους είτε να μετακινηθούν σε γειτονικά κάστρα ώστε σε κάθε κάστρο της χώρας A ο αριθμός των αμυνομένων διοικητών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των επιτιθεμένων διοικητών.
- (2) Για κάθε υποσύνολο X από κάστρα της χώρας A , ο αριθμός των κάστρων στην χώρα A που είτε ανήκουν στο X είτε είναι γειτονικά με κάποιο κάστρο στο σύνολο X είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των κάστρων στην χώρα B τα οποία είναι γειτονικά με κάποιο κάστρο στην χώρα X .

Βαθμός δυσκολίας: 2*

Πηγή: [Νότιος Κορέα, Τελικός Γύρος 2014, Πρόβλημα 6.](#)

58. Οι ακέραιοι $1, 2, \dots, 9$ είναι γραμμένοι στα κελιά ενός 3×3 πίνακα A . Σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα θετικό πραγματικό αριθμό x , και μία γραμμή ή μία στήλη ℓ του M , και αλλάζουμε τους αριθμούς από a, b, c που βρίσκονται γραμμένοι στην ℓ με αυτήν την σειρά, είτε σε $a + x, b - x, c - x$, είτε σε $a - x, b - x, c + x$.
- (α) Να εξεταστεί αν υπάρχει διαδικασία βημάτων που να κάνει όλα τα στοιχεία του πιο κάτω πίνακα ίσα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (β) Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να υπάρχει ένας πίνακας A όπως πιο πάνω, και μια διαδικασία βημάτων, η οποία να κάνει όλα τα στοιχεία του A ίσα με k .

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Αργεντινή, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για την Ολυμπιάδα Cono Sur, Πρόβλημα 2.](#)

59. Στον πίνακα είναι γραμμένο το πολυώνυμο $x^2 + x + 2014$. Ο Κάλβιν και ο Χομπς παίζουν εναλλάξ ξεκινώντας από τον Κάλβιν κάνοντας τις ακόλουθες κινήσεις: Σε κάθε βήμα του ο Κάλβιν επιτρέπεται να προσθέσει ή να αφαιρέσει 1 από τον συντελεστή του x . Σε κάθε βήμα του ο Χομπς επιτρέπεται να προσθέσει ή να αφαιρέσει 1 από τον σταθερό συντελεστή. Ο Κάλβιν κερδίζει αν σε οποιαδήποτε φάση το πολυώνυμο έχει ακέραιες ρίζες. Να δειχθεί ότι ο Κάλβιν έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Ινδία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.](#)

60. Έστω θετικοί ακέραιοι $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ ώστε να μην υπάρχουν τρεις από αυτούς σε αριθμητική πρόοδος. Για $k = t, t+1, \dots$ ορίζουμε ως a_{k+1} τον μικρότερο θετικό ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος του a_k και ικανοποιεί την συνθήκη ότι δεν υπάρχουν τρεις από τους $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ που να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδος. Για $x \in \mathbb{R}^+$ ορίζουμε ως $A(x)$ τον αριθμό των όρων a_i οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι του x . Να δειχθεί ότι υπάρχει $c > 1$ και $K > 0$ ώστε $A(x) \geq c\sqrt{x}$ για κάθε $x > K$.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.](#)

61. Δίνονται $n \geq 2$ διακεκριμένα σημεία στο επίπεδο. Χρωματίζουμε κόκκινα τα μέσα όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από αυτά τα σημεία. Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός διαφορετικών κόκκινων σημείων.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Μολδαβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.](#)

62. Έστω θετικός ακέραιος m και έστω A, B δύο αλφάβητα σε m και $2m$ γράμματα αντίστοιχα. Έστω επίσης θετικός άρτιος ακέραιος n με $n \geq 2m$. Έστω a_n ο αριθμός των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο A όπου όλα τα γράμματα εμφανίζονται, και κάθε γράμμα εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών. Τέλος έστω b_n ο αριθμός των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο B όπου κάθε γράμμα εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών. Να υπολογιστεί το $\frac{b_n}{a_n}$.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Πέμπτος Διαγωνισμός Επιλογής Ρουμανίας 2014, Πρόβλημα 2.](#)

63. Δίνονται n κελιά αριθμημένα από το 1 ως το n . Αρχικά σε κάθε κελί υπήρχε μία κάρτα με τον αριθμό του κελιού γραμμένο πάνω. Η Άννα όμως άλλαξε τις κάρτες και τώρα στο κελί i υπάρχει η κάρτα με τον αριθμό a_i . Σε κάθε βήμα η Βασιλική επιτρέπεται να ανταλλάξει δύο κάρτες. Αν οι κάρτες έχουν τους αριθμούς x και y τότε το κόστος της αλλαγής είναι $2|x - y|$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία βημάτων για την Βασιλική με συνολικό κόστος το πολύ

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$$

ώστε να μπορέσει να επαναφέρει κάθε κάρτα στο σωστό κελί.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 3](#)

64. Σε ένα πίνακα είναι γραμμένα τα πολυώνυμα $x^3 - 3x^2 + 5$ και $x^2 - 4x$. Σε κάθε βήμα, αν τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ είναι γραμμένα στον πίνακα, μπορούμε επιπλέον να γράψουμε ένα από τα πολυώνυμα $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), f(g(x))$ και $cf(x)$ όπου c πραγματικός αριθμός.

Μπορούμε με μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων να γράψουμε στον πίνακα ένα πολυώνυμο της μορφής $x^n - 1$ για κάποιο θετικό ακέραιο n ;

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 7.

65. Ο Ανδρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο Ανδρέας επιλέγει έναν αριθμό μεγαλύτερο του 100. Ο Βασίλης λέει έναν αριθμό μεγαλύτερο του 1. Αν ο αριθμός του Βασίλη διαιρεί τον αριθμό του Ανδρέα τότε ο Βασίλης κερδίζει. Αλλιώς ο Ανδρέας αφαιρεί από τον αριθμό του τον αριθμό του Βασίλη και συνεχίζει με αυτό τον καινούργιο αριθμό. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον Βασίλη να λέει ένα καινούργιο αριθμό κ.ο.κ. Σε κάθε βήμα ο Βασίλης απαγορεύεται να πει ένα αριθμό τον οποίο έχει ήδη πει προηγουμένως.

Να εξεταστεί αν ο Βασίλης έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.

66. Κάποιοι μπλε και κόκκινοι δίσκοι ίδιου μεγέθους χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν ένα τρίγωνο. Το άνω επίπεδο έχει έναν δίσκο ενώ κάθε άλλο επίπεδο έχει έναν δίσκο περισσότερο από το πρώτο. Κάθε δίσκος εκτός από αυτούς του τελευταίου επιπέδου αγγίζει δύο δίσκους του πιο κάτω επιπέδου και το χρώμα του είναι μπλε αν αυτοί οι δίσκοι έχουν το ίδιο χρώμα, αλλιώς είναι κόκκινος.

Υποθέτουμε ότι το τελευταίο επίπεδο έχει 2048 δίσκους εκ των οποίων οι 2014 είναι κόκκινοι. Ποιο είναι το χρώμα το δίσκου στην κορυφή;

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Σιγκαπούρη, Δεύτερος Γύρος 2014, Πρόβλημα 3.

67. Έστω $S = \{1, 2, \dots, 2014\}$. Για κάθε μη κενό υποσύνολο T του S επιλέγουμε ένα στοιχείο του T ως τον «αντιπρόσωπο» του T . Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να το κάνουμε αυτό έτσι ώστε αν το $D \subseteq S$ είναι ένωση ξένων μεταξύ τους μη κενών υποσυνόλων A, B, C του S , τότε ο αντιπρόσωπος του D είναι ένας από τους αντιπροσώπους των A, B, C .

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Διαγωνισμός Ασίας-Ειρηνικού 2014, Πρόβλημα 2.

68. Για κάποιο θετικό ακέραιο n , δύο παίκτες A και B παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Από ένα σωρό με s πέτρες, παίρνουν εναλλάξ πέτρες με τον A να αρχίζει πρώτος. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού, ο παίκτης παίρνει είτε μία πέτρα, είτε πρώτο αριθμό από πέτρες, είτε έναν αριθμό από πέτρες που είναι θετικό πολλαπλάσιο του n . Νικητής του παιχνιδιού είναι ο παίκτης ο οποίος παίρνει την τελευταία πέτρα. Αν υποθέσουμε ότι οι A και B παίζουν χωρίς να κάνουν λάθη, τότε για πόσες τιμές του s ο παίκτης A δεν μπορεί να νικήσει;

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Juniors, Πρόβλημα 4.

69. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κελιών που μπορούμε να σημειώσουμε σε

μια $n \times n$ σκακιέρα ώστε για κάθε $m > n/2$, και οι δύο διαγώνιοι κάθε $m \times m$ υποσκακιέρας περιέχουν τουλάχιστον ένα σημειωμένο κελί.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 9.

70. Έστω θετικός ακέραιος n . Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Έστω πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_d$ με $a_1 + \dots + a_d = n$ και $a_i \in [0, 1]$ για κάθε $1 \leq i \leq d$. Τότε μπορούμε να τους διαμερίσουμε σε k ομάδες (πιθανώς μερικές κενές) έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα να είναι το πολύ 1.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: IMO Shortlist Πρόβλημα C1

71. Ένας τρελός φυσικός ανακάλυψε ένα νέο είδος σωματιδίου το οποίο ονόμασε ιμόνιο μετά που μερικά εμφανίστηκαν μυστηριωδώς στο εργαστήριό του. Κάποια ζεύγη από ιμόνια μπορεί να είναι σε κατάσταση διεμπλοκής και κάθε ιμόνιο μπορεί να λάβει μέρος σε πολλές καταστάσεις διεμπλοκής. Ο φυσικός βρήκε ένα τρόπο για να εκτελεί τα ακόλουθα δύο είδη λειτουργιών με αυτά τα σωματίδια, μια όμως λειτουργία ανά φορά:

- (α) Αν κάποιο ιμόνιο είναι σε κατάσταση διεμπλοκής με περιττό αριθμό από άλλα ιμόνια στο εργαστήριο, τότε ο φυσικός μπορεί να το καταστρέψει.
- (β) Σε κάθε στιγμή μπορεί να διπλασιάσει τον αριθμό των ιμονίων στο εργαστήριο δημιουργώντας ένα αντίγραφο I' κάθε ιμονίου I . Κατά την διάρκεια αυτής της λειτουργίας δυο αντίγραφα I' και J' είναι σε κατάσταση διεμπλοκής αν και μόνο αν τα αρχικά ιμόνια I και J είναι σε κατάσταση διεμπλοκής. Κάθε αντίγραφο I' είναι σε κατάσταση διεμπλοκής με το αρχικό ιμόνιο I . Καμία άλλη κατάσταση διεμπλοκής δεν δημιουργείται ή καταστρέφεται με αυτήν την λειτουργία.

Ναδειχθεί ότι ο φυσικός μπορεί με μια ακολουθία τέτοιων λειτουργιών να καταλήξει σε μια οικογένεια ιμονίων ώστε κανένα ζεύγος να μην είναι σε κατάσταση διεμπλοκής.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: IMO Shortlist Πρόβλημα C3

72. Θεωρούμε τις αύξουσες ακέραιες ακολουθίες με στοιχεία από το $1, 2, \dots, 10^6$. Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται Αδριατική αν το πρώτο στοιχείο της είναι 1 και κάθε άλλο στοιχείο της είναι τουλάχιστον διπλάσιο από το προηγούμενο. Μια ακολουθία ονομάζεται Τυρρηνική, αν το τελευταίο στοιχείο της είναι το 10^6 και κάθε στοιχείο της είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των προηγούμενων της στοιχείων.

Να εξεταστεί αν ο αριθμός των Αδριατικών ακολουθιών είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των Τυρρηνικών ακολουθιών.

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Μεσογειακή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.](#)

73. Έστω $U = \{1, 2, \dots, 2014\}$. Για θετικούς ακέραιους a, b, c ορίζουμε με $f(a, b, c)$ τον αριθμό των διατεταγμένων εξάδων $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ και $|X_1| = a$.

(β) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ και $|X_2| = b$.

(γ) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ και $|X_3| = c$.

Ναδειχθεί ότι το $f(a, b, c)$ δεν αλλάζει αν μεταθέσουμε τα a, b, c .

Βαθμός Δυσκολίας: 3

Πηγή: [Διεθνής Διαγωνισμός Zhautykov 2014, Πρόβλημα 5.](#)

74. Σε κάθε κελί ενός $2m \times 2n$ πίνακα είναι γραμμένος ένας ακέραιος. Ορίζουμε την ακόλουθη πράξη: Επιλέγουμε τρία κελιά που σχηματίζουν σχήμα L και προσθέτουμε 1 σε κάθε ακέραιο κάθε κελιού κελιού του σχήματος L .

Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη σε σχέση με τα m, n και τους αρχικούς αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα ώστε να υπάρχει μια ακολουθία πράξεων που να κάνει όλους τους αριθμούς στον πίνακα ίσους.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Βραζιλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6](#)

75. Σε ένα κύκλο είναι γραμμένοι $n \geq 1$ πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα $n - 1$. Ναδειχθεί ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα από αυτούς και να τους αριθμήσουμε ωρολογιακά ως $x_1, x_2, \dots, x_n$ έστω ώστε για κάθε $1 \leq k \leq n$ να ισχύει ότι $x_1 + \dots + x_k \geq k - 1$

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Μολδαβία, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.](#)

76. Φέρουμε ορισμένες από τις διαγωνίους ενός κυρτού n -γώνου. Ονομάζουμε μια από αυτές τις διαγωνίους καλή αν τέμνει (εσωτερικά του πολυγώνου) ακριβώς μία άλλη από τις διαγωνίους που σχεδιάσαμε. Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός καλών διαγωνίων.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 3.](#)

77. Ο Αντρέας παίρνει μια κανονική τράπουλα με 52 χαρτιά και τα ανακατεύει. Ακολουθώς παίζει το εξής παιχνίδι: Κοιτάζει τα χαρτιά της τράπουλας και κάθε φορά που βρίσκει δύο συνεχόμενα χαρτιά με το ίδιο χρώμα τα αφαιρεί. Συνεχίζει την διαδικασία μέχρι να μην μπορεί να αφαιρέσει άλλα χαρτιά. Ο Αντρέας κερδίζει το παιχνίδι αν καταφέρει να αφαιρέσει όλα τα χαρτιά.

Αν με το αρχικό ανακάτεμα των χαρτιών όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες, να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.](#)

78. Έστω θετικός ακέραιος n . Έχουμε n κουτιά όπου κάθε κουτί περιέχει ένα μη αρνητικό ακέραιο αριθμό από μπάλες. Σε κάθε κίνηση επιτρέπεται να επιλέξουμε δυο μπάλες από ένα κουτί, να πετάξουμε μια από τις μπάλες, και να βάλουμε την άλλη μπάλα σε κάποιο άλλο κουτί.

Μια αρχική διάταξη των μπαλών ονομάζεται επιλύσιμη αν μπορούμε μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων (πιθανώς και μηδέν κινήσεων) να φτάσουμε σε μια διάταξη όπου κάθε κουτί έχει τουλάχιστον μια μπάλα.

Να βρεθούν όλες οι διατάξεις οι οποίες δεν είναι επιλύσιμες αλλά αν προσθέσουμε μια επιπρόσθετη μπάλα σε οποιοδήποτε κουτί τότε γίνεται επιλύσιμη.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2014, Πρόβλημα 5.](#)

79. Έχουμε N νομίσματα σε ένα τραπέζι εκ των οποίων τα $N - 1$ είναι αυθεντικά και το άλλο είναι κάλπικο διαφέροντας μόνο ως προς το βάρος.

Χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά η οποία συγκρίνει βάρη. Θέλουμε με αυτή να βρούμε το κάλπικο νόμισμα και επιπλέον να βρούμε αν είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα αυθεντικά.

Μπορούμε να κάνουμε οσαδήποτε ζυγίσματα θέλουμε αλλά έχουμε την επιπλέον συνθήκη ότι αν σε οποιαδήποτε φάση της διαδικασίας διαπιστώσουμε ότι κάποια νομίσματα είναι αυθεντικά τότε απαγορεύεται να τα χρησιμοποιήσουμε σε οποιεσδήποτε άλλες ζυγίσεις.

Να βρεθούν όλα τα N για τα οποία αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Ιβηροαμερικάνικη Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.](#)

80. Έστω θετικός ακέραιος n και υποσύνολο A του $\{1, \dots, n\}$. Μια A -διαμέριση του n σε k μέρη είναι μια αναπαράσταση του n ως άθροισμα $n = a_1 + \dots + a_k$, όπου τα μέρη $a_1, \dots, a_k$ ανήκουν στο A και δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά.

Ονομάζουμε μια A -διαμέριση του n σε k μέρη βέλτιστη αν δεν υπάρχει A -διαμέριση του n σε r μέρη με $r < k$.

Ναδειχθεί ότι κάθε βέλτιστη A -διαμέριση του n περιέχει το πολύ $\sqrt[3]{6n}$ διαφορετικά μέρη.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [IMO Shortlist 2013, Πρόβλημα C4.](#)

81. Δίνονται 100 θετικοί ακέραιοι. Ονομάζουμε ένα ζεύγος καλό αν το πηλίκο των δύο αριθμών ισούται με 2 ή 3. Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός καλών ζευγών που μπορούμε να έχουμε.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+

Πηγή: [Διεθνής Διαγωνισμός Zhautykov 2014, Πρόβλημα 3.](#)

82. Έστω θετικός ακέραιος $N > 2$. Ο Αντρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι: Αρχικά υπάρχουν N νομίσματα σε ένα τραπέζι. Ο Αντρέας παίζει πρώτος και αφαιρεί k νομίσματα από το τραπέζι όπου $1 \leq k < N$. Μετά ο Βασίλης αφαιρεί m νομίσματα όπου $1 \leq m \leq 2k$ κ.ο.κ, δηλαδή κάθε παίκτης στην σειρά του αφαιρεί τουλάχιστον ένα και το πολύ διπλάσιο αριθμό νομισμάτων από ότι αφαίρεσε ο προηγούμενος παίκτης. Ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο νόμισμα κερδίζει.

Για κάθε τιμή του N , να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης και να περιγραφεί η στρατηγική του.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [Βραζιλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.](#)

83. Έστω θετικός ακέραιος n και έστω μια $2n \times 2n$ σκακιέρα. Τοποθετούμε $1 \times n$ και $n \times 1$ κομμάτια στην σκακιέρα χωρίς οποιεσδήποτε επικαλύψεις. Μια τέτοια διαρρύθμιση ονομάζεται μέγιστη, αν δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε άλλο τέτοιο κομμάτι στην σκακιέρα χωρίς να επικαλύπτει τα προηγούμενα.

Να βρεθεί το ελάχιστο k έτσι ώστε να υπάρχει μέγιστη διαρρύθμιση που να χρησιμοποιεί k κομμάτια.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [Βραζιλία, Διαγωνισμός Ολυμπιακής Εκδίκησης 2014, Πρόβλημα 3.](#)

84. Έστω άρτιος ακέραιος n και έστω γράφημα G με n κορυφές και ακριβώς $n^2/4$ ακμές. Ονομάζουμε ένα ζεύγος διακεκριμένων κορυφών $\{u, v\}$ φιλικό αν υπάρχει κορυφή z ώστε οι uz, vz να είναι ακμές του G .

Ναδειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2\binom{n/2}{2}$ φιλικά ζεύγη.

Πηγή: [Ηνωμένες Πολιτείες, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3](#)

85. Έστω $n \geq 0$ και ένας $(2n+1) \times (2n+1)$ πίνακας τα κελιά του οποίου χρωματίζονται άσπρα ή μαύρα. Ονομάζουμε ένα κελί ξεχωριστό αν στην σειρά του υπάρχουν τουλάχιστον άλλα n κελιά του ιδίου χρώματος και στην στήλη του υπάρχουν τουλάχιστον άλλα n κελιά του ιδίου χρώματος.

(α) Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2n+1$ ξεχωριστά κελιά.

(β) Να βρείτε κατασκευή όπου υπάρχουν το πολύ $4n$ ξεχωριστά κελιά.

(γ) Να βρείτε συναρτήση του n τον ελάχιστο αριθμό ξεχωριστών κελιών.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [Ιταλία Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.](#)

86. Υπάρχουν 30 μαθητές, έτσι ώστε κάθε ένας από αυτούς έχει το πολύ 5 φίλους και για κάθε πεντάδα μαθητών υπάρχουν δυο μαθητές που δεν είναι φίλοι. Βρείτε το μέγιστο k , έτσι ώστε για κάθε πιθανό σχηματισμό, υπάρχουν k μαθητές που δεν είναι φίλοι μεταξύ τους.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015, Πρόβλημα 5.

87. Σε μια χώρα με n πόλεις, υπάρχει σιδηρόδρομος που ενώνει κάθε δύο πόλεις μεταξύ τους και προς τις δύο κατευθύνσεις. Οι τιμές των εισιτηρίων είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους με μόνες εξαιρέσεις ότι για κάθε δυο πόλεις A και B η τιμή του εισιτηρίου από την A στην B είναι ίδια με την τιμή του εισιτηρίου από την B στην A .

Ναδειχθεί ότι ένας ταξιδιώτης μπορεί να επιλέξει την αρχική του πόλη και να κάνει $n-1$ διαδοχικά ταξίδια με τρένο με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε εισιτήριο να είναι φθηνότερο του προηγούμενου.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 8.

88. Θετικοί ακέραιοι $x_1, x_2, \dots, x_n$ (με $n \geq 4$) επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $1 \leq i \leq n$ να είναι

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i$$

όπου k_i ακέραιος και $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$. Ναδειχθεί ότι

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n < 3n.$$

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: Ταϊβάν, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Quiz 3, Πρόβλημα 1

89. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν ένα παιχνίδι σε ένα πλήρες γράφημα G με 2014 κορυφές. Παίζουν εναλλάξ με την Αλίκη να ξεκινά. Σε κάθε κίνηση η Αλίκη κατευθύνει μια μη κατευθυνόμενη ακμή του G ενώ ο Βασίλης επιλέγει ένα $m \in [1000]$ και κατευθύνει m μη κατευθυνόμενες ακμές του G . Το παιχνίδι τελειώνει όταν όλες οι ακμές κατευθυνθούν.

Η Αλίκη κερδίζει αν υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος, αλλιώς κερδίζει ο Βασίλης. Να εξεταστεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για Junior, Πρόβλημα 8.

90. Έστω θετικός ακέραιος $k > 2$. Δυο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: Αρχικά ένας ακέραιος $n \geq k$ είναι γραμμένος στον πίνακα. Ξεκινώντας από τον A οι δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε του κίνηση ένας παίκτης σβήνει τον αριθμό m που είναι γραμμένος εκείνη την στιγμή στον πίνακα και τον αντικαθιστά με τον αριθμό m' για κάποιο $k \leq m' < m$ με $(m, m') = 1$. Ο πρώτος παίκτης που δεν μπορεί να κινηθεί χάνει.

Αν αρχικά στον πίνακα είναι γραμμένος ο n τότε ονομάζουμε τον n καλό αν ο B έχει στρατηγική νίκης και κακό αν όχι.

Έστω δυο ακέραιοι $n, n' \geq k$ με την ιδιότητα αν $p \leq k$ πρώτος τότε $p|n$ αν και μόνο αν $p|n'$. Ναδειχθεί ότι είτε οι n, n' είναι και οι δύο καλοί είτε και οι δύο κακοί.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [IMO Shortlist Πρόβλημα N5](#)

91. Έστω $n \geq 3$ και έστω μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Μια επιτρεπτή κίνηση είναι η επιλογή δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων A, B της $\mathcal{F}$ και η πρόσθεση στο $\mathcal{F}$ του συνόλου $A \cup B$ (χωρίς την αφαίρεση των A και B).

Αρχικά η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα του S . Ο στόχος είναι να περιέχει όλα σύνολα με $n - 1$ στοιχεία του S .

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός επιτρεπτών κινήσεων ώστε να επιτευχθεί ο στόχος.

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [Διαγωνισμός Cono Sur 2014, Πρόβλημα 6.](#)

92. Μια πόλη έχει 2014 κατοίκους, έσω τους $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$. Σε κάθε δεδομένη στιγμή, κάθε ένας από αυτούς είναι είτε ευτυχισμένος, είτε δυστυχισμένος. Κάθε άτομο αλλάζει από ευτυχισμένος σε δυστυχισμένος ή από δυστυχισμένος σε ευτυχισμένο αν κάποιος ευτυχισμένος του χαμογελάσει. Την Δευτέρα το πρωί είχαμε N ευτυχισμένα άτομα.

Κατά την διάρκεια της Δευτέρας ο A_1 χαμογέλασε του A_2 , μετά ο A_2 του A_3 , κ.τ.λ. και τελικά ο A_{2013} του A_{2014} . Εκτός από αυτά κανένας άλλος δεν χαμογέλασε σε κάποιον άλλο. Ακριβώς το ίδιο συνέβηκε και την Τρίτη, την Τετάρτη και την Πέμπτη. Την Πέμπτη το βράδυ είχαμε ακριβώς 2000 ευτυχισμένα άτομα.

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του N .

Βαθμός Δυσκολίας: 4

Πηγή: [Μεσοευρωπαϊκή Ομαδική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.](#)

93. Τα μέλη μιας κοινωνίας έχουν χωριστεί σε ορισμένες ομάδες, οι οποίες αλλάζουν με έναν ιδιαίτερο τρόπο κάθε Σαββατοκύριακο: Σε κάθε ομάδα, ένα από τα μέλη ορίζεται ως το καλύτερο μέλος, και τα καλύτερα μέλη όλων των ομάδων φεύγουν από την προηγούμενή τους ομάδα και σχηματίζουν μια νέα ομάδα. Αν μια ομάδα έχει μόνο ένα μέλος, το μέλος αυτό πηγαίνει στη νέα ομάδα και η προηγούμενη ομάδα διαγράφεται. Αρχικά η κοινωνία έχει n μέλη με όλα τα μέλη της να ανήκουν στην ίδια ομάδα.

Αποδείξτε ότι θα έρθει μια εβδομάδα, μετά την οποία ο αριθμός των μελών κάθε ομάδας θα είναι το πολύ $1 + \sqrt{2n}$.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

Πηγή: [Ιράν, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος, Πρόβλημα 6.](#)

94. Έστω θετικός ακέραιος $n \geq 2$. Γεμίζουμε τα κελιά ενός $n \times n$ πίνακα χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1, 2, \dots, n^2$ από μία φορά τον κάθε ένα. Δύο κελιά ονομάζονται γειτονικά αν έχουν κοινή πλευρά. Γνωρίζουμε ότι για κάθε δυο γειτονικά κελιά οι αριθμοί που περιέχουν διαφέρουν τουλάχιστον κατά n . Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας 2×2 πίνακας γειτονικών κελιών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στις δυο διαγωνίους αυτού του πίνακα να είναι το ίδιο.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

Πηγή: Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 6.

95. Να βρεθεί η μικρότερη σταθερά c ώστε για κάθε γράφημα $G = G(V, E)$ με $|E| \geq c|V|$, το G να περιέχει δύο ξένους μεταξύ τους κύκλους με τουλάχιστον ένα κύκλο να περιέχει τουλάχιστον μία χορδή.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

Πηγή: Κίνα, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

96. Σε κάθε τετραγωνάκι ενός 2014×2014 πίνακα τοποθετούμε μια λάμπα. Σε μια αρχική κατανομή, κάποιες από τις λάμπες είναι αναμμένες και κάποιες σβηστές. Μια κίνηση αποτελείται από μια επιλογή γραμμής ή στήλης η οποία περιέχει τουλάχιστον 1007 αναμμένες λάμπες και την αλλαγή όλων των 2014 λαμπών αυτήν της γραμμής/στήλης από αναμμένες σε σβηστές και ανάποδα.

Να βρεθεί ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος k έτσι ώστε από οποιαδήποτε αρχική κατανομή να υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός κινήσεων που καταλήγει σε μια κατανομή με το πολύ k αναμμένες λάμπες.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

Πηγή: Ολλανδία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

97. Έχουμε n χαρτιά. Για κάθε δύο χαρτιά ξέρουμε ποιο κερδίζει το άλλο. Μπορεί να συμβεί ότι υπάρχουν τρία χαρτιά A, B, C ώστε το A να κερδίζει το B , το B να κερδίζει το C , αλλά το C να κερδίζει το A .

Αρχικά τα χαρτιά μοιράζονται στους δυο παίκτες με αυθαίρετο τρόπο. Σε κάθε κίνηση οι δυο παίκτες παίρνουν το πρώτο χαρτί από την στοίβα τους και τα συγκρίνουν. Αυτός που έχει το χαρτί που κερδίζει παίρνει τα δύο χαρτιά και τα τοποθετεί τελευταία στην στοίβα του με όποια σειρά θέλει.

Να δειχθεί ότι υπάρχει τρόπος ώστε μετά από ορισμένο αριθμό κινήσεων ένας παίκτης να πάρει όλα τα χαρτιά.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 8.

98. Σε μια χώρα κάποια ζεύγη πόλεων ενώνονται με απευθείας πτήσεις (διπλής κατεύθυνσης). Μπορούμε από κάθε πόλη να πάμε σε κάθε άλλη πόλη με μια ακολουθία τέτοιων πτήσεων. Ορίζουμε την απόσταση δύο πόλεων ως τον ελάχιστο αριθμό πτήσεων που χρειάζονται για να πάμε από την μια πόλη στην άλλη. Γνωρίζουμε ότι για κάθε πόλη υπάρχουν το πολύ 100 πόλεις σε

απόσταση ακριβώς 3 από αυτή. Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει καμία πόλη ώστε περισσότερες από 2550 πόλεις να έχουν απόσταση ακριβώς 4 από αυτή.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+

IMO Shortlist 2013, Πρόβλημα C6.

99. Έστω θετικοί ακέραιοι k, n . Λέμε ότι ο k είναι n -διακριτός αν υπάρχει ένα σύνολο A από k διαφορετικούς θετικούς ακεραίους, όλους μικρότερους του n , ώστε για κάθε δυο διαφορετικά υποσύνολα U, V του A , το άθροισμα των στοιχείων του U να είναι διάφορο του αθροίσματος των στοιχείων του V .

(α) Ναδειχθεί ότι το 8 είναι 100-διακριτός.

(β) Ναδειχθεί ότι το 9 δεν είναι 100-διακριτός.

Βαθμός Δυσκολίας: 5

Πηγή: Διαγωνισμός Ασίας-Ειρηνικού 2014, Πρόβλημα 4.

100. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο από θετικούς αριθμούς και

$$B = \left\{ \frac{a+b}{c+d} : a, b, c, d \in A \right\}.$$

Ναδείξτε ότι $|B| \geq 2|A|^2 - 1$.

Βαθμός Δυσκολίας: 5

Πηγή: Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.

Λύσεις, νύξεις και σχόλια

- (1) Υπάρχουν $\binom{n}{3}$ τρίγωνα με τις κορυφές αν είναι κορυφές του πολυγώνου. Από αυτά τα $n(n-4)$ έχουν ακριβώς μια κοινή πλευρά με το πολύγωνο ενώ άλλα n έχουν ακριβώς δύο κοινές πλευρές με το πολύγωνο. Άρα η τελική απάντηση είναι

$$\binom{n}{3} - n(n-3) = \frac{n[(n-1)(n-2) - 6(n-3)]}{6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

- (2) Όχι. Επειδή κάθε άθροισμα είναι τουλάχιστον 3, αν είναι πρώτος πρέπει να είναι και περιττός. Άρα σε κάθε δύο γειτονικά κελιά ο ένας αριθμός πρέπει να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Όμως επειδή έχουμε 5 περιττούς και 4 άρτιους, το κεντρικό κελί πρέπει να είναι περιττός ενώ οι γειτονικοί του αριθμοί πρέπει να είναι οι 2, 4, 6, 8. Για κάθε περιττό όμως υπάρχει τουλάχιστον ένας από τους 4, 6, 8 που το άθροισμά του θα δώσει πολλαπλάσιο του 3 και άρα μη πρώτο.
- (3) Τα (α) και (β) δεν γίνονται: Αγνοώντας το 0 μπορούμε να χωρίσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς σε τρεις τριάδες διαδοχικών αριθμών. Αν γινόταν το (α) ή το (β), τότε το συνολικό άθροισμα των αριθμών σε αυτές τις τριάδες θα ήταν το πολύ 42. Όμως το συνολικό άθροισμα είναι $9 \cdot 10/2 = 45$, άτοπο.

Το (γ) γίνεται π.χ. αν βάλουμε τους αριθμούς κυκλικά με την σειρά 0, 9, 5, 1, 8, 4, 3, 7, 2, 6.

- (4) Αλλάζοντας το χρώμα των 1 και 2 αν χρειαστεί, κάνουμε τον 1 πράσινο. Ακολούθως αλλάζοντας το χρώμα των 2 και 4 αν χρειαστεί, κάνουμε τον 2 πράσινο. Πιο γενικά, για $1 \leq n \leq 2013$, στο n -οστό βήμα, αν ο n δεν είναι πράσινος, τότε αλλάζουμε το χρώμα των n και $2n$. Στο τέλος θα κάνουμε όλους τους αριθμούς από το 1 ως το 2013 πράσινους.

Αν ο 2014 είναι πράσινος τελειώσαμε. Αν όχι τότε μπορούμε να τον κάνουμε πράσινο αλλάζοντας όμως των 1012 σε κόκκινο. Τον τελευταίο μπορούμε να τον κάνουμε πράσινο αλλάζοντας μαζί και το χρώμα του 3036. Οπότε τελειώσαμε.

Θα δείξουμε όμως και κάτι πιο ισχυρό: Για κάθε φυσικό N μπορούμε να κάνουμε όλους τους αριθμούς όποιο χρώμα θέλουμε αρκεί να ζητήσουμε να γίνουν άρτιες αλλαγές σε χρώματα.

Θεωρούμε το γράφημα στο $\{1, 2, \dots, N\}$ όπου ενώνουμε τις κορυφές m, n αν και μόνο αν επιτρέπεται να αλλάξουμε τα χρώμα και των δύο. Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι για κάθε n υπάρχει μονοπάτι από το n στο 1 και άρα το γράφημα είναι συνεκτικό. Επομένως μπορούμε να πάρουμε ένα καλύπτον δέντρο T . Πέρνουμε ένα φύλλο v του T κάνουμε το v το χρώμα που θέλουμε αλλάζοντας και το χρώμα του γείτονα του v στο T . Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία επαγωγικά στο $T - v$ μέχρι να μείνει μόνο μία ακμή. Μέχρι στιγμής έχουμε κάνει άρτιο αριθμό αλλαγών σε χρώματα. Οπότε είτε και οι δύο κορυφές που έμειναν έχουν το χρώμα που θέλουμε και δεν κάνουμε τίποτα άλλο, είτε και οι δύο κορυφές που έμειναν έχουν λανθασμένο χρώμα οπότε τις αλλάζουμε και τις δύο.

- (5) Ένα πράσινο και ένα μπλε σε κάθε σειρά γίνεται με ακριβώς $n^n(n-1)^n$ τρόπους.

Ένα πράσινο σε κάθε σειρά γίνεται με n^n τρόπους. Αν τώρα μείνουν ελεύθερα $c_1, \dots, c_n$ τετραγωνάκια σε κάθε στήλη, τότε $c_1 + \dots + c_n = n^2 - n$ και μπορούμε να βάλουμε ένα μπλε σε κάθε στήλη με

$$c_1 \cdots c_n \leq \left(\frac{c_1 + \dots + c_n}{n} \right)^n = (n-1)^n$$

με ισότητα αν και μόνο αν $c_1 = \dots = c_n = n-1$.

Επειδή υπάρχουν τοποθετήσεις των πράσινων που δεν δίνουν $c_1 = \dots = c_n = n-1$ τότε έχουμε περισσότερους χρωματισμούς με ακριβώς ένα πράσινο και ένα μπλε σε κάθε σειρά.

- (6) Αν δεν υπάρχει κανένα πολλαπλάσιο του 3 τότε η συνθήκη μας λέει πως mod 3 οι αριθμοί είναι εναλλάξ 1 και 2. Αυτό είναι αδύνατον αφού έχουμε περιττό πλήθος αριθμών.

(7) Οι τέλειοι κύβοι $\bmod 7$ ισούνται με $0, \pm 1 \bmod 7$. Οι τέλειοι κύβοι $\bmod 13$ ισούνται με $0, \pm 1, \pm 5 \bmod 13$. Υπάρχουν λοιπόν $3 \times 5 = 15$ ζεύγη υπολοίπων $\bmod 7$ και $\bmod 13$. Οπότε από αρχή περιστερώννα υπάρχουν δύο τέλειοι κύβοι με το ίδιο υπόλοιπο $\bmod 7$ και $\bmod 13$. Άρα η διαφορά αυτών των δύο κύβων διαιρείται με το $7 \times 13 = 91$.

(9) Το γινόμενο των αριθμών παραμένει αναλλοίωτο και ισούται με $2014!$. Οπότε από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, το άθροισμα είναι τουλάχιστον $2014 \sqrt[2014]{2014!}$. Για να ισχύει η ισότητα θα έπρεπε όλοι οι αριθμοί να είναι ίσοι με $\sqrt[2014]{2014!}$ ο οποίος όμως δεν είναι ακέραιος.

Διαφορετικά, μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα των αριθμών αυξάνει, οπότε είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του $1 + 2 + \dots + 2014$ το οποίο με την σειρά του είναι μεγαλύτερο από το ζητούμενο.

(10) Στο n -οστό βήμα η κεντρική στήλη του σταυρού έχει $2n - 1$ τετραγωνάκια. Οπότε στο $(n + 1)$ -οστό βήμα προσθέτουμε $2(2n - 1) + 2 = 4n$ τετραγωνάκια. ($2n - 1$ στα αριστερά κάθε γραμμής, $2n - 1$ στα δεξιά, και ακόμη 2, ένα πάνω και ένα κάτω από την κεντρική στήλη.)

Συνολικά λοιπόν στο $(n + 1)$ -οστό βήμα έχουμε

$$1 + \sum_{k=1}^n 4k = 1 + 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n + 1$$

τετραγωνάκια. Επειδή

$$2 \cdot 31^2 + 2 \cdot 31 + 1 = 1985 < 2014 < 2113 = 2 \cdot 32^2 + 2 \cdot 32 + 1$$

τότε το τελευταίο στάδιο όπου έχουμε λιγότερα από 2014 τετραγωνάκια είναι το 32ο.

(11) Ναι. Έστω πιο γενικά ότι έχουμε N άτομα.

Αν N άρτιος τότε αρχικά πάνε οι 1, 2, 3 και επιστρέφουν οι 1, 3 οπότε απέναντι έχουμε μόνο τον 2. Ακολουθώς πάνε οι 3, 4 και επιστρέφουν οι 2, 3 κ.ο.κ. Στο τέλος θα έχουμε στείλει απέναντι τον N .

Αν N περιττός τότε στο πρώτο βήμα πάνε οι 1, 2, 3 και επιστρέφουν οι 1, 2. Ακολουθώς επαναλαμβάνουμε όπως προηγουμένως.

(12) Για κάθε $n \geq 1$ παίρνουμε ακριβώς $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots$ ζεύγη χαρτιών όπου στο ένα χαρτί είναι γραμμένος ο αριθμός n και στο άλλο ο αριθμός $n + 1$.

(13) Δείξτε ότι αν ο m δεν είναι καλός τότε $a_{mn} > n$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

(14) Αν όλο το ρύζι βρίσκεται σε ένα καλάθι, τότε σε κάθε βήμα αυξάνουμε τον αριθμό των καλάθιων που περιέχουν ρύζι το πολύ κατά 1 οπότε θέλουμε σίγουρα τουλάχιστον 99 βήματα. Για να δείξετε ότι μπορούμε να τα καταφέρουμε σε τόσα βήματα πάρτε το καλάθι με τον μέγιστο αριθμό αυγών και το καλάθι με το πιο πολύ ρύζι και φτιάξτε ένα κανονικό καλάθι. [Αν το ίδιο

καλάθι έχει τα πιο πολλά αυγά και το πιο πολύ ρύζι απλά πάρτε αυτό το καλάθι μαζί με ένα οποιοδήποτε άλλο καλάθι.]

- (15) Αν βάλουμε τις μπάλες ανά 19-άδες όπου σε κάθε 19-άδα έχουμε μπάλες του ιδίου χρώματος, τότε θέλουμε $n \geq 19 \cdot 51 + 2 = 971$.

Για $n = 971$ μπορούμε όντως να βρούμε n συνεχόμενες μπάλες με 53 διαφορετικά χρώματα. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε n -άδα. Από περιστερώνα εμφανίζονται τουλάχιστον 52 χρώματα. Αν εμφανίζονται 53 τότε τελειώσαμε. Αν όχι τότε διαδοχικά αφαιρούμε από μια μπάλα από αριστερά και προσθέτουμε μια μπάλα δεξιά της n -άδας μέχρι να εμφανιστεί ένα καινούργιο χρώμα. Στις υπόλοιπες 970 μπάλες, πάλι από περιστερώνα, εμφανίζονται τουλάχιστον 52 χρώματα, οπότε έχουμε συνολικά τουλάχιστον 53 σε αυτήν την n -άδα.

- (16) Δείτε π.χ. [εδώ](#).

- (17) Παρατηρούμε ότι τα $f(1), f(3), f(6)$ και $f(8)$ πρέπει να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Οπότε $|S| \geq 4$. Μπορούμε να επιτύχουμε $|S| = 4$ αν πάρουμε $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και ορίσουμε το $f(x)$ να ισούται με $x \bmod 4$.

- (18) Ναι μπορεί. Ας ονομάσουμε της πίτες με την εξής σειρά:

$$A_1, \dots, A_7, B_7, \dots, B_1, C$$

όπου A_i οι κρεατόπιτες και B_i οι λαχανόπιτες. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αρχικά έφαγε μια πίτα με λάχανο. Μετά κινείται ωρολογιακά και τρώει την τέταρτη πίτα που βρίσκει. Θα είναι μια από τις $B_3, B_2, B_1, C, A_1, A_2, A_3$. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι πάλι έφαγε μια πίτα με λάχανο. Κινείται πάλι ωρολογιακά και τρώει την δεύτερη πίτα που βρίσκει. Θα είναι μια από τις B_1, C, A_1 . Στο επόμενο βήμα αν χρειαστεί μπορεί να φάει την κερασόπιτα.

- (19) Έστω ένα σημείο X και έστω ένα κανονικό τετράεδρο $ABCD$ με κέντρο εγγεγραμμένης σφαίρας το X . Έστω A', B', C' και D' τα κέντρα των εγγεγραμμένων σφαιρών των τετραέδρων $BCDX, ACDX, ABDX$ και $ABCX$ αντίστοιχα. Τότε το X είναι κέντρο της εγγεγραμμένης σφαίρας του $A'B'C'D'$. Οι εξισώσεις από αυτά τα έξι τετράεδρα μας δίνουν ότι $f(X)^7 = f(X)$ οπότε $f(X) = 1$.

- (20) Ουσιαστικά ζητούμε το μέγιστο k ώστε για κάθε γράφημα G με k κορυφές να ισχύει ότι $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n$.

Ισχύει ότι $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq k + 1$ το οποίο μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά. Αυτό είναι το καλύτερο δυνατό όπως φαίνεται π.χ. από το $G = K_k$.

Πιο ενδιαφέρον είναι να δειχθεί ότι $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{k}$. [Για να το αποδείξετε, δείξτε ότι $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq k$. Η ισότητα ισχύει για άπειρα k .]

Σχόλιο: Ακριβώς το ίδιο πρόβλημα αλλά με διαφορετική διατύπωση έχει τεθεί και στον διαγωνισμό Baltic Way του 2013. (Ήταν το πρόβλημα 8.)

(21) Ισοδύναμα αρκεί ναδειχθεί ότι

$$\sum_{r=0}^m \binom{k+r-1}{k-1} \binom{m+n-k-r}{m-r} = \binom{m+n}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος

$$\binom{k+r-1}{k-1} \binom{m+n-k-r}{m-r}$$

μετρά τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε n άτομο από μια ομάδα $m+n$ ατόμων αν το k άτομο βρίσκεται στην θέση $k+r$.

(22) Με επαγωγή στο n . Έστω $e = ij$ η τελευταία ακμή. Αν την αφαιρέσουμε θα πάρουμε δύο δέντρα. Το πρώτο σε ένα υποσύνολο A του $[n]$ με $i \in A$ και το δεύτερο σε ένα υποσύνολο B του $[n]$ με $j \in B$. Επιπλέον έχουμε $A \cup B = [n]$ και $A \cap B = \emptyset$.

Από την επαγωγική υπόθεση η μετάθεση στις κορυφές του πρώτου δέντρου είναι της μορφής $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $a_1 = i$. Ομοίως η μετάθεση στις κορυφές του δεύτερου δέντρου είναι της μορφής $(b_1 b_2 \cdots b_\ell)$ όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $b_\ell = j$.

Τότε όμως, όταν κάνουμε την εναλλαγή και για την ακμή e η μετάθεση γίνεται

$$(ij)(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_\ell) = (a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_\ell).$$

(23) Ας υποθέσουμε πως δεν γίνεται. Τότε κάθε υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, N\}$ μεγέθους 2015 δίνει και διαφορετικό άθροισμα. Άρα υπάρχουν $\binom{N}{2015}$ τέτοια αθροίσματα. Το μεγαλύτερο τέτοιο άθροισμα είναι το πολύ $(2015)N^{2014}$. Οπότε πρέπει

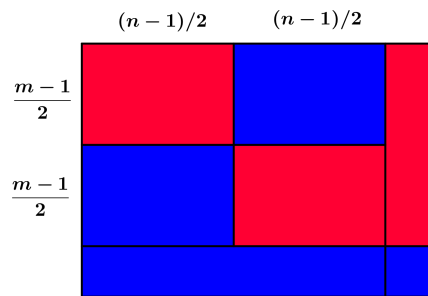
$$(2015)N^{2014} \geq \binom{N}{2015} > \frac{(N-2015)^{2015}}{2015!} > \frac{(N/2)^{2015}}{2015!}$$

για $N/2 > 2015$. Αυτό όμως είναι άτοπο για $N > 2^{2015} \cdot 2015 \cdot (2015)!$.

(24) Αν $m = 1$ ή $n = 1$ μπορούμε εύκολα να πετύχουμε $m+n-1$ που είναι και το καλύτερο δυνατό (απλό). Για $m, n > 1$ το πιο κάτω σχήμα πετυχαίνει $m+n-2$. Αν μπορούσε να βελτιωθεί αυτό θα έπρεπε χωρίς βλάβη της γενικότητας να είχαμε m κόκκινα-κυριαρχημένες σειρές και $n-1$ μπλε-κυριαρχημένες στήλες. Τότε όμως θα είχαμε τουλάχιστον

$$m \frac{n+1}{2} + (n-1) \frac{m+1}{2} = mn + \frac{n-1}{2} > mn$$

τετράγωνο, άτοπο.



- (25) Αν έχουμε 8 άτομα τότε υπάρχει ένα άτομο, έστω ο a_1 ο οποίος κέρδισε τουλάχιστον τέσσερα άτομα. Από αυτούς τους τέσσερις υπάρχει τουλάχιστον ένας, έστω ο a_2 , ο οποίος κέρδισε τουλάχιστον δύο από τους υπόλοιπους τρεις. Από αυτούς τους δύο που έχασαν και από τον a_1 και από τον a_2 έστω ο a_3 ο νικητής του μεταξύ τους αγώνα και a_4 ο ηττημένος. Τότε η τετράδα (a_1, a_2, a_3, a_4) έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

Αν $n = 7$ τότε υπάρχουν αποτελέσματα όπου δεν μπορούμε να βρούμε τέτοια τετράδα. Π.χ. αν ονομάσουμε τους παίκτες με τους αριθμούς $1, 2, \dots, 7$ με τα εξής αποτελέσματα: Ο 1 κερδίζει τους 2, 3, 4, ο 2 τους 3, 5, 6, ο 3 τους 4, 5, 7, ο 4 τους 2, 6, 7, ο 5 τους 1, 4, 6, ο 6 τους 1, 3, 7 και ο 7 τους 1, 2, 5.

- (26) Αν $a, b, c \in A$ με $a < b < c$ τότε $b + c, a + c \in B$ και άρα (αφού $b + c > a + c$) $(b + c)/(a + c) \in A$. Όμως $1 < (b + c)/(a + c) < 2$, άτοπο. Άρα $|A| \leq 2$ και άρα $|B| \leq 3$ αφού αν $x, y, z, w \in B$ με $x < y < z < w$, τότε τα $w/z, w/y, w/x$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του A , άτοπο.

Επομένως $|A \cup B| \leq 5$. Μπορούμε να επιτύχουμε $|A \cup B| = 5$ αν πάρουμε $A = \{2, 4\}, B = \{6, 12, 24\}$.

- (27) Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι πρέπει $\alpha + \alpha^2 = 7$. Δείξτε επαγωγικά ότι αυτό το α δουλεύει.
- (28) Δείξτε ότι ο Πέτρος κερδίζει κινούμενος πάντα κάθετα και από την μια πλευρά της σκακιέρας στην άλλη. Δείτε και [εδώ](#).

- (29) Ουσιαστικά ψάχνουμε την μεγαλύτερη διαδρομή στο K_n με διακεκριμένες ακμές (αλλά επιτρέπεται να επαναλάβουμε κορυφές). Για n περιττό, κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό και άρα υπάρχει μονοπάτι Euler που περνά από όλες τις ακμές και άρα έχει μήκος $\binom{n}{2}$. Αν n άρτιος, τότε κάθε διαδρομή περνά από κάθε κορυφή εκτός της αρχικής και της τελικής άρτιο αριθμό φορές. Οπότε από την αρχική και τελική ακμή περνά το πολύ $n - 1$ φορές και από όλες τις άλλες ακμές το πολύ $n - 2$ φορές. Οπότε συνολικά έχει μήκος το πολύ $\binom{n}{2} - (n - 2)/2$. Μονοπάτι τέτοιου μήκους μπορεί να επιτευχθεί: Έστω $n = 2m$. Αφαιρούμε από το K_{2m} τις $m - 1 = (n - 2)/2$ ακμές της μορφής $(2i, 2i + 1)$ για $1 \leq i \leq m - 1$. Τότε το γράφημα παραμένει συνεκτικό και κάθε κορυφή εκτός από την 1 και την $2m$ έχει άρτιο βαθμό και άρα μπορούμε να βρούμε μονοπάτι Euler.

Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα και χωρίς την θεωρία γραφημάτων. Για $n = 2m + 1$ ορίζουμε ως $P(n)$ την πρόταση «Υπάρχει γνήσια ακολουθία από ντόμινο από το σύνολο D_n που ξεκινά από το $(1, 2)$ τελειώνει με το $(n, 1)$ και για κάθε $1 \leq i < j \leq n$ χρησιμοποιεί είτε το ντόμινο (i, j) είτε το ντόμινο (j, i) .» Για $n = 2m$ ορίζουμε ως $P(n)$ την πρόταση «Υπάρχει γνήσια ακολουθία από ντόμινο από το σύνολο D_n που ξεκινά από το $(1, 2)$ τελειώνει με το $(1, n)$ και για κάθε $1 \leq i < j \leq n$ χρησιμοποιεί είτε το ντόμινο (i, j) είτε το ντόμινο (j, i) εκτός και αν $i = 2k, j = 2k + 1$ για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ οπότε και δεν χρησιμοποιεί ούτε το (i, j) ούτε το (j, i) .» Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί επαγωγικά ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό n .

- (8) Παίρνουμε το πολύγωνο με την ελάχιστη περίμετρο, έστω το $P_1 P_2 \cdots P_n P_1$. Αυτό το πολύγωνο δεν μπορεί να έχει δυο πλευρές που τέμνονται εσωτερικά.

Πράγματι έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι $P_1 P_2, P_i P_{i+1}$ τέμνονται εσωτερικά στο σημείο . Τις αφαιρούμε και τις αντικαθιστούμε με τις πλευρές $P_1 P_i$ και $P_2 P_{i+1}$. Τότε

$$(P_1 P_i) + (P_2 P_{i+1}) < ((P_1 X) + (X P_2)) + ((P_i X) + (X P_{i+1})) = (P_1 P_2) + (P_i P_{i+1})$$

οπότε η περίμετρος μειώνεται. Το νέο σχήμα είναι το

$$P_1 P_i P_{i-1} \cdots P_2 P_{i+1} P_{i+2} \cdots P_n$$

που εξακολουθεί να είναι πολύγωνο.

- (30) Ονομάζουμε μια διάταξη περιττή αν βλέπουμε περιττό αριθμό κορώνων και άρτια αν βλέπουμε άρτιο αριθμό. Κάθε φορά που αναποδογυρίζουμε i νομίσματα, αν το i είναι περιττός τότε η αρτιότητα της διάταξης αλλάζει ενώ αν είναι άρτιος παραμένει η ίδια. Επειδή $1 + 2 + \cdots + 2015 = 2015 \cdot 1008$ η αρτιότητα της τελικής διάταξης είναι ίδια με αυτήν της αρχικής. Οπότε σίγουρα δεν μπορούμε να επιτύχουμε και όλα τα νομίσματα να είναι κορώνες και όλα να είναι γράμματα αφού η μια διάταξη είναι περιττή και η άλλη άρτια.

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η αρχική διάταξη είναι περιττή. Θα δείξουμε πως μπορούμε να επιτύχουμε τελικά να είναι όλα τα νομίσματα κορώνες.

Μέθοδος 1η: Δείξτε επαγωγικά ότι στην κίνηση i , αν i περιττός μπορούμε να έχουμε i κορώνες, ενώ αν i άρτιος μπορούμε να έχουμε i γράμματα. (Στο τελευταίο βήμα θα χρησιμοποιηθεί ότι η διάταξη είναι περιττή.)

Μέθοδος 2η: Παρατηρούμε ότι δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά κάνουμε τις κινήσεις. Θα τις κάνουμε με την ανάποδη σειρά. Πρώτα θα αναποδογυρίσουμε 2015 νομίσματα, μετά 2014 κ.τ.λ. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι μετά από $1 \leq n \leq 2015$ κινήσεις μπορούμε να έχουμε τουλάχιστον $n - 1$ κορώνες. Η περίπτωση $n = 1$ είναι άμεση, Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για

$n = k \leq 2014$. Ήδη έχουμε τουλάχιστον $k - 1$ κορώνες και στην επόμενη κίνηση θα αναποδογυρίσουμε ακριβώς $2015 - k$ νομίσματα. Αν ήδη υπάρχουν k κορώνες, τότε απλώς αναποδογυρίζουμε τα υπόλοιπα $2015 - k$ νομίσματα. Αλλιώς υπάρχουν $k - 1$ κορώνες και $2016 - k$ γράμματα. Αναποδογυρίζουμε $2015 - k \geq 1$ από αυτά τα νομίσματα και άρα τώρα έχουμε τουλάχιστον k κορώνες.

Οπότε στο τέλος θα έχουμε τουλάχιστον 2014 κορώνες. Επειδή όμως η διάταξη είναι περιττή, θα πρέπει και τα 2015 νομίσματα να είναι κορώνες.

- (31) Όχι δεν γίνεται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας το ένα πιόνι, έστω το μπλε, βρίσκεται στο $(0, 0)$ και το άλλο, έστω το κόκκινο, στο (a, b) . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αντιπαράδειγμα και ας πάρουμε ένα όπου το $|a| + |b|$ είναι ελάχιστο. Θέτω $m = a^2 + b^2$. Τότε το m παραμένει αναλλοίωτο και είναι $m \not\equiv 3 \pmod{4}$.

Αν $m \equiv 1 \pmod{4}$ τότε ένα από τα a, b είναι περιττός και το άλλο άρτιος. Επαγωγικά είναι απλό ναδειχθεί ότι το άθροισμα των συντεταγμένων του μπλε πιονιού είναι άρτιος και το άθροισμα των συντεταγμένων του κόκκινου πιονιού είναι περιττός. Οπότε δεν μπορούμε να πετύχουμε την εναλλαγή των πιονιών.

Αν $m \equiv 2 \pmod{4}$ τότε τα a, b είναι και τα δύο περιττοί. Επαγωγικά είναι απλό ναδειχθεί ότι κάθε συντεταγμένη του μπλε πιονιού είναι άρτια και κάθε συντεταγμένη του κόκκινου πιονιού είναι περιττή. Οπότε πάλι δεν μπορούμε να πετύχουμε την εναλλαγή των πιονιών.

Τέλος αν $m \equiv 0 \pmod{4}$ τότε τα a, b είναι και οι δύο άρτιοι. Επαγωγικά όλες οι συντεταγμένες και του μπλε και του κόκκινου πιονιού είναι άρτιες. Αν λοιπόν μπορούμε να επιτύχουμε την εναλλαγή τότε μπορούμε να το κάνουμε και για το σημείο $(a/2, b/2)$. Αυτό είναι άτοπο αφού $|a/2| + |b/2| < |a| + |b|$.

- (32) Δείξτε ότι κάθε κουτί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 4 μπάλες. Οπότε πρέπει $m \geq 11$. Υπάρχει κατασκευή για $m = 11$ που δουλεύει.
- (33) Σίγουρα δεν μπορούμε να πάρουμε περισσότερους από

$$(1008 + \dots + 2014) - (1 + \dots + 1007) = 1007^2$$

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε τόσους πόντους. Στα πρώτα 1007 βήματα απλά βάζουμε μια μπάλα στο τραπέζι. Σε κάθε ένα από τα επόμενα 1007 βάζουμε μια μπάλα στο τραπέζι και μετά επιλέγουμε δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος εκ των οποίων η μία έχει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1008 (ας την ονομάζουμε «μεγάλη») και η άλλη μικρότερο ή ίσο του 1007 (ας την ονομάζουμε «μικρή»). Αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να το κάνουμε αυτό.

Πράγματι στο βήμα $1007 + (k + 1)$ (για $0 \leq k \leq 1006$) αφού βάλουμε την καινούργια μπάλα στο τραπέζι, θα έχουμε συνολικά στο τραπέζι

$$1007 + (k + 1) - 2k = 1008 - k$$

μπάλες. Από αυτές το πολύ $1007 - k$ είναι άσπρες, άρα θα έχουμε τουλάχιστον μία μαύρη. Ομοίως θα έχουμε τουλάχιστον μία άσπρη, τουλάχιστον μία μεγάλη και τουλάχιστον μία μικρή.

Παίρνω δύο μπάλες. Μια μεγάλη και μια μικρή. Αν είναι διαφορετικού χρώματος τότε τελείωσα. Αν είναι του ίδιου χρώματος, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας και οι δύο άσπρες, τότε παίρνω μια οποιαδήποτε μαύρη. Αν είναι μεγάλη, τότε την αφαιρώ μαζί με την μικρή άσπρη. Αν είναι μικρή την αφαιρώ με την μεγάλη άσπρη.

- (34) Ας ονομάσουμε n -μεταθέσεις τις μεταθέσεις $(a_1, \dots, a_n)$ του $(1, 2, \dots, n)$ με την ιδιότητα $a_i + i \leq a_j + j$ για κάθε $1 \leq i \leq j \leq n$. Έστω T_n ο αριθμός των n -μεταθέσεων. Θα δείξουμε ότι

$$T_n = \sum_{k=1}^n T_{n-k}$$

όπου ορίζουμε $T_0 = 0$. Εφόσον είναι $T_1 = 1$, επαγωγικά είναι άμεσο ότι $T_n = 2^{n-1}$ οπότε και $T_{2014} = 2^{2013}$.

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν T_{n-k} n -μεταθέσεις με $a_k = 1$. Πράγματι για κάθε τέτοια μετάθεση πρέπει $a_i = k+1-i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Επιπλέον το $(a_{k+1} - k, \dots, a_n - k)$ είναι μια $(n-k)$ -μετάθεση. Τέλος, κάθε $(n-k)$ -μετάθεση λαμβάνεται ακριβώς μία φορά με αυτόν τον τρόπο οπότε πράγματι υπάρχουν T_{n-k} n -μεταθέσεις με $a_k = 1$.

- (35) Κερδίζει ο Βασίλης. Μετά από κάθε κίνηση του Αντρέα κάνει ακριβώς την «αντίθετη» κίνηση ώστε ο αριθμός των μπλε/κόκκινων μπαλών στο κόκκινο κουτί να ισούται με τον αριθμό των κόκκινων/μπλε μπαλών στο μπλε κουτί αντίστοιχα.

Αυτό συνεχίζει να το κάνει μέχρι τη στιγμή που μένουν λιγότερες από τρεις κόκκινες μπάλες στο μπλε κουτί ή λιγότερες από τρεις μπλε μπάλες στο κόκκινο. Από την στρατηγική του Βασίλη μόλις συμβεί αυτό θα παίζει ο Βασίλης, οπότε και θα κάνει την κίνηση που κερδίζει.

- (36) Θα δείξουμε ότι $n = k$. Καταρχήν αν ξεκινήσουμε από την διάταξη

$$RBRB \cdots RB$$

τότε θέλουμε τουλάχιστον k κινήσεις. Πράγματι σε αυτήν την διάταξη έχουμε $2k$ εμφανίσεις του RB . Σε κάθε βήμα αυτές οι εμφανίσεις μειώνονται το πολύ κατά 2. Άρα όντως θέλουμε τουλάχιστον k κινήσεις για αυτήν την διάταξη.

Έστω τώρα μια οποιαδήποτε διάταξη με a κόκκινα και $2k - a$ μπλε πούλια στις πρώτες $2k$ θέσεις. Αν $a \geq k$ τότε αλλάζουμε ένα προς ένα τα $2k - a$ μπλε πούλια των πρώτων $2k$ θέσεων με τα $2k - a$ κόκκινα πούλια των τελευταίων $2k$ θέσεων. Έτσι με $2k - a \leq k$ κινήσεις καταλήγουμε στην διάταξη που ξεκινάει με $2k$ κόκκινα πούλια. Αν $a < k$ τότε αλλάζουμε ένα προς ένα τα πρώτα a κόκκινα πούλια με τα τελευταία a μπλε πούλια. Έτσι με το πολύ

$k - 1$ κινήσεις καταλήγουμε στην διάταξη που ξεκινάει με $2k$ μπλε πούλια. Με μια επιπλέον κίνηση μπορούμε να αλλάξουμε όλα τα μπλε πούλια με τα κόκκινα για να καταλήξουμε στην διάταξη που θέλουμε.

- (37) Μπορούμε να το κάνουμε με $2a_{16}$ τρόπους όπου με a_n συμβολίζουμε των αριθμών των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό n ως άθροισμα περιττών αριθμών, όπου η σειρά γραφής παίζει ρόλο.

Θέτοντας $a_0 = 1$, παρατηρούμε ότι $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-3} + \dots + a_1$ και $a_{2n+1} = a_{2n} + \dots + a_2 + a_0$. Π.χ. για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι τον $2n$ μπορούμε να τον γράψουμε σαν άθροισμα περιττών με πρώτο περιττό τον $(2k+1)$ με $a_{2(n-k)-1}$ τρόπους. Οπότε αθροίζουμε αυτά για $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε n είναι $a_{n+2} - a_n = a_{n+1}$. Επειδή είναι $a_1 = 1, a_2 = 1$, τότε η $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι η ακολουθία Fibonacci. Οπότε $a_{16} = F_{16}$ και η ζητούμενη απάντηση είναι η $2F_{16}$.

- (38) Είναι

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| \leq 2(16 + \dots + 30) - 2(1 + 2 + \dots + 15) = 2 \times 15 \times 15 = 450$$

με ισότητα αν και μόνο αν $p_k \in \{1, 2, \dots, 15\}$ όταν $k \in \{16, \dots, 30\}$. Υπάρχουν ακριβώς $(15!)^2$ τρόποι να γίνει αυτό.

- (39) Πρέπει σίγουρα να κάνει τουλάχιστον μία ερώτηση αφού υπάρχουν τουλάχιστον δύο πίνακες με διαφορετικό άθροισμα.

Μπορεί να κάνει μόνο μία ερώτηση. Για να το δείτε καλύψτε τον πίνακα με έξι υποπίνακες ώστε ακριβώς ένα κελί να ανήκει σε δύο πίνακες. Αν σε αυτό το κελί υπάρχει ο αριθμός x , δείξτε ότι το άθροισμα ισούται με $-x$.

- (40) Αν ο Πέτρος σημαδέψει τα 9 κελιά της σκακιέρας που βρίσκονται σε περιττή στήλη και περιττή σειρά τότε ο Βασίλης δεν μπορεί να τα καλύψει όλα. Πράγματι κάθε γωνία καλύπτει το πολύ ένα από τα σημαδεμένα κελιά. Οπότε για να καλύψει όλα τα σημαδεμένα κελιά ο Βασίλης θέλει 9 γωνίες. Τότε όμως θα καλύψει $27 > 25$ κελιά, άτοπο.

Για κάθε ένα από αυτά τα 9 κελιά, ο Βασίλης μπορεί εύκολα να καλύψει τα υπόλοιπα 24 κελιά εκτός από αυτό. (Αν λάβουμε υπόψη την συμμετρία, είναι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις.) Οπότε για οποιαδήποτε 8 κελιά σημαδέψει ο Πέτρος, ο Βασίλης επιλέγει ένα από τα 9 προηγούμενα που δεν είναι σημαδεμένο και καλύπτει όλη την σκακιέρα εκτός από αυτό.

Άρα ο ελάχιστος αριθμός είναι 9.

- 41 Χρειάζονται σίγουρα 9 σταγόνες για να καταστρέφουν τα δεκαοκτώ ζεύγη όπου η μια πέτρα έχει βάρος k και η άλλη $37 - k$. (Για $1 \leq k \leq 18$.)

Με 9 σταγόνες μπορεί να συνδέσει ανά δύο τις 18 πέτρες με περιττό βάρος. Τώρα όλες οι πέτρες ή ομάδες πετρών έχουν άρτιο βάρος άρα ο Σαΐνης δεν μπορεί να πάρει άθροισμα 37.

42 Προβάλλουμε πρώτα όλα τα τετράγωνα στον άξονα των x . Έχουμε n μαύρα και n άσπρα ευθύγραμμα τμήματα του ίδιου μήκους ώστε κάθε δύο ευθύγραμμα τμήματα διαφορετικού χρώματος τέμνονται. Κοιτάζουμε το τμήμα με το αριστερότερο άκρο, έστω το A_L και το τμήμα με το δεξιότερο άκρο, έστω το A_R . Αν τα A_L, A_R έχουν διαφορετικό χρώμα, τότε όλα τα τμήματα έχουν κοινό σημείο. (Οποιοδήποτε κοινό σημείο των A_L, A_R είναι κοινό σημείο όλων των τμημάτων.) Αν τα A_L, A_R έχουν το ίδιο χρώμα, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας μαύρο, τότε κάθε άσπρο τμήμα τέμνει και το δεξί άκρο του A_L και το αριστερό άκρο του A_R . Οπότε κάθε μαύρο τμήμα, αν δεν τέμνει το δεξί άκρο του A_L τότε το αριστερό του άκρο θα είναι δεξιότερα του δεξιού άκρου του A_L και άρα θα τέμνει το αριστερό άκρο του A_R .

Επομένως και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ένα σημείο που είναι κοινό σε τουλάχιστον $3n/2$ από τα ευθύγραμμα τμήματα. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για την προβολή στον άξονα των y . Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον $2(3n/2) - 2n = n$ τετράγωνα ώστε τόσο οι προβολές τους στον άξονα των x όσο και οι προβολές τους στον άξονα των y να έχουν κοινό σημείο. Τότε όμως αυτά τα n τετράγωνα έχουν κοινό σημείο.

(43) Γενικά για μια $n \times n$ σκακιέρα και ένα υποσύνολο I του $[n]$ ορίζουμε ως A_I το σύνολο όλων των τοποθετήσεων ώστε σε κάθε στήλη να έχει τουλάχιστον ένα πύργο και επιπλέον για κάθε $i \in I$ να μην υπάρχει κανένας πύργος στην γραμμή i . Οπότε είναι $|A_I| = (2^{n-|I|} - 1)^n$. Αν $S = A_\emptyset$, θέλουμε να υπολογίσουμε το $|S \setminus \{A_1 \cup \dots \cup A_n\}|$ το οποίο από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισούται με

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^n$$

Αυτή είναι η ακολουθία [A048291](#) από την [εγκυκλοπαίδεια ακέραιων ακολουθιών](#) και δεν φαίνεται να υπάρχει κλειστός τύπος.

Δεν βλέπω λοιπόν άλλο τρόπο παρά να υπολογιστεί ο όγδοος όρος στο χέρι. Η τελική απάντηση είναι 17343602252913832063.

Μάλλον κακό πρόβλημα αφού ενώ ο βαθμός δυσκολίας για την εύρεση του τύπου είναι μεταξύ 1 και 2, από κει και πέρα δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την ώρα του διαγωνισμού αν υπάρχει κλειστός τύπος. Η τελική απάντηση είναι αρκετά μεγάλη για να μας προϊδεάζει πως κάτι καλύτερο υπάρχει από τον υπολογισμό στο χέρι.

(44) Μπορεί να επιτευχθεί με τρεις ζυγίσεις ως εξής: Στην πρώτη ζύγιση χωρίζω τα σακούλια σε τρεις ομάδες των 40, 29, 51 σακουλιών και παίρνω ένα νομίσμα από κάθε σακούλι της πρώτης ομάδας και δύο από κάθε σακούλι της δεύτερης ομάδας. (Δεν παίρνω νομίσματα από κανένα σακούλι της τελευταίας ομάδας.) Συνολικά πήρα 98 νομίσματα οπότε η ζυγαριά θα δώσει ακριβή ένδειξη. Η ένδειξη θα μας πει σε ποια ομάδα σακουλιών ανήκει το σακούλι με τα νομίσματα των εννιά γραμμαρίων. (Αν η ένδειξη είναι 978 θα

ανήκει στην ομάδα των 40 σακουλιών, αν είναι 979 θα ανήκει στην ομάδα των 29 και αν είναι 980 θα ανήκει στην ομάδα των 51.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μου μένουν 51 σακούλια. Στην δεύτερη ζύγιση τα χωρίζω σε ομάδες των 13, 13, 13, 12 σακουλιών. Παίρνω ένα νομίσμα από κάθε σακούλι της πρώτης ομάδας, δύο από της δεύτερης και τρία από της τρίτης. Συνολικά 78 νομίσματα οπότε μπορώ να βρω ποια ομάδα περιέχει το σακούλι που θέλω.

Στην τελευταία ζύγιση από τα 13 σακούλια που έχω παίρνω διαφορετικό αριθμό νομισμάτων από το κάθε ένα (από 1 ως 13 για σύνολο 91 νομισμάτων) οπότε μπορώ να αποφασίσω ποιο είναι το σακούλι που θέλω.

Η ίδια απόδειξη δείχνει ότι μπορώ να τα καταφέρω με τρεις ζυγίσεις ακόμη και αν έχω 138 σακούλια.

Δεν μπορούμε να το πετύχουμε με λιγότερες ζυγίσεις. Στην τελευταία ζύγιση πρέπει να πάρω διαφορετικό αριθμό νομισμάτων από κάθε σακούλι (επιτρέπεται να πάρω μηδέν νομίσματα από ένα σακούλι). Για να έχω όμως το πολύ 99 νομίσματα, πρέπει να έχω το πολύ 14 σακούλια. Όμως σίγουρα στην πρώτη ζύγιση θα υπάρχουν τουλάχιστον 15 σακούλια από τα οποία θα πάρω τον ίδιο αριθμό νομισμάτων αφού αλλιώς θα έχω το πολύ $5 \cdot 14 = 70$ σακούλια από τα οποία θα πάρω το πολύ 4 νομίσματα ενώ από τα υπόλοιπα 50 σακούλια θα πάρω από τουλάχιστον 5 νομίσματα για ένα σύνολο τουλάχιστον 250 νομισμάτων, άτοπο.

- (45) Χωρίς βλάβη της γενικότητας ο χρωματισμός είναι a_1 κόκκινα, b_1 μπλε, ..., a_k κόκκινα, b_k μπλε όπου $a_i, b_i \geq 1$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Τότε είναι $a_1 + \dots + a_k = 79$ και $b_1 + \dots + b_k = 24$. Επιπλέον είναι $A = (a_1 - 1) + \dots + (a_k - 1) = 79 - k$ και ομοίως $B = 24 - k$. Οπότε $(A, B) \in \{(79 - k, 24 - k) : 1 \leq k \leq 24\}$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι όλα τα ζεύγη μπορούν να επιτευχθούν.

Έστω τώρα ότι $B = 14$ οπότε $k = 10$. Υπάρχουν ακριβώς $\binom{23}{9}$ λύσεις της εξίσωσης $b_1 + \dots + b_{10} = 24$ στους θετικούς ακεραίους. Υπάρχουν επίσης $\binom{78}{9}$ λύσεις της εξίσωσης $a_1 + \dots + a_{10} = 79$ στους θετικούς ακεραίους.

Οπότε υπάρχουν $\binom{23}{9} \binom{78}{9}$ εικοσάδες της μορφής $(a_1, b_1, \dots, a_{10}, b_{10})$ θετικών ακεραίων με $a_1 + \dots + a_{10} = 79$ και $b_1 + \dots + b_{10} = 24$. Κάθε τέτοια εικοσάδα δίνει ένα χρωματισμό, όμως κάθε χρωματισμός λαμβάνεται από το πολύ 10 εικοσάδες αφού π.χ. η $(a_2, b_2, \dots, a_{10}, b_{10}, a_1, b_1)$ δίνει τον ίδιο χρωματισμό.

Θα δείξουμε ότι κάθε χρωματισμός λαμβάνεται από ακριβώς 10 εικοσάδες. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε πως αν

$$(a_i, \dots, a_{i+9}) = (a_j, \dots, a_{j+9})$$

όπου οι δείκτες είναι mod 10, τότε $i \equiv j \pmod{10}$. Αν δεν ίσχυε αυτό τότε θα έπρεπε να υπάρχει $k \not\equiv 0 \pmod{10}$ ώστε $a_i = a_{i+k}$ για κάθε i . Αν $(k, 10) = 1$ τότε $a_1 = \dots = a_{10}$, άτοπο αφού $a_1 + \dots + a_{10} = 79$. Αν $2|k$ τότε $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9$ και $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10}$, άτοπο αφού τότε το

άθροισμα $a_1 + \dots + a_{10}$ θα ήταν πολλαπλάσιο του 5. Ομοίως δεν γίνεται να είναι $5|k$ αφού τότε $2|79$, άτοπο. Άρα όντως ο ισχυρισμός ισχύει και επομένως υπάρχουν ακριβώς

$$\frac{1}{10} \binom{23}{9} \binom{78}{9}$$

διαφορετικοί χρωματισμοί.

- (46) Αφού $(39, 64) = 1$ υπάρχει θετικός ακέραιος m ώστε το άθροισμα στα μαύρα τετραγωνάκια να είναι $39m$ και στα λευκά $64m$. Τότε έχουμε

$$103m = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

οπότε $103|n^2(n^2 + 1)$. Επειδή το 103 είναι πρώτος με $103 \equiv 3 \pmod{4}$ το -1 δεν είναι τετραγωνικό κατάλοιπο $\pmod{103}$ και άρα δεν μπορούμε να έχουμε $103|(n^2 + 1)$. Οπότε πρέπει $103|n$ και αφού n άρτιος πρέπει $206|n$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε n το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 206 μπορούμε να έχουμε τέτοια κατασκευή. Έστω $n = 206t$ και έστω $S = n^2(n^2 + 1)/2$ το συνολικό άθροισμα. Θεωρούμε την κατασκευή A όπου βάζουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, n^2/2$ στα μαύρα τετραγωνάκια και τους υπόλοιπους στα λευκά. Θεωρούμε επίσης την κατασκευή B όπου βάζουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, n^2/2$ στα λευκά τετραγωνάκια και τους υπόλοιπους στα μαύρα. Έχουμε

$$S_1(A) = \frac{1}{2} \frac{n^2}{2} \left(\frac{n^2}{2} + 1 \right) = \frac{n^2}{(n^2 + 2)} 8$$

και άρα

$$\frac{S_1(A)}{S} = \frac{1}{4} \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{104}{103} = \frac{26}{103} < \frac{39}{103},$$

δηλαδή $S_1(A) < 39S/103$. Ομοίως έχουμε $S_2(B) < 39S/103$ και άρα $S_1(B) > 64S/103 > 39S/103$. Επειδή ο $39S/103$ είναι ακέραιος αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο N στο διάστημα $[S_1(A), S_1(B)]$ υπάρχει κατασκευή με $S_1 = N$. Πράγματι για οποιαδήποτε κατασκευή εκτός από την B μπορούμε να βρούμε ένα ακέραιο t ώστε το t να είναι σε μαύρο τετραγωνάκι και το $t+1$ σε λευκό. Τότε όμως εναλλάσσοντας τους αριθμούς σε αυτά τα τετραγωνάκια έχουμε κατασκευή όπου το S_1 αυξήθηκε κατά 1. Οπότε όντως υπάρχει τέτοια κατασκευή για κάθε N όπως πάνω.

- (47) Για κάθε $A \subseteq [n - 1]$ το πολύ ένα από τα $A, A \cup \{n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}$ άρα $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

Το μέγεθος 2^{n-1} μπορεί να επιτευχθεί από όλα τα υποσύνολα με περιττό μέγεθος, ή από όλα τα υποσύνολα με άρτιο μέγεθος. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι αυτές είναι οι μόνες οικογένειες με μέγιστο μέγεθος. Για $n = 1$ είναι προφανές. Έστω ότι ισχύει για $n = k$ και έστω $\mathcal{F}_{k+1}$ μια οικογένεια με μέγιστο μέγεθος για την περίπτωση $n = k + 1$. Τότε $|\mathcal{F}_{k+1}| = 2^k$. Έστω $\mathcal{F}_{k+1}^-$ όλα τα σύνολα της $\mathcal{F}_{k+1}$ που δεν περιέχουν το $k + 1$. Επειδή η $\mathcal{F}_{k+1}^+$ είναι

οικογένεια υποσυνόλων του $[k]$ που ικανοποιεί τα δεδομένα είναι $|\mathcal{F}_{k+1}^+| \leq 2^{k-1}$ με ισότητα, από την επαγωγική υπόθεση, αν και μόνο αν περιέχει όλα τα υποσύνολα με περιττό μέγεθος ή όλα τα υποσύνολα με άρτιο μέγεθος. Έστω επίσης

$$\mathcal{F}_{k+1}^- = \{A \setminus \{k+1\} : A \in \mathcal{F}_{k+1} \text{ και } k+1 \in A\}.$$

Αυτή είναι επίσης οικογένεια υποσυνόλων του $[k]$ που ικανοποιεί τα δεδομένα οπότε $|\mathcal{F}_{k+1}^-| \leq 2^{k-1}$ με ισότητα, από την επαγωγική υπόθεση, αν και μόνο αν περιέχει όλα τα υποσύνολα με περιττό μέγεθος ή όλα τα υποσύνολα με άρτιο μέγεθος.

Επειδή όμως $|\mathcal{F}_{k+1}| = |\mathcal{F}_{k+1}^+| + |\mathcal{F}_{k+1}^-|$ για να είναι $|\mathcal{F}_{k+1}| = 2^k$ πρέπει $|\mathcal{F}_{k+1}^+| = |\mathcal{F}_{k+1}^-| = 2^{k-1}$. Από τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις όμως μόνο οι δύο είναι δεκτές, (όλα τα περιττά ή όλα τα άρτια) αφού για να ικανοποιεί η $|\mathcal{F}_{k+1}|$ τα δεδομένα πρέπει επιπλέον $\mathcal{F}_{k+1}^+ \cap \mathcal{F}_{k+1}^- = \emptyset$.

- (48) Έστω Z ένα σημείο του κυκλικού δίσκου, έστω X ένα σημείο που επιλέγεται ομοιόμορφα τυχαία στην περιφέρεια του δίσκου και έστω D η απόστασή του X από το Z . Θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}D \leq \frac{4}{\pi}$.

Έστω Z' το σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OZ' του κύκλου να περνάει από το Z . Για οποιοδήποτε σημείο A του κύκλου, αν B το αντιδιαμετρικό του, τότε το τρίγωνο AZB περιέχει το σημείο Z και άρα $(AZ) + (ZB) \leq (AZ') + (Z'B)$. Οπότε για τον πιο πάνω ισχυρισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Z ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $Z = (1, 0)$. Οπότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i\vartheta} - z| d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \vartheta - 1)^2 + \sin^2 \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(\vartheta/2)| d\vartheta = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Αν τώρα $Z_1, \dots, Z_{60}$ τα 60 σημεία τότε από την γραμμικότητα της προσδοκώμενης τιμής, αν S είναι το άθροισμα των αποστάσεων του X από τα $Z_1, \dots, Z_{60}$ τότε είναι $\mathbb{E}S \leq 240/\pi < 80$. Οπότε υπάρχει X στην περιφέρεια του κύκλου με το άθροισμα των αποστάσεων του X από τα Z_i να είναι το πολύ 80.

Δεύτερη Λύση: Έστω Z ένα σημείο του κυκλικού δίσκου και έστω $ABCDEF$ ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο. Όπως και στην προηγούμενη λύση, αν Z' το σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα $'$ του κύκλου να περνάει από το Z τότε $(AZ) + (DZ) \leq (AZ') + (DZ')$ κ.τ.λ. Το ACE είναι ισόπλευρο

τρίγωνο. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το Z' βρίσκεται στον κυκλικό τομέα AC . Τότε από θεώρημα Πτολεμαίου είναι $(AZ') + (CZ') = (EZ')$ οπότε $(AZ') + (CZ') + (EZ') = 2(EZ') \leq 2$. Ανάλογα καταλήγουμε στην $(AZ) + \dots + (FZ) \leq 4$. Αν τώρα $Z_1, \dots, Z_{60}$ τα 60 σημεία τότε παίρνουμε

$$(AZ_1) + \dots + (AZ_{60}) + \dots + (AX_1) + \dots + (AX_{60}) \leq 480$$

και άρα αν $X \in \{A, B, \dots, F\}$ ώστε $(Z_1) + \dots + (Z_{60})$ ελάχιστο τότε είναι $(Z_1) + \dots + (Z_{60}) \leq 80$ όπως θέλαμε δείξουμε.

- (49) Για κάθε p -άδα $(a_1, \dots, a_p)$ που ικανοποιεί τα (α), (β) και κάθε $0 \leq k \leq p-1$ η p -άδα $(a_1+k, \dots, a_p+k)$ (όπου η πρόσθεση γίνεται $\text{mod } p$) επίσης ικανοποιεί τα (α) και (β). Επιπλέον ισχυρίζομαι ότι από αυτές τις p -άδες ακριβώς μία ικανοποιεί το (γ). Πράγματι είναι

$$\sum_{i=1}^p (a_i + k)(a_{i+1} + k) \equiv \left(\sum_{i=1}^p a_i a_{i+1} \right) + 2k \sum_{i=1}^p a_i \text{ mod } p$$

και αφού p περιττός και $\sum a_i \not\equiv \text{mod } p$ η p -άδα ικανοποιεί το (γ) αν και μόνο αν

$$k \equiv -x \sum_{i=1}^p a_i a_{i+1} \text{ mod } p$$

όπου x ο αντίστροφος του $2 \sum a_i \text{ mod } p$.

Υπάρχουν όμως ακριβώς $p^{p-1}(p-1)$ p -άδες που ικανοποιούν τα (α) και (β) οπότε και ακριβώς $p^{p-2}(p-1)$ καλές p -άδες.

- (50) Για $d > 0$ πρέπει $n \geq 2d + 2$ με n άρτιο και $nd/2$ επίσης άρτιο. Για $d = 0$ οποιοδήποτε n δουλεύει.

Ας υποθέσουμε ότι $d > 0$ αφού αλλιώς είναι απλό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε a αγόρια και b κορίτσια. Αφού κάθε αγόρι γνωρίζει ακριβώς d άλλα αγόρια, πρέπει $a \geq d + 1$ και ομοίως $b \geq d + 1$. Πρέπει σίγουρα $a, b \geq d$ οπότε $n = a + b \geq 2(d + 1)$. Αφού κάθε αγόρι γνωρίζει d κορίτσια, τότε υπάρχουν ακριβώς da ζεύγη (x, y) όπου x αγόρι και y κορίτσι τα οποία γνωρίζονται. Ομοίως υπάρχουν db τέτοια ζεύγη οπότε είναι $a = b$ και άρα ο $n = a + b = 2a$ είναι άρτιος.

Αφού κάθε αγόρι γνωρίζει d κορίτσια, τότε υπάρχουν ακριβώς $da = nd/2$ ζεύγη (x, y) όπου x αγόρι και y αγόρι τα οποία γνωρίζονται. Όμως ο αριθμός αυτών των ζευγών είναι άρτιος αφού αν το (x, y) είναι ένα τέτοιο ζεύγος τότε και το (y, x) είναι επίσης ένα τέτοιο ζεύγος.

Η κατασκευή βασίζεται στο πιο κάτω:

- (α') Για κάθε m, d με $m \geq d + 1$ και md άρτιο υπάρχει γράφημα με m κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό d . Μια κατασκευή είναι η εξής: Ως σύνολο κορυφών παίρνουμε το $\{1, 2, \dots, m\}$. Αν $d = 2k$ άρτιος, τότε ενώνουμε το i με το j αν και μόνο αν $i - j \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\} \text{ mod } m$.

Αν $d = 2k + 1$, τότε $m = 2r$ και ενώνουμε το i με το j αν και μόνο αν $i - j \in \{\pm 1, \dots, \pm k, r\} \bmod m$.

(β') Για κάθε $m \geq d$ υπάρχει υπογράφημα του $K_{m,m}$ όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό d . Μια κατασκευή είναι η εξής: Έστω $\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_m\}$ οι κορυφές των δύο μερών. Τότε ενώνουμε το x_i με το y_j αν και μόνο αν $j - i \in \{1, 2, \dots, d\} \bmod m$.

(51) Θα δείξουμε ότι $k = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$. Ισοδύναμα, ο Μέρλιν έχει στρατηγική νίκης αν και μόνο αν $n < 2^k$.

Ο Μέρλιν δεν έχει στρατηγική νίκης αν $n = 2^k$. Π.χ. αν ο Δανιήλ γράφει στην μια μεριά του χαρτιού i όλους τους αριθμούς από το 1 ως το n που το ψηφίο στην θέση i στην δυαδική τους αναπαράσταση ισούται με 0. Στην άλλη μεριά γράφει τους υπόλοιπους. Όπως και να γυρίσει τα χαρτιά ο Μέρλιν, για κάθε i θα υπάρχει $a_i \in \{0, 1\}$ ώστε σε αυτό το χαρτί να μην βλέπουμε κανένα αριθμό με ψηφίο a_i στην θέση i της δυαδικής του αναπαράστασης. Οπότε σίγουρα δεν βλέπουμε τον αριθμό $a_n \cdots a_1$. (Ταυτίζουμε τον 2^n με τον αριθμό 0.)

Για την στρατηγική του Μέρλιν στην περίπτωση που $n < 2^k$ προχωράμε «λαίμαργα»: Αν έχουμε ήδη αποφασίσει για τα πρώτα r χαρτιά, τότε γυρίζουμε το $r+1$ χαρτί με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκαλυφθούν τουλάχιστον οι μισοί από τους αριθμούς που δεν εμφανίζονται στα πρώτα χαρτιά r χαρτιά.

Η στρατηγική προφανώς δουλεύει για $k = 1$. Επιπλέον, μετά το πρώτο χαρτί μένουν $m \leq n/2 < 2^{k-1}$ αριθμοί οι οποίοι πρέπει να εμφανίζονται σε ένα από τα υπόλοιπα $k-1$ χαρτιά οπότε επαγωγικά η στρατηγική δουλεύει για κάθε φυσικό k .

(52) Θα δείξουμε ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε το πολύ 14 κυβάκια, ή ισοδύναμη πρέπει να παραμείνουν τουλάχιστον 13 κυβάκια.

Κοιτάζοντας τα κυβάκια που παραμένουν από όλες τις έδρες του μεγάλου κύβου βλέπουμε συνολικά 54 έδρες. Αν παρέμειναν n κυβάκια, τότε αυτά έχουν συνολικά $6n$ έδρες.

Κατασκευάζουμε το γράφημα όπου συνδέουμε δύο κυβάκια που παρέμειναν αν και μόνο αν έχουν κοινή έδρα. Το γράφημα αυτό είναι συνεκτικό οπότε πρέπει να έχει τουλάχιστον $n-1$ ακμές. Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον $2(n-1)$ έδρες εφάπτονται και δεν μπορούμε να τις δούμε. Άρα είναι

$$6n - 2(n-1) \geq 54.$$

Οπότε είναι όντως $n \geq 13$.

(53) Αν $d = p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ τότε αντιστοιχούμε σε αυτόν το σύνολο $A_d = \{i_1, \dots, i_r\}$. Η απόδειξη του ζητούμενου βασίζεται στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα: Το σύνολο των υποσυνόλων του $[k]$ μπορεί να διαμεριστεί σε συμμετρικές αλυσίδες. [Δηλαδή σε σύνολα της μορφής $\{A_1, \dots, A_t\}$ όπου $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_t$, $|A_1| + |A_t| = k$ και $|A_{i+1}| = |A_i| + 1$ για κάθε $1 \leq i \leq t-1$.]

Κάθε συμμετρική αλυσίδα περιέχει ακριβώς ένα σύνολο μεγέθους $k/2$. Άρα έχουμε ακριβώς $\binom{k}{k/2}$ συμμετρικές αλυσίδες. Σε κάθε συμμετρική αλυσίδα όμως, η διαφορά των συνόλων που αντιστοιχούν σε στοιχεία του S_1 με αυτά που αντιστοιχούν σε στοιχεία του S_2 είναι το πολύ 1. (Αφού για κάθε συμμετρική αλυσίδα $\{A_1, \dots, A_t\}$ είτε κανένα A_r δεν θα αντιστοιχεί σε στοιχείο των S_1, S_2 είτε θα υπάρχουν $1 \leq i \leq j \leq k$ ώστε ακριβώς τα $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$ αντιστοιχούν σε τέτοια στοιχεία. Από αυτά όμως το A_r ανήκει στο S_1 αν και μόνο αν το r είναι άρτιος.

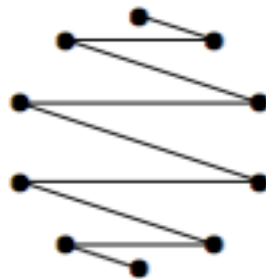
- (54) Υπάρχουν ακριβώς $2^{\binom{2014}{2}}$ διατετεγμένα ζεύγη. Κάθε μετάθεση έχει 2013 τέτοια ζεύγη. Οπότε χρειαζόμαστε τουλάχιστον $\frac{2}{2013} \binom{2014}{2} = 2014$ μεταθέσεις. Μπορούμε να επιτύχουμε τόσες μεταθέσεις με τις μεταθέσεις

$$1 + k, 2014 + k, 2 + k, 2013 + k, \dots, 1007 + k, 1008 + k$$

για $k \in \{1, 2, \dots, 2014\}$ όπου η πρόσθεση είναι mod 2014.

Ουσιαστικά με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι μπορούμε να διαμερίσουμε τις ακμές του K_{2n} σε n μονοπάτια Hamilton.

Μπορούμε να δούμε πιο εύκολα τι συμβαίνει γεωμετρικά από την παρακάτω εικόνα για $n = 5$ όπου παρουσιάζουμε το ένα μονοπάτι ενά τα άλλα τέσσερα τα παίρνουμε από περιστροφές.



- (55) Αν μια πόλη συνδέεται απευθείας με a_i πόλεις μέσω της αεροπορικής γραμμής i , τότε είναι το κέντρο ακριβώς

$$\binom{a_1}{2} + \dots + \binom{a_5}{2} \geq 5 \binom{35/5}{2} = 105$$

κανονικώς συνδεδεμένων τριάδων. (Όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Jensen.)

Άρα συνολικά υπάρχουν τουλάχιστον $36 \times 105 = 3780$ κανονικώς συνδεδεμένες τριάδες.

Για να δείξουμε ότι μπορούμε να επιτύχουμε τόσες τριάδες αρκεί να διαμερίσουμε το K_{36} σε 35 τέλεια ταιριάσματα (perfect matchings). Μετά μπορούμε

να πάρουμε 7 τέλεια ταιριάσματα για την κάθε αεροπορική εταιρεία και να παρατηρήσουμε πως ισχύει η ισότητα στην πιο πάνω ανισότητα.

Είναι γνωστό όμως πως μπορούμε να διαμερίσουμε το K_{2n} σε $2n - 1$ τέλεια ταιριάσματα. (Οι ποδοσφαιρικές ομοσπονδίες γνωρίζουν πως να το κάνουν!) Ένας τρόπος είναι να βάλουμε τις $2n - 1$ κορυφές του K_{2n} στις κορυφές ενός κανονικού $(2n - 1)$ -γώνου και την άλλη κορυφή στο κέντρο. Παίρνουμε μετά $2n - 1$ ταιριάσματα ως εξής: Συνδέουμε μια κορυφή με το κέντρο με ένα ευθύγραμμο τμήμα L . Παίρνουμε ως πρώτο ζεύγος αυτήν την κορυφή με το κέντρο. Επίσης παίρνουν όλα τα ζεύγη κορυφών που το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει είναι κάθετο με το ευθύγραμμο τμήμα L .

- (56) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε γράφημα G σε n κορυφές χωρίς κύκλο Hamilton, αν x, y δυο κορυφές του G με $d(x) + d(y) \geq n$ και $x \sim y$, τότε το $G + xy$ δεν έχει κύκλο Hamilton.

Ας υποθέσουμε πως έχει. Τότε στο G μπορούμε να βρούμε μονοπάτι Hamilton από το x στο y . Έστω το $x_1 x_2 \cdots x_{100}$ όπου $x = x_1$ και $y = x_{100}$. Αν για κάποιο $3 \leq i \leq 99$ έχουμε $x \sim x_i$ και $y \sim x_{i-1}$ τότε παίρνουμε τον κύκλο Hamilton

$$x_1 x_i x_{i+1} \cdots x_{100} x_{i-1} x_{i-2} \cdots x_1$$

στο G , άτοπο. Αν όχι τότε

$$d(x) + d(y) = 2 + \sum_{i=3}^{99} (I[x_i \sim x] + I[x_{i-1} \sim y]) \leq 99,$$

άτοπο. (Όπου $I[P] = 1$ αν αληθεύει η πρόταση P και $I[P] = 0$ αν δεν αληθεύει.)

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται το θεώρημα του Chvatal περί της ύπαρξης κύκλων Hamilton σε κάποιο γράφημα G .

- (57) Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα του Hall.

Θεώρημα του Γάμου (Hall): Έστω ένα διμερές γράφημα G με μέρη A και B . Τότε υπάρχει ένα πάντρεμα των κορυφών του A με κορυφές του B (δηλαδή υπάρχει μια ένα προς ένα συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ ώστε να υπάρχει ακμή μεταξύ των a και $f(a)$ για κάθε $a \in A$) αν και μόνο αν για κάθε $A' \subseteq A$ ισχύει ότι $|N(A')| \geq |A'|$. (Όπου με $N(X)$ δηλώνουμε το σύνολο όλων των κορυφών y ώστε για κάποιο $x \in X$ να υπάρχει ακμή μεταξύ του x και του y .)

(1) $\Rightarrow$ (2) : Έστω ότι το (2) είναι λανθασμένο και ότι υπάρχει σύνολο X που δεν ικανοποιεί το (2). Κοιτάζουμε όλα τα κάστρα της χώρας B που είναι γειτονικά με ένα κάστρο στο σύνολο X . Κάθε διοικητής τέτοιο κάστρου επιτίθεται σε ένα από τα κάστρα του συνόλου X . Επειδή το σύνολο X δεν ικανοποιεί την συνθήκη (2) το σύνολο των επιτιθεμένων σε όλα τα κάστρα αυτού του συνόλου είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των αμυνομένων που

μπορούν να μαζευτούν σε αυτά τα κάστρα. Άρα σε τουλάχιστον ένα από τα κάστρα οι επιτιθέμενοι θα είναι περισσότεροι από τους αμυνόμενους, άτοπο.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Έστω ότι τα κάστρα $a_1, \dots, a_r$ της χώρας A δέχονται επίθεση από $m_1, \dots, m_r$ διοικητές από την χώρα B αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα όπου στο ένα μέρος, ας το ονομάσουμε U , έχουμε τα κάστρα της χώρας A και στο άλλο, ας το ονομάσουμε V , έχουμε τα κάστρα $a_1, \dots, a_r$ με το κάστρο a_i να εμφανίζεται m_i φορές. Βάζουμε μια ακμή μεταξύ μιας κορυφής του U και μιας του V αν και μόνο αν τα αντίστοιχα κάστρα είναι είτε γειτονικά είτε τα ίδια. Για να δείξουμε ότι μπορεί να αμυνθεί η χώρα A αρκεί να βρούμε ένα τέλει πάντρεμα από το V στο U . (Το πάντρεμα θα μας δείξει από που πρέπει να μετακινηθεί ο κάθε διοικητής ώστε να έχουμε ακριβώς m_i διοικητές στο κάστρο a_i .) Από το θεώρημα του Hall αρκεί για κάθε υποσύνολο V' του V με $|V'| = k$ ισχύει ότι $|N_U(V')| \geq k$. Αλλά το $|V'| = k$ μας λέει ότι μπορούν να μαζευτούν k διοικητές από το B που να κάνουν επίθεση στα αντίστοιχα κάστρα που εμφανίζονται στο V' . Η συνθήκη (2) όμως μας λέει ότι υπάρχουν τουλάχιστον k διοικητές από την χώρα A που μπορούν να τρέξουν προς υπεράσπιση. Δηλαδή (από την κατασκευή του διμερούς γραφήματος) έχουμε $|N_U(V')| \geq k$ όπως θέλαμε να δείξουμε.

- (58) Έστω S_n η παράσταση $(a_{11} + a_{13} + a_{31} + a_{33}) - 2(a_{12} + a_{22})$ μετά το n βήμα. Η (S_n) είναι αύξουσα. Όμως για το (1) είναι $S_0 = 6$ ενώ για να γίνουν όλοι οι αριθμοί ίσοι πρέπει στο τέλος να είναι $S_N = 0$, άτοπο.

Για το (2) παρατηρούμε ότι το $k = 4$ επιτυγχάνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Δεν μπορούμε να επιτύχουμε $k > 4$: Αν επιτύχουμε k , δείξτε ότι ο $4k$ είναι ακέραιος. Δείξτε επίσης ότι αν X το συνολικό άθροισμα των x τότε $45 - 9k = X \geq 4k - 10$.

- (59) Θα δείξουμε ότι ο Κάλβιν μπορεί να επιτύχει το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -2 . Τότε και η άλλη ρίζα πρέπει να είναι ακέραια. Κοιτάζουμε λοιπόν το $f(-2)$. Αρχικά είναι $f(-2) = 2016$. Όσο εξακολουθεί να ισχύει ότι $f(-2) \geq 3$ ο Κάλβιν αυξάνει τον συντελεστή του x κατά 1. Οπότε το $f(-2)$ μειώνεται κατά 2. Στο επόμενο βήμα ο Χομπς είτε θα αυξήσει είτε θα μειώσει το $f(-2)$ κατά 1. Μετά από αυτές τις δυο κινήσεις το $f(-2)$ μειώθηκε τουλάχιστον κατά 1 οπότε θα υπάρξει κάποια στιγμή ώστε θα πρέπει να παίξει ο Κάλβιν και θα έχουμε $f(-2) < 3$. Ας κοιτάξουμε την πρώτη στιγμή που συμβαίνει αυτό. Πριν την αμέσως προηγούμενη κίνηση του Κάλβιν, ήταν $f(-2) \geq 3$. Μετά από την προηγούμενη κίνηση του Κάλβιν πρέπει $f(-2) \geq 1$ και μετά την κίνηση του Χομπς είναι $f(-2) \geq 0$. Άρα παίζει ο Κάλβιν και έχουμε $f(-2) \in \{0, 1, 2\}$. Αν $f(-2) = 0$ ο Κάλβιν έχει ήδη κερδίσει. Αν $f(-2) = 2$ ο Κάλβιν αυξάνει τον συντελεστή του x κατά 1 και κερδίζει. Αν $f(-2) = 1$ ο Κάλβιν αυξάνει τον συντελεστή του x κατά 1 οπότε $f(-2) = -1$. Αν ο Χομπς

αυξήσει τον σταθερό συντελεστή κατά 1 έχουμε $f(-2) = 0$ και ο Κάλβιν κερδίζει. Αν μειώσει τον σταθερό συντελεστή κατά 1 έχουμε $f(-2) = -2$. Στην επόμενη κίνηση ο Κάλβιν μειώνει τον συντελεστή του x κατά 1 οπότε έχουμε $f(-2) = 0$ και ο Κάλβιν πάλι κερδίζει.

- (60) Μετράμε όλες τις τριάδες θετικών ακεραίων (a, b, c) με $a < b < c \leq x$, με τους a, b, c να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο και τους a, b να ανήκουν στο $\{a_1, a_2, \dots\}$. Για κάθε a, b υπάρχει το πολύ μια επιλογή για το c (πρέπει $c = 2b - a$) και άρα υπάρχουν το πολύ $\binom{A(x)}{2}$ τέτοιες τριάδες. Επιπλέον για κάθε $a_t < c \leq x$ που δεν ανήκει στο $\{a_1, a_2, \dots\}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος (a, b) ώστε η τριάδα (a, b, c) να ικανοποιεί τις πιο πάνω συνθήκες. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $x - 1 - A(x) - a_t$ τέτοιες τριάδες. Οπότε

$$\binom{A(x)}{2} \geq x - 1 - A(x) - a_t$$

το οποίο δίνει

$$A(x)^2 + A(x) \geq 2x - 2 - 2a_t \geq 1.5x$$

για $x \geq 4(1 + a_t)$. Αυτό όμως δίνει

$$A(x) \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 6x}}{2} \geq C\sqrt{x}$$

για $x \geq \max\{4(1 + a_t), 100\}$, όπου $C = \sqrt{5}/2$.

- (61) Τα σημεία $(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)$ δίνουν $2n - 3$ κόκκινα σημεία. Για να δείξουμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο, έστω A, B τα σημεία με την μέγιστη απόσταση και έστω $C_1, \dots, C_{n-2}$ τα υπόλοιπα σημεία. Δείξτε ότι τα μέσα των $AB, AC_1, \dots, AC_{n-2}, BC_1, \dots, BC_{n-2}$ είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
- (62) Αν $A(x), B(x)$ οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις των $a_n/n!$ και $b_n/n!$, τότε

$$A(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^m = (\cosh x - 1)^m$$

και

$$B(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^{2m} = (\sinh x)^{2m} = \left(\frac{\cosh 2x - 1}{2} \right)^m = \frac{A(2x)}{2^m}.$$

Επομένως $b_n = 2^{n-m} a_n$.

- (63) Για κάθε μετάθεση π του $[n]$ ορίζουμε

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^n |\pi(i) - i|$$

Αν στο κελί i τοποθετηθεί ο αριθμός $\pi(i)$ θέλουμε να βρούμε μια ακολουθία βημάτων που θα επαναφέρει κάθε αριθμό στο κελί του και θα έχει συνολικό

κόστος το πολύ $f(\pi)$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $f(\pi)$. Η περίπτωση $f(\pi) = 0$ είναι προφανής αφού τότε η π είναι η ταυτοτική μετάθεση.

Έστω λοιπόν ότι η π δεν είναι ταυτοτική. Για το επαγωγικό βήμα ισχυρίζομαι ότι αρκεί να βρούμε i, j με $i \leq \pi(j) < \pi(i) \leq j$. Πράγματι αν $\pi(j) = k$ και $\pi(i) = \ell$ τότε κάνουμε την εναλλαγή μεταξύ των k και ℓ με συνολικό κόστος $2(\ell - k)$. Έστω ρ η καινούργια μετάθεση. Οι δυο μεταθέσεις διαφέρουν μόνο στα i και j οπότε

$$\begin{aligned} f(\pi) - f(\rho) &= [|\pi(i) - i| + |\pi(j) - j|] - [|\rho(i) - i| + |\rho(j) - j|] \\ &= [(\ell - i) + (j - k)] - [(k - i) + (j - \ell)] \\ &= 2(\ell - k) > 0 \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να μετατρέψουμε την ρ στην ταυτοτική μετάθεση με συνολικό κόστος το πολύ $f(\rho)$ οπότε μπορούμε να μετατρέψουμε και την π στην ταυτοτική με συνολικό κόστος το πολύ $2(\ell - k) + f(\rho) = f(\pi)$.

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι αν η π δεν είναι ταυτοτική τότε μπορούμε να βρούμε i, j με $i \leq \pi(j) < \pi(i) \leq j$.

Έστω t ελάχιστο ώστε $t \neq \pi(t)$. Κοιτάμε την ακολουθία $t, \pi(t), \pi^2(t), \dots$. Οι αριθμοί δεν μπορεί να είναι όλοι διαφορετικοί οπότε υπάρχει ελάχιστο k ώστε $\pi^{k+1}(t) < \pi^k(t)$. Τότε υπάρχει και $0 \leq r < k$ ώστε $\pi^r(t) \leq \pi^{k+1}(t) < \pi^{r+1}(t)$. Επειδή εκ κατασκευής είναι και $\pi^{r+1}(t) \leq \pi^k(t)$ μπορούμε να πάρουμε $i = \pi^r(t)$ και $j = \pi^k(t)$.

- (64) Παρατηρούμε ότι αρχικά για κάθε πολυώνυμο f που είναι γραμμένο στον πίνακα έχουμε $f'(2) = 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι αυτή η συνθήκη διατηρείται σε κάθε βήμα. Όμως για $f_n(x) = x^n - 1$ είναι $f'_n(2) = n2^{n-1} \neq 0$. Άρα δεν μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο.
- (65) Δουλεύουμε mod 48. Ο Βασίλης λέει κατά σειρά (αν χρειαστεί) τους 2, 3, 4, 6, 16, 12 και κερδίζει σίγουρα.
- (66) Στο τελευταίο επίπεδο, γράφουμε 0 στην θέση των μπλέ δίσκων και 1 στην θέση των κόκκινων δίσκων. Σε κάθε δίσκο των άλλων επιπέδων έχουμε γραμμένο το άθροισμα των αριθμών των δύο δίσκων που βρίσκονται από κάτω του. Παρατηρούμε από τις συνθήκες ότι ένας δίσκος είναι μπλε αν και μόνο αν ο αριθμός που έχει γραμμένο είναι άρτιος.

Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal από την ανάποδη, παρατηρούμε ότι αν ο k -οστός δίσκος του τελευταίου επιπέδου ισούται με 1, τότε συνεισφέρει $\binom{2013}{k-1}$ στον αριθμό του δίσκου του πρώτου επιπέδου.

Από το θεώρημα του Kummer, ο $\binom{2013}{k-1}$ είναι περιττός. Εφόσον έχουμε 2014 κόκκινους δίσκους έπεται ότι ο αριθμός στον δίσκο του πρώτου επιπέδου είναι άρτιος, και άρα ο δίσκος είναι κόκκινος.

- (67) Θα δείξουμε αρχικά ότι αν S_n με $|S_n| = n$ και a_n ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βρούμε αντιπροσώπους, τότε $a_n = na_{n-1}$ για κάθε $n \geq 5$.

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας k ο αντιπρόσωπος του $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Έστω τώρα ένα μη κενό σύνολο T με $k \in T$ και $|T| \leq n - 2$. Τότε μπορώ να γράψω $S_n = T \cup A \cup B$ όπου A, B, T μη κενά και ξένα μεταξύ τους. Αναγκαστικά συμπεραίνω ότι ο k είναι αντιπρόσωπος του A .

Έστω τώρα $k \in T$ και $|T| = n - 1$. Αν i ο αντιπρόσωπος του T με $i \neq k$, μπορώ να γράψω $T = \{i, k\} \cup A \cup B$ ως ένωση μη κενών ξένων μεταξύ τους συνόλων. (Αφού $|T| \geq 4$.) Τότε ο αντιπρόσωπος του T δεν μπορεί να είναι ο k αφού δεν είναι αντιπρόσωπος κανενός από τα $\{i, k\}, A, B$.

Επομένως κάθε T με $k \in T$ έχει αντιπρόσωπο k . Για τα υπόλοιπα υποσύνολα που δεν περιέχουν το k έχουμε a_{n-1} τρόπους για να επιλέξουμε αντιπροσώπους και όλοι είναι συμβατοί με την επιλογή ο k να είναι αντιπρόσωπος κάθε συνόλου που τον περιέχει.

Επειδή έχουμε n τρόπους να επιλέξουμε το k , τότε ο ισχυρισμός μας έπεται. Επαγωγικά καταλήγουμε στο $a_n = n!a_4/24$. Για το a_4 , επιλέγω με 4 τρόπους τον αντιπρόσωπο του $\{1, 2, 3, 4\}$. ωρίς βλάβη της γενικότητας είναι το 1. Αυτό σημαίνει πως τα $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ πρέπει να έχουν αντιπρόσωπο το 1. Για όλα τα υπόλοιπα σύνολο μπορώ να επιλέξω αυθαίρετα χωρίς να παραβιάζονται οι συνθήκες. Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $4 \cdot 2^3 \cdot 3^4 = 4! \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 4! \cdot 108$. Οπότε είναι $a_n = (108)n!$ και $a_{2014} = (108)(2014)!$.

- (68) Ο A δεν κερδίζει για ακριβώς $n - 1$ τιμές του s .

Για το άνω φράγμα: Αν υπήρχαν n διαφορετικές τιμές που δεν κέρδιζε, τότε καμία δεν είναι πολλαπλάσιο του n , οπότε θα υπήρχαν $a < b$ με $a \equiv b \pmod n$ ώστε ο A δεν κερδίζει ούτε για $s = a$ ούτε για $s = b$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού για $s = b$ ο A μπορεί στην πρώτη του κίνηση να αφαιρέσει $b - a$ πέτρες. Οπότε θα μείνουν a πέτρες με τον B να παίζει πρώτο.

Έστω τώρα ότι ο A δεν κερδίζει μόνο για τις τιμές $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ όπου $k < n - 1$. Υπάρχει $i \neq 0 \pmod n$ ώστε κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν ισούται με $i \pmod n$. Έστω N αρκετά μεγάλο. (Αρκεί $N!N > n + a_k + 2$.) Θεωρούμε τους αριθμούς $N! + a_k + 2, N! + a_k + 3, \dots, (N + 1)!$. Υπάρχουν τουλάχιστον n τέτοιοι αριθμοί και είναι όλοι διαδοχικοί οπότε τουλάχιστον ο ένας, έστω ο M είναι ισότιμος με $i \pmod n$. Έστω $s = M$. Τότε:

- (α) $M - 1 > a_k$ οπότε αν αφαιρέσει μία πέτρα θα ξεκινά ο B με $s > a_k$ οπότε και θα κερδίζει, άτοπο.
- (β) $M - rn \notin \{0, a_1, \dots, a_k\}$ για κάθε r οπότε αν αφαιρέσει θετικό πολλαπλάσιο του n από πέτρες θα ξεκινά ο A με $s \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ οπότε και θα κερδίζει, άτοπο.
- (γ) Τέλος για κάθε πρώτο p είναι $M - p \notin \{0, a_1, \dots, a_k\}$ αφού για κάθε j είναι $N! + 2 \leq M - a_j \leq (N + 1)!$ οπότε ο $M - p$ είναι πολλαπλάσιο του

N . (Για παρόμοιο λόγο ο M δεν μπορεί να είναι πρώτος.) Άρα και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.

Οπότε πράγματι ο A δεν κερδίζει για ακριβώς $n - 1$ τιμές.

- (69) Μπορούμε αν σημειώσουμε όλα τα κελιά της γραμμής $\lfloor n/2 \rfloor$. Τότε κάθε $m \times m$ υποσκακιέρα με $m > n/2$ περιέχει τουλάχιστον μια γραμμή με όλα τα κελιά σημειωμένα, οπότε κάθε διαγώνιος της περιέχει τουλάχιστον ένα σημειωμένο κελί.

Για $n = 2k + 1$ κοιτάζουμε όλες τις διαγωνίους

$$A_i = \{(x, y) : x - y = k + 1 - i\}$$

για $i \in \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$. Η A_i έχει ακριβώς $k + i$ σημεία για $1 \leq i \leq k + 1$ και ακριβώς $3k + 2 - i$ για $k + 1 \leq i \leq 2k + 1$. Οπότε όλες είναι διαγώνιοι κάποιας $m \times m$ υποσκακιέρας με $m > n/2$. Επειδή έχουμε n τέτοιες διαγωνίους που είναι όλες ξένες μεταξύ τους, χρειαζόμαστε να σημειώσουμε τουλάχιστον n σημεία, από ένα τουλάχιστον σε κάθε διαγώνιο.

Για $n = 2k$ η απόδειξη είναι παρόμοια κοιτάζοντας τις διαγωνίους $A_i = \{(x, y) : x + y = k + 2i\}$ για $1 \leq i \leq k$ και $B_j = \{(x, y) : x - y = k - (2j - 1)\}$ για $1 \leq j \leq k$. Προφανώς οι A_i είναι ξένες μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει και για τις B_j . Οι A_i με τις B_j είναι επίσης ξένες μεταξύ τους αφού αν $x + y = k + 2i$ και $x - y = k - (2j - 1)$ τότε $2x = 2(k - j) + 1$, άτοπο. Ο υπόλοιπος έλεγχος είναι όπως και προηγουμένως.

- (70) Χρειαζόμαστε σίγουρα $k \geq 2n - 1$. Π.χ. αν $a_1 = \dots = a_{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$ τότε θέλουμε σίγουρα $2n - 1$ ομάδες αφού κάθε ομάδα μπορεί να περιέχει μόνο ένα από αυτούς τους αριθμούς.

Θα δείξουμε τώρα ότι $2n - 1$ ομάδες είναι αρκετές: Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d$. Προχωράμε λαίμαργα ξεκινώντας από τον a_1 και βάζοντας τον κάθε αριθμό στην πρώτη διαθέσιμη ομάδα που μπορούμε. Έστω λοιπόν ότι καταφέραμε να βάλουμε τους $a_1, \dots, a_{t-1}$ (για κάποιο $t \leq d$) σε κάποιες ομάδες αλλά δεν μπορούμε να βάλουμε τον a_t σε καμία.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε μία από τις $2n - 1$ ομάδες έχει ήδη άθροισμα μεγαλύτερο του $1 - a_t$. Οπότε πρέπει

$$n - a_t \geq a_1 + \dots + a_{t-1} > (2n - 1)(1 - a_t)$$

το οποίο δίνει $a_t > 1/2$.

Αν όμως $a_t > 1/2$, τότε $a_i > 1/2$ για κάθε $1 \leq i \leq t$. Οπότε

$$n \geq a_1 + \dots + a_t > t/2$$

που δίνει $t \leq 2n - 1$. Τότε όμως οι $a_1, \dots, a_{t-1}$ έχουν μπει στις πρώτες $t - 1 \leq 2n - 2$ ομάδες οπότε υπάρχει κενή διαθέσιμη ομάδα για τον a_t , άτοπο.

- (71) Έστω G το γράφημα όπου ενώνουμε δυο ιμόνια αν και μόνο αν βρίσκονται σε κατάσταση διεμπλοκής. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $\chi(G)$.

Αν $\chi(G) = 1$ τότε το ζητούμενο είναι άμεσο. Αν όχι τότε αφαιρούμε σε κάθε βήμα μια κορυφή περιττού βαθμού μέχρι να καταλήξουμε σε ένα γράφημα G_1 όπου κάθε κορυφή είναι άρτιου βαθμού. Ο χρωματικός αριθμός δεν αυξήθηκε. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε πως παρέμεινε ο ίδιος αφού αλλιώς τελειώσαμε από την επαγωγική υπόθεση. Έστω ότι $\chi(G_1) = k$ και έστω $C_1, \dots, C_k$ ένας διαμερισμός των κορυφών του G_1 σε ανεξάρτητα σύνολα. Τώρα εφαρμόζουμε την διαδικασία (β) για να πάρουμε ένα νέο γράφημα G_2 . Έστω $C'_1, \dots, C'_k$ τα αντίστοιχα αντίγραφα. Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή του G_2 έχει περιττό βαθμό. Το σύνολο $C_1 \cup C'_2$ είναι ανεξάρτητο οπότε εφαρμόζοντας διαδοχικά το βήμα (α) μπορούμε να αφαιρέσουμε όλες τις κορυφές του για να πάρουμε ένα γράφημα G_3 . Τέλος τα σύνολα $C_i \cup C'_{i+1}$ για $2 \leq i \leq k$, όπου $C'_{k+1} = C'_1$ είναι ανεξάρτητα οπότε $\chi(G_3) \leq k - 1$ και τελειώσαμε από την επαγωγική υπόθεση.

- (72) Οι αριθμοί είναι ίσοι. Γενικά αν αντικαταστήσουμε το 10^6 με n και γράψουμε T_n για τον αριθμό των ακολουθιών τότε ισχύει και για τις δύο ακολουθίες ο αναγωγικός τύπος $T_n = T_{n-1} + T_{\lfloor n/2 \rfloor}$ με $T_1 = 1$.

Για τις Αδριατικές ακολουθίες ο αναγωγικός τύπος είναι άμεσος. Για τις Τυρρηνικές παρατηρούμε ότι $T_n = T_{n-1} + S_{n-1}$ όπου S_n είναι ο αριθμός των $(n-1)$ -Δαλματικών ακολουθιών τις οποίες ορίζω ως εξής: Ονομάζω μια ακολουθία θετικών ακεραίων n -Δαλματική αν κάθε στοιχείο της είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των προηγούμενων του στοιχείων, και επιπλέον, το άθροισμα όλων των στοιχείων της ισούται με n .

Αρκεί να δείξω ότι $S_n = T_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Θα βρούμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ n -Δαλματικών και $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ -Τυρρηνικών ακολουθιών.

Έστω n -Δαλματική ακολουθία $x_1, x_2, \dots, x_k$. Πρέπει $x_k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ αφού αν $x_k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ τότε είναι και $x_1 + \dots + x_{k-1} < \lfloor n/2 \rfloor$ και άρα $x_1 + \dots + x_k < n$, άτοπο. Αφού λοιπόν $x_k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$, τότε $x_1 + \dots + x_{k-1} \leq \lceil n/2 \rceil - 1 < \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Επομένως η ακολουθία $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ -Τυρρηνική.

Η πιο πάνω αντιστοιχία είναι προφανώς ένα προς ένα. Είναι επίσης και επί. Πράγματι αν $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ -Τυρρηνική, τότε $\lfloor (n+1)/2 \rfloor > x_1 + \dots + x_{k-1}$. Οπότε $n - (x_1 + \dots + x_{k-1}) > x_1 + \dots + x_{k-1}$ και άρα η $x_1, \dots, x_{k-1}, n - (x_1 + \dots + x_{k-1})$ είναι όντως n -Δαλματική με εικόνα την $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

- (73) Κατασκευάζοντας το διάγραμμα Venn για τα σύνολα $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του U μπορεί να ανήκει σε μία από 15 «ατομικές» περιοχές εκ των οποίων ακριβώς μία περιέχεται στο $X'_1 \cap X'_2 \cap X'_3$, από ακριβώς δύο σε κάθε ένα εκ των $X_1 \cap X'_2 \cap X'_3, X'_1 \cap X'_2 \cap X'_3$ και $X_1 \cap X'_2 \cap X'_3$, από ακριβώς δύο σε κάθε ένα εκ των $X_1 \cap X_2 \cap X'_3, X_1 \cap X'_2 \cap X'_3$ και $X'_1 \cap X_2 \cap X_3$ και δύο επίσης που περιέχονται στο $X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Αυτά είναι απολύτως συμ-

μετρικά στα X_1, X_2, X_3 και άρα το $f(a, b, c)$ δεν αλλάζει από μετάθεση των a, b, c .

- (74) Μπορεί να επιτευχθεί αν και μόνο αν το mn δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, ή το άθροισμα όλων των αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

Για το αναγκαίο: Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών παραμένει αναλλοίωτο mod 3. Επομένως αν το άθροισμα δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε όταν κάνουμε όλους τους αριθμούς, το άθροισμα θα εξακολουθεί να μην είναι πολλαπλάσιο του 3. Το άθροισμα όμως θα είναι πολλαπλάσιο του mn οπότε το mn δεν πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Για το ικανό: Προσθέτοντας 1 ή 2 σε κάθε τετραγωνάκι αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το άθροισμα σε όλα τα τετραγωνάκια είναι πολλαπλάσιο του 3. (Αν το άθροισμα δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε από την συνθήκη το $4mn$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 οπότε μπορούμε με αυτό τον τρόπο να κάνουμε το άθροισμα πολλαπλάσιο του 3.) Ασφαλώς αυτό δεν επηρεάζει την επίτευξη του στόχου.

Χωρίζουμε τον πίνακα σε mn 2×2 τετραγωνάκια. Σε κάθε 2×2 τετραγωνάκι προσθέτουμε τους αριθμούς που εμφανίζονται στα τετραγωνάκια τους. Ο πρώτος μας στόχος είναι να κάνουμε όλα αυτά τα αθροίσματα ίσα με $0 \pmod 3$. Παρατηρούμε ότι αν έχουμε δυο γειτονικά τετραγωνάκια μπορούμε να αυξήσουμε το άθροισμα στο ένα κατά 2 και το άθροισμα στο άλλο κατά 1. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε σε κάθε σειρά να κάνουμε όλα τα 2×2 τετραγωνάκια να έχουμε άθροισμα πολλαπλάσιο του 3 εκτός ίσως από το τελευταίο. Κοιτάζοντας τώρα την τελευταία στήλη μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για αυτά τα 2×2 τετραγωνάκια εκτός ίσως από το τελευταίο. Οπότε όλα τα 2×2 τετραγωνάκια έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 3 εκτός ίσως από το κάτω δεξιά. Επειδή όμως το άθροισμα όλων είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε και το τελευταίο έχει άθροισμα πολλαπλάσιο του 3.

Δεύτερος μας στόχος είναι σε κάθε 2×2 τετραγωνάκι ξεχωριστά να κάνουμε όλα τα στοιχεία του ίσα. Αυτό είναι εύκολο. Το άθροισμα σε κάθε 2×2 τετραγωνάκι εξακολουθεί να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Τρίτος στόχος είναι να κάνουμε όλα τα στοιχεία ίσα. Και αυτό είναι εύκολο αφού σε κάθε 2×2 τετραγωνάκι μπορούμε να αυξήσουμε όλους τους αριθμούς κατά 3.

- (75) Ας ξεκινήσουμε από μια αυθαίρετη ωρολογιακή αρίθμηση $a_1, \dots, a_n$. Ορίζουμε επίσης επαγωγικά $a_i = a_{i-n}$ για $i > n$.

Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Για κάθε $i \geq 1$, επειδή δεν μπορούμε να ξεκινήσουμε την αρίθμηση από το a_i αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $i \leq j \leq i + n - 1$ ώστε $a_i + \dots + a_j < j - i$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ακολουθία $0 = i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ ώστε

$$a_{i_r+1} + \dots + a_{i_{r+1}} < i_{r+1} - i_r - 1 \quad (*)$$

για κάθε φυσικό r .

Έστω τώρα $k < \ell$ ώστε $i_k \equiv i_\ell \pmod n$. Έστω $i_\ell - i_k = dn$. Προσθέτοντας τις ανισότητες (*) για $k \leq r \leq \ell - 1$ λαμβάνουμε

$$d(n-1) = a_{i_{k+1}} + \cdots + a_{i_\ell} < i_\ell - i_k - (\ell - k) = dn - (\ell - k)$$

Οπότε $d > \ell - k$. Αλλά, επειδή $i_{r+1} - i_r \leq n - 1$, είναι και

$$dn = i_\ell - i_k \leq (\ell - k)(n - 1)$$

που δίνει $\ell - k > d$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και άρα το ζητούμενο ισχύει.

- (76) Έστω το n -γωνο $A_1 A_2 \cdots A_n$. Για $n = 2m$ φέρουμε τις διαγωνίους της μορφής $A_i A_j$ όπου $i + j \equiv 1 \pmod n$ ή $i + j \equiv -1 \pmod n$. Υπάρχουν ακριβώς $2m - 2$ τέτοιες διαγωνίους. (Δεν μετράμε τις πλευρές $A_1 A_{2m}, A_{2m-1} A_{2m}, A_m A_{m+1}$ και $A_m A_{m-1}$.) Κάθε τέτοια διαγώνιος είναι καλή: Η $A_i A_{1-i}$ τέμνεται μόνο από την $A_{i-1} A_{-i}$ και η $A_i A_{-1-i}$ τέμνεται μόνο από την $A_{i+1} A_{-i}$.

Οπότε έχουμε τουλάχιστον $n - 2$ καλές διαγωνίους για n άρτιο και άρα τουλάχιστον $n - 3$ καλές διαγωνίους για n περιττό. Θα δείξουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε περισσότερες.

Ονομάζω μια από τις διαγωνίους που φέραμε εξαιρετική αν τέμνει το πολύ μία άλλη διαγώνιο. Έστω $f(n)$ ο μέγιστος αριθμός των εξαιρετικών διαγωνίων. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(n) = n - 2$ αν n άρτιος και $f(n) = n - 3$ αν n περιττός.

Αν δεν υπάρχουν καλές διαγωνίους τότε όντως υπάρχουν το πολύ $n - 3$ εξαιρετικές. Έστω λοιπόν μια καλή διαγώνιος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ενώνει τα A_1 και A_m . Οπότε χωρίζει το πολύγωνο στα πολύγωνα $A_1 A_2 \cdots A_m A_1$ και $A_m A_{m+1} \cdots A_1 A_m$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία διαγώνιος ℓ μεταξύ των δυο κομματιών. Αγνοώντας την, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε το πολύ $f(m)$ εξαιρετικές διαγωνίους στο πρώτο πολύγωνο και $f(n - m)$ εξαιρετικές διαγωνίους στο δεύτερο πολύγωνο. Προσθέτοντας την ℓ πίσω, ίσως καταστρέψουμε κάποιες από αυτές τις εξαιρετικές διαγωνίους αλλά δεν δημιουργούμε καινούργιες εκτός ίσως από την ίδια την ℓ . Οπότε έχουμε το πολύ $f(m) + f(n - m) + 2$ εξαιρετικές διαγωνίους. Το ζητούμενο έπεται από την επαγωγική υπόθεση παρατηρώντας ότι αν n περιττός τότε τουλάχιστον ένας από τους n και $n - m$ είναι και αυτός περιττός.

- (77) Παρατηρούμε ότι κάθε φορά αφαιρούμε ένα χαρτί που βρίσκεται σε περιττή θέση και ένα που βρίσκεται σε άρτια θέση. Επομένως για να κερδίσει ο Ανδρέας, τα μισά κόκκινα πρέπει να βρίσκονται σε περιττές θέσεις και τα μισά σε άρτιες. Επίσης, αν χάσει ο Ανδρέας τότε αναγκαστικά έχουν μείνει κάποια κόκκινα χαρτιά τα οποία είτε όλα βρίσκονται σε περιττές θέσεις, είτε όλα σε άρτιες. Οπότε η πιο πάνω αναγκαία συνθήκη είναι και ικανή.

Άρα η πιθανότητα νίκης είναι $\frac{\binom{26}{13}^2}{\binom{52}{26}}$.

(78) Για μια διάταξη $(m_1, \dots, m_n)$ θέτω

$$S = S(m_1, \dots, m_n) = \lceil \frac{m_1}{2} \rceil + \dots + \lceil \frac{m_n}{2} \rceil.$$

Θα δείξουμε ότι μια διάταξη $(m_1, \dots, m_n)$ είναι «μέγιστα μη επιλύσιμη» αν και μόνο αν $S = n - 1$ και επιπλέον κάθε m_i είναι άρτιος.

Αρκεί να δείξουμε ότι μια διάταξη είναι μη επιλύσιμη αν και μόνο αν $S \leq n - 1$.

Πράγματι αν το δείξουμε αυτό, για να είναι η διάταξη $(m_1, \dots, m_n)$ μέγιστα μη επιλύσιμη πρέπει να έχουμε $S(m_1, \dots, m_n) = n - 1$ αφού αν

$$S(m_1, \dots, m_n) \leq n - 2$$

τότε αν προσθέσουμε μια μπάλα στο κουτί i θα έχουμε

$$S(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + 1, m_{i+1}, \dots, m_n) \leq S(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_n) + 1 \leq n - 1$$

που πάλι δίνει μη επιλύσιμη διάταξη. Ομοίως πρέπει κάθε m_i να είναι άρτιος αφού αν π.χ. m_j περιττός τότε προσθέτοντας μια μπάλα στο κουτί j παίρνουμε

$$S(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j + 1, m_{j+1}, \dots, m_n) \leq S(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j, m_{j+1}, \dots, m_n) \leq n - 1$$

οπότε πάλι έχουμε μη επιλύσιμη διάταξη. Τέλος, αν όλα τα m_i είναι άρτια, $S(m_1, \dots, m_n) = n - 1$ και προσθέσουμε μια μπάλα στο κουτί j παίρνουμε

$$S(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j + 1, m_{j+1}, \dots, m_n) \leq S(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j, m_{j+1}, \dots, m_n) + 1 = n$$

που δίνει όντως επιλύσιμη διάταξη

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι μια διάταξη είναι μη επιλύσιμη αν και μόνο αν $S \leq n - 1$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $S(m_1, \dots, m_n) \geq n$. Αν όλα τα κουτιά έχουν από μία τουλάχιστον μπάλα δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτα. Αν όχι τότε πρέπει $\lfloor m_i/2 \rfloor \geq 2$ για κάποιο i και άρα $m_i \geq 3$ για κάποιο i . Παίρνουμε δύο μπάλες από το κουτί i , τις αφαιρούμε, πετάμε την μία, και βάζουμε την άλλη σε ένα κουτί χωρίς μπάλα. Παρατηρούμε ότι με κάθε τέτοιο βήμα το S παραμένει αναλλοίωτο. Παρατηρούμε επίσης ότι με κάθε τέτοιο βήμα ο αριθμός των κουτιών που έχουν μπάλα αυξάνεται. Οπότε μπορούμε με τέτοια βήματα να κάνουμε όλα τα κουτιά να έχουν τουλάχιστον μία μπάλα.

Αν από την άλλη $S \leq n - 1$, τότε επειδή σε κάθε βήμα το S δεν αυξάνεται δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε διάταξη όπου κάθε κουτί έχει τουλάχιστον μία μπάλα αφού σε αυτήν την διάταξη έχουμε $S = n$.

(79) Θα δείξουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει αν και μόνο αν ο N είναι άρτιος μεγαλύτερος του 2.

Προφανώς δεν μπορούμε να το κάνουμε για $N = 1, 2$. Για $N = 3$ πάλι δεν μπορούμε να το κάνουμε αφού αν συγκρίνουμε τα νομίσματα 1 και 2 και βρούμε ότι είναι ίσα, τότε γνωρίζουμε ότι το κάλπινο είναι το 3 αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν

είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο. Επιπλέον δεν μπορούμε να κάνουμε άλλη ζύγιση για να το μάθουμε.

Γενικά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε για $N = 2n + 1$ περιττό αφού αν συγκρίνουμε δυο σύνολα A, B με k νομίσματα το κάθε ένα και βρούμε ότι είναι ίσα τότε είναι όλα αυθεντικά οπότε μας μένουν $2(n - k) + 1$ νομίσματα να βρούμε το κάλπικο που επαγωγικά δεν γίνεται.

Για $n = 2k$ με $k > 1$ συγκρίνουμε πρώτα τα σύνολα $\{1, 2, \dots, k\}$ και $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι το πρώτο σύνολο είναι βαρύτερο. Συγκρίνουμε τώρα τα σύνολα $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ και $\{k, k + 1, \dots, 2k - 2\}$.

Αν έχουν το ίδιο βάρος σημαίνει ότι το κάλπικο είναι ένα από τα $2k - 1, 2k$ και επιπλέον είναι ελαφρύ. Συγκρίνοντάς τα μεταξύ τους μπορούμε να το βρούμε.

Αν το $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ είναι ελαφρύτερο τότε το κάλπικο νόμισμα είναι το k και είναι βαρύ.

Αν το $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ είναι βαρύτερο τότε είτε το κάλπικο είναι βαρύ και είναι ένα από τα $1, 2, \dots, k - 1$ και είναι βαρύ, είτε είναι ελαφρύ και είναι ένα από τα $k + 1, \dots, 2k - 2$. Χωρίζουμε το $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ σε δυάδες και πιθανόν σε ένα μόνο του νόμισμα (αν k άρτιος). Κάνουμε το ίδιο και για το $\{k + 1, \dots, 2k - 2\}$. (Εδώ έχουμε ένα μόνο του αν k περιττός.) Συγκρίνουμε τα νομίσματα κάθε δυάδας μεταξύ τους. Αν σε μια δυάδα έχουμε διαφορετικό βάρος τότε το κάλπικο είναι το βαρύ αν η δυάδα προέρχεται από το $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ ή είναι το ελαφρύ αν η δυάδα προέρχεται από το $\{k + 1, \dots, 2k - 2\}$. Τέλος αν σε όλες τις δυάδες η ζυγαριά δίνει ίδιο βάρος τότε το κάλπικο είναι το μοναδικό μόνο του νόμισμα και ανάλογα αν προέρχεται από το πρώτο ή το δεύτερο σύνολο είναι ελαφρύ ή βαρύ.

- (80) Έστω μια βέλτιστη A -διαμέριση του n και έστω ότι χρησιμοποιεί m διαφορετικά μέρη, έστω τα $a_1, \dots, a_m$ με $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Θέτω $B = \{a_1, \dots, a_m\}$

Για κάθε $1 \leq t < s \leq m$ οποιοδήποτε άθροισμα t στοιχείων του B πρέπει να είναι διαφορετικά από οποιοδήποτε άθροισμα s στοιχείων του B αφού αλλιώς μπορώ να αντικαταστήσω στην βέλτιστη A -διαμέριση μία εμφάνιση από κάθε ένα από αυτά τα s στοιχεία με μία εμφάνιση από κάθε ένα από τα t στοιχεία παίρνοντας μια A -διαμέριση με λιγότερα στοιχεία, άτοπο.

Ισχυρίζομαι ότι για κάθε $1 \leq t \leq m$ υπάρχουν τουλάχιστον $t(m - t) + 1$ διαφορετικά αθροίσματα t στοιχείων του B . Θα το αποδείξω με επαγωγή στο m . Για $m = 1$ είναι $t = 1$ και το ζητούμενο ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $m = k$ και για κάθε $1 \leq t \leq m$. Θέλω να το δείξω για $m = k + 1$. Ξεκινώ παίρνοντας τα $m - t + 1$ αθροίσματα

$$(a_1 + \dots + a_{t-1}) + a_t, (a_1 + \dots + a_{t-1}) + a_{t+1}, \dots, (a_1 + \dots + a_{t-1}) + a_m$$

Όλα τα υπόλοιπά μου αθροίσματα θα χρησιμοποιούν το a_m . Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν τουλάχιστον $(t - 1)((m - 1) - (t - 1)) + 1$ τέτοια εκ των οποίων ήδη χρησιμοποιήσα το 1. Όλα αυτά τα αθροίσματα είναι σίγουρα μεγαλύτερα από αυτά που έχω ήδη γράψει (εκτός από το ένα που όπως είπαμε είναι κοινό). Άρα συνολικά υπάρχουν

$$(m - t + 1) + (t - 1)(m - t) = t(m - t) + 1$$

διαφορετικά αθροίσματα.

Αφού κάθε « t -άθροισμα» είναι διαφορετικό από κάθε « s -άθροισμα», συνολικά υπάρχουν

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^m t(m-t) + 1 &= \frac{m^2(m+1)}{2} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m \\ &= \frac{m(3m^2 + 3m - 2m^2 - 3m - 1 + 6)}{6} \\ &= \frac{m(m^2 + 5)}{6} > \frac{m^3}{6}\end{aligned}$$

διαφορετικά αθροίσματα. Όμως υπάρχουν το πολύ n τέτοια αθροίσματα και άρα $m < 6\sqrt[3]{n}$.

- (81) Μπορούμε να έχουμε 180 ζεύγη αν κοιτάξουμε τους αριθμούς

$$\{2^m 3^n : m, n \in \{1, 2, \dots, 10\}\}.$$

Θα δείξουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε περισσότερα.

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα με κορυφές τους αριθμούς όπου ενώνουμε δύο αν και μόνο αν έχουν πηλίκο ίσο με 2. Παρατηρούμε ότι το γράφημα είναι ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους μονοπατιών. (Μερικά πιθανώς να αποτελούνται από μία μόνο κορυφή) Έστω ότι έχουμε k μονοπάτια. Αυτό μας δίνει ακριβώς $100 - k$ ακμές.

Ομοίως κατασκευάζουμε μονοπάτια για το πηλίκο να ισούται με 3. Έστω ότι έχουμε ℓ τέτοια μονοπάτια οπότε έχουμε $100 - \ell$ ακμές.

Συνολικά λοιπόν έχουμε $200 - \ell - k$ καλά ζεύγη. Παρατηρούμε τώρα ότι δεν μπορούν δυο αριθμοί να ανήκουν στο ίδιο μονοπάτι τόσο στο πρώτο όσο και στο δεύτερο γράφημα. Πρέπει λοιπόν να ισχύει ότι $k\ell \geq 100$. Τότε όμως $k + \ell \geq 2\sqrt{100} = 20$ και άρα έχουμε το πολύ 180 καλά ζεύγη.

- (82) Ας ονομάσουμε $P(N, m)$ το παιχνίδι όπου ξεκινάμε με N νομίσματα και στην πρώτη του κίνηση ο Αντρέας μπορεί να αφαιρέσει το πολύ m νομίσματα. (Μετά οι κανόνες είναι ίδιοι όπως στο πρόβλημα.)

Από το θεώρημα Zeckendorf γράφουμε τον N ως άθροισμα μη διαδοχικών αριθμών Fibonacci. Έστω

$$N = F_{k_1} + \dots + F_{k_r}$$

όπου $k_r \geq 2$ και $k_i > k_{i+1} + 1$ για κάθε $1 \leq i \leq r - 1$. (Υπάρχει μοναδικός τρόπος να γίνει αυτό.)

Θα δείξουμε ότι ο Αντρέας κερδίζει αν και μόνο αν $m \geq F_{k_r}$ και ότι σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να κερδίσει αφαιρώντας ακριβώς k_r νομίσματα στην πρώτη του κίνηση.

Θα αποδείξουμε αυτό με επαγωγή στο N . Για $N = 1, 2, 3$ είναι απλό. Αν ο Αντρέας αφαιρέσει F_{k_r} νομίσματα τότε στο τραπέζι θα μείνουν

$$F_{k_1} + \dots + F_{k_{r-1}}$$

νομίσματα και ο Βασίλης θα μπορεί να αφαιρέσει το πολύ

$$2F_{k_r} < F_{k_r} + F_{k_r+1} \leq F_{k_{r-1}}$$

οπότε επαγωγικά ο Βασίλης χάνει.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Αντρέας μπορεί να αφαιρέσει μέχρι $k < F_{k_r}$ νομίσματα και έστω ότι αφαιρεί ακριβώς m νομίσματα. Οπότε μένουν

$$N - m = F_{k_1} + \cdots + F_{k_{r-1}} + (F_{k_r} - m)$$

νομίσματα.

Γράφουμε τον $F_{k_r} - m$ στην αναπαράσταση Zeckendorf ως

$$F_{\ell_1} + \cdots + F_{\ell_s}.$$

Αρκεί να δείξω ότι $F_{\ell_s} \leq 2m$ αφού τότε ο Βασίλης θα δικαιούται να αφαιρέσει F_{ℓ_s} νομίσματα και θα κερδίσει από την επαγωγική υπόθεση.

Πρέπει σίγουρα $\ell_1 < k_r$. Οπότε $F_{k_r} \geq F_{\ell_1} - F_{\ell_1-1}$. Άρα

$$m = F_{k_r} - (F_{\ell_1} + \cdots + F_{\ell_s}) \geq F_{\ell_1-1} - (F_{\ell_2} + \cdots + F_{\ell_s}).$$

Επειδή $\ell - 1 > \ell_2$ είναι $F_{\ell-1} - F_{\ell_2} \geq F_{\ell_2-1}$. Επαγωγικά καταλήγουμε στο

$$m \geq F_{\ell_s-1} \geq F_{\ell_s}/2$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

- (83) Έστω $f(n)$ ο ελάχιστος τέτοιος αριθμός. Είναι άμεσο ότι $f(1) = 4$. Θα δείξουμε ότι $f(2) = 6$ και $f(n) = 2n + 1$ για $n \geq 3$.

Η κατασκευή για $n = 2$ είναι εύκολη. Για $n \geq 2$ τοποθετούμε ένα κομμάτι στην πρώτη στήλη που να ξεκινάει από το δεύτερο τετραγωνάκι. Για κάθε σειρά εκτός από την n και $n + 1$ τοποθετούμε ένα κομμάτι σε αυτήν την σειρά που να αρχίζει από το δεύτερο τετραγωνάκι. Στις σειρές n και $n + 1$ τοποθετούμε από ένα κομμάτι που να τελειώνει στο τελευταίο τετραγωνάκι.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν μπορούμε να καλύψουμε την σκακιέρα με μόνο $2n$ κομμάτια. Αν τα τοποθετήσουμε όλα οριζόντια τότε θέλουμε τουλάχιστον ένα σε κάθε σειρά. Επιπλέον τουλάχιστον ένα από αυτά τα κομμάτια πρέπει να καλύπτει ένα τετραγωνάκι από την πρώτη στήλη. Στην σειρά όμως αυτού του κομματιού θα χρειαστούμε και άλλο ένα κομμάτι, άτοπο.

Οπότε πρέπει να υπάρχουν και οριζόντια και κάθετα κομμάτια. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε τοποθετήσει το πολύ n κάθετα κομμάτια. Έστω ότι έχουμε ένα κάθετο κομμάτι στην στήλη i όπου $1 < i \leq n$. Αφού η διαρρύθμιση είναι μέγιστη δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα κομμάτι ακριβώς στα αριστερά του. Αυτό σημαίνει πως κάποια από τα τετραγωνάκια ακριβώς στα αριστερά του είναι ήδη καλυμμένο και αυτό θα μπορούσε να συμβεί μόνο αν υπάρχει κάθετο κομμάτι και στην στήλη $i - 1$. Επαγωγικά έχουμε κάθετα κομμάτια σε όλες τις στήλες από το 1 ως το i . Ομοίως αν έχουμε ένα κάθετο κομμάτι στην στήλη $n + 1 \leq j \leq 2n$ τότε έχουμε κάθετα κομμάτια σε όλες τις στήλες από j ως $2n$. Οπότε σίγουρα θα υπάρχουν n συνεχόμενες στήλες, έστω οι $r + 1, \dots, r + n$ χωρίς κανένα κάθετο κομμάτι σε αυτές.

Για κάθε σειρά i , αφού η διαρρύθμιση είναι μέγιστη, δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα οριζόντιο κομμάτι που να ξεκινάει από την στήλη $r + 1$. Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα από αυτά τα τετραγωνάκια είναι καλυμμένο. Όμως για να είναι καλυμμένο πρέπει ήδη να είναι τοποθετημένο ένα οριζόντιο κομμάτι στην σειρά i . Τότε όμως έχουμε τουλάχιστον ένα οριζόντιο κομμάτι σε κάθε σειρά και μαζί με το τουλάχιστον ένα κάθετο κομμάτι έχουμε τουλάχιστον $2n + 1$ κομμάτια.

Για $n = 2$ θέλουμε να δείξουμε ότι χρειάζονται τουλάχιστον 6 κομμάτια. Αν υπάρχει μέγιστη διαρρύθμιση με 5 κομμάτια, από την πιο πάνω απόδειξη συμπεραίνουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας πρέπει να υπάρχει ένα κάθετο κομμάτι στην πρώτη στήλη και από ένα οριζόντιο κομμάτι σε κάθε σειρά. Αναγκαστικά στις σειρές που δεν καλύπτει το κάθετο κομμάτι, τα οριζόντια κομμάτια πρέπει να καλύπτουν το δεύτερο και τρίτο τετραγωνάκι. Οπότε δεν μπορεί το κάθετο κομμάτι να ξεκινά από το πρώτο ή το τρίτο τετραγωνάκι (αφού τότε θα χρειαζόμασταν άλλο ένα κάθετο σε αυτήν την στήλη) αλλά πρέπει να ξεκινά από το δεύτερο. Τώρα για να μην χρειάζεται κάθετο κομμάτι στην τελευταία στήλη αναγκαστικά πρέπει τα οριζόντια κομμάτια της δεύτερης και τρίτης σειράς να ξεκινούν από το τρίτο τετραγωνάκι. Τότε όμως χρειαζόμαστε ακόμη ένα κάθετο κομμάτι στην δεύτερη στήλη.

- (84) Έστω $n = 2m$. Οπότε έχουμε $2m$ κορυφές, m^2 ακμές, και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $m^2 - m$ φιλικά ζεύγη.

Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή u ανήκει σε τουλάχιστον

$$\max_{v: v \sim u} (d(v) - 1) = \left(\max_{v: v \sim u} d(v) \right) - 1 \geq \left(\sum_{v: v \sim u} \frac{d(v)}{d(u)} \right) - 1$$

φιλικά ζεύγη. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον

$$\frac{1}{2} \left(\sum_u \sum_{v: v \sim u} \frac{d(v)}{d(u)} \right) - m$$

φιλικά ζεύγη και άρα αρκεί να δείξω ότι

$$\sum_u \sum_{v: v \sim u} \frac{d(v)}{d(u)} \geq m^2$$

Όμως

$$2 \sum_u \sum_{v: v \sim u} \frac{d(v)}{d(u)} = \sum_{\{u,v\}: u \sim v} \left(\frac{d(v)}{d(u)} + \frac{d(u)}{d(v)} \right) \geq \sum_{\{u,v\}: u \sim v} 2 = 2m^2$$

άρα το ζητούμενο έπεται.

- (85) (α) Για κάθε σειρά σημαδεύουμε όλα τα κελιά το οποία το χρώμα τους βρίσκεται το πολύ σε n κελιά. Κάνουμε το ίδιο και για κάθε στήλη. Συνολικά σημαδεύουμε το πολύ $2n(2n+1)$ κελιά. (Έχουμε $2(2n+1)$ σειρές/στήλες και σημαδεύουμε το πολύ n κελιά από κάθε σειρά/στήλη.) Οπότε τουλάχιστον $2n+1$ κελιά έμειναν ασημάδευτα. Κάθε τέτοιο κελί όμως πρέπει να είναι ξεχωριστό.
- (β) Η κατασκευή είναι η ίδια με αυτή του προβλήματος 24.
- (γ) Θα δείξουμε ότι κάθε πίνακας έχει τουλάχιστον $4n$ ξεχωριστά κελιά. Έστω ότι έχουμε a σειρές με περισσότερα άσπρα τετράγωνα, b σειρές με περισσότερα μαύρα, c στήλες με περισσότερα άσπρα και d στήλες με περισσότερα μαύρα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $a \geq n+1$.

Στις a σειρές με περισσότερα άσπρα κελιά έχουμε τουλάχιστον $a(n+1)$ άσπρα κελιά. Στις d στήλες με περισσότερα μαύρα κελιά έχουμε τουλάχιστον $d(n+1)$ μαύρα κελιά. Εκτός από τα ad κελιά που βρίσκονται στην τομή αυτών των

σειρών και στηλών κάθε άλλο από αυτά τα $(a+d)(n+1)$ κελιά πρέπει να είναι ξεχωριστό. Άρα έχουμε τουλάχιστον

$$s = (a+d)(n+1) - ad = (n+1)^2 - (a - (n+1))(d - (n+1))$$

ξεχωριστά κελιά.

Αν $d \leq n+1$ τότε $s \geq (n+1)^2 \geq 4n$.

Αν $n+1 < d \leq 2n$ και επιπλέον $a \leq 2n$ τότε

$$s \geq (n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n.$$

Τέλος ας υποθέσουμε ότι $d = 2n+1$ ή $a = 2n+1$. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d = 2n+1$. Τότε έχουμε τουλάχιστον $(n+1)(2n+1)$ μαύρα κελιά και άρα το πολύ $n(2n+1)$ άσπρα κελιά. Άρα

$$a \leq \frac{n(2n+1)}{n+1} = 2n-1 + \frac{1}{n+1}.$$

Οπότε είναι $a \leq 2n-1$ το οποίο δίνει

$$s \leq (n+1)^2 - n(n-2) = 4n+1.$$

(86) Είναι $k = 6$. Δείτε [εδώ](#) για μια λύση.

(87) Έστω $t_1 > t_2 > \dots > t_{\binom{n}{2}}$ οι διαφορετικές τιμές των εισιτηρίων. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πολύ n ταξιδιώτες ώστε

(α) Κάθε ταξιδιώτης ξεκινά από κάποια πόλη και κάνει διαδοχικά ταξίδια με τρένο με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε εισιτήριο να είναι φθηνότερο του προηγούμενου.

(β) Έχουν γίνει συνολικά $2m$ ταξίδια, από δύο για κάθε τιμή t_i με $1 \leq i \leq m$.

(γ) Κάθε ταξιδιώτης τερματίζει σε διαφορετική πόλη.

Αν το δείξουμε αυτό τότε τελειώσαμε αφού για $m = n$ έχουν γίνει συνολικά $n(n-1)$ από το πολύ n ταξιδιώτες άρα τουλάχιστον ένας έχει κάνει τουλάχιστον $n-1$ ταξίδια.

Η περίπτωση $m = 1$ είναι άμεση. Αν ισχύει η περίπτωση $m = k$ όπου $k < n$, τότε για να αποδείξουμε την περίπτωση $m = k+1$ κάνουμε το εξής: Έστω ότι τα δύο ταξίδια τιμής t_{k+1} είναι από την πόλη A στην πόλη B και ανάποδα.

Αν κάποιος ταξιδιώτης βρίσκεται στο A τότε αυτός (είναι προκαθορισμένος από το (γ)) συνεχίζει το ταξίδι του στο B . Αν δεν υπάρχει τέτοιος ταξιδιώτης, τότε παίρνουμε ένα καινούργιο ταξιδιώτη που κάνει την διαδρομή από το A στο B . Ανάλογα αντιμετωπίζουμε και το ταξίδι από το B στο A .

Τα (α) και (β) προφανώς εξακολουθούν να ισχύουν. Επιπλέον, και στις τέσσερις πιθανές περιπτώσεις που προκύπτουν ανάλογα με τον αν κάποιοι ταξιδιώτες βρίσκονταν στο A και στο B ή όχι, παρατηρούμε ότι και το (γ) εξακολουθεί να ισχύει. Οπότε όντως έχουμε χρησιμοποιήσει και το πολύ n ταξιδιώτες.

(88) Είναι

$$k_1 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \geq 2n$$

από ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $k_1 + \dots + k_n \leq 3n - 1$. Για $n = 3$ είναι

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$$

οπότε είτε $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ και ο ιχυρισμός ισχύει, είτε χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $k_3 = 1$. Τότε $x_3 = x_1 + x_2$ από το οποίο λαμβάνουμε $(k_1 - 1)x_1 = 2x_2$ και $(k_2 - 1)x_2 = 2x_1$. Από αυτό παίρνουμε $(k_1 - 1)(k_2 - 1) = 4$ οπότε είτε $k_1 = k_2 = 3$ είτε $k_1 = 5, k_2 = 2$, είτε $k_1 = 2, k_2 = 5$. Σε όλες τις περιπτώσεις ο ιχυρισμός ισχύει.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Αν $x_{n-1} = x_n$ τότε $k_{n-1} = 1 + x_{n-2}/x_{n-1}$. Άρα $1 < k_{n-1} \leq 2$ και αφού k_{n-1} ακέραιος πρέπει $x_{n-2} = x_{n-1}$. Με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά όλα τα x_i πρέπει να είναι ίσα οπότε $k_1 + \dots + k_n = 2n < 3n - 2$. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση όπου $x_n = x_1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $x_{n-1}, x_1 < x_n$. Τότε είναι $k_n = (x_{n-1} + x_1)/x_n < 2$ οπότε $k_n = 1$, δηλαδή $x_n = x_1 + x_{n-1}$. Επιπλέον αν κοιτάξουμε την ακολουθία $x_1, \dots, x_{n-1}$ παρατηρούμε ότι εξακολουθεί να ικανοποιεί τις συνθήκες αφού

$$\frac{x_{n-2} + x_1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2} + x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = k_{n-1} - 1 \quad \text{και} \quad \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1} = \frac{x_n - x_1 + x_2}{x_1} = k_1 - 1.$$

Από την επαγωγική υπόθεση είναι

$$(k_1 - 1) + k_2 + \dots + k_{n-2} + (k_{n-1} - 1) \leq 3n - 1$$

και αφού $k_n = 1$ το ζητούμενο έπεται.

- (89) Κερδίζει η Αλίκη ως εξής: Μετά από $n \leq 2013$ κινήσεις του κάθε παίκτη, είτε θα υπάρχει κατευθυνόμενο κύκλος, είτε θα υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους n . Πράγματι για $n = 1$ μπορεί να το πετύχει, ενώ αν το πετύχει για $n = k$ τότε στην επόμενη της κίνηση παίζει ως εξής:

Έστω ότι δεν υπάρχει ήδη κατευθυνόμενο κύκλος και έστω ένα μονοπάτι $v_1 \dots v_{k+1}$ μήκους k . Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει τουλάχιστον μια μη κατευθυνόμενη ακμή με τουλάχιστον το ένα άκρο της να ανήκει στο μονοπάτι. Πράγματι υπάρχουν τουλάχιστον

$$(2013 - k)(k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{4025k + 4026 - k^2}{2}$$

τέτοιες ακμές. Όμως μέχρι στιγμής έχουν κατευθυνθεί το πολύ $1001k$ ακμές και

$$\frac{4025k + 4026 - k^2}{2} - 1001k = \frac{2023k + 4026 - k^2}{2} = \frac{k(2023 - k) + 4026}{2} > 0.$$

Αν υπάρχει μη κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ δυο κορυφών του μονοπατιού η Αλίκη μπορεί να την κατευθύνει με τέτοιο τρόπο ώστε να φτιάξει κατευθυνόμενο κύκλο. Αν όχι τότε παίρνει ένα v εκτός μονοπατιού ώστε να υπάρχει μη κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ του v και του μονοπατιού. Έστω $1 \leq i \leq k + 1$ ελάχιστο ώστε η ακμή μεταξύ των v και v_i να μην έχει κατευθυνθεί. Την κατευθύνουμε από το v στο v_i . Αν τώρα j ελάχιστο ώστε να υπάρχει κατευθυνόμενη ακμή από το v στο v_j τότε το μονοπάτι $v_1 \dots v_{j-1}vv_j \dots v_{k+1}$ έχει μήκος $k + 1$.

Οπότε όταν η Αλίκη θα κάνει την 2014η κίνησή της είτε έχει ήδη κερδίσει, είτε υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι $v_1 \dots v_{2014}$. Όμως έχουν κατευθυνθεί το πολύ $1001 \dots 2013 < \binom{2013}{2}$ ακμές. Άρα υπάρχει μια ακμή που δεν έχει κατευθυνθεί και η Αλίκη μπορεί να την χρησιμοποιήσει για να κλείσει ένα κύκλο.

- (90) Παρατηρούμε ότι ο k είναι καλός. Επαγωγικά ο $m > k$ είναι κακός αν και μόνο αν υπάρχει $k \leq m' < m$ με $(m, m') = 1$ ο οποίος να είναι καλός. Ισοδύναμα ο $m > k$ είναι καλός αν και μόνο αν για κάθε $k \leq m' < m$ με $(m, m') = 1$, ο m' είναι κακός. Ισοδύναμα ο $m > k$ είναι καλός αν και μόνο αν έχει κοινό πρώτο παράγοντα με κάθε καλό m' με $k \leq m' < m$.

Για κάθε σύνολο P από πρώτους μικρότερους ή ίσους του k ορίζω ως A_P το σύνολο όλων των ακεραίων n με $n \geq k$ οι οποίοι έχουν την ιδιότητα αν $p \leq k$ πρώτος, τότε $p|n$ αν και μόνο αν $p \in P$. Έστω επίσης N_P το ελάχιστο στοιχείο του A_P . Ισχυρίζομαι ότι ο N_P δεν έχει πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του k . Πράγματι έστω $N_P = N_1 N_2$ όπου όλοι οι πρώτοι παράγοντες του N_1 είναι μικρότεροι ή ίσοι του k και όλοι οι πρώτοι παράγοντες του $N_2 > 1$ είναι μεγαλύτεροι του k . Θέλουμε να καταλήξουμε σε άτοπο. Παίρνω φυσικό r ώστε $r_1 \leq k < N_1^{r+1}$. Ισχυρίζομαι ότι $N_1^{r+1} < N_1 N_2$ οπότε πράγματι καταλήγω σε άτοπο. Αν ο ισχυρισμός δεν ίσχυε τότε θα ήταν $N_1^r \geq N_2 \geq k$, πάλι άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο της άσκησης είναι λανθασμένο. Τότε υπάρχει ελάχιστο $n \geq k$ ώστε το (n, n') να αποτελεί αντιπαράδειγμα. Τότε $n, n' \in A_P$ για κάποιο σύνολο P από πρώτους μικρότερους ή ίσους του k . Αν $N_P < n$ τότε ένα από τα (N_P, n) και (N_P, n') είναι επίσης αντιπαράδειγμα, άτοπο. Άρα $n = N_P$.

Έστω ότι το n είναι καλό. Τότε έχει κοινό πρώτο παράγοντα με κάθε καλό m' με $k \leq m' < n$. Αυτός ο κοινός πρώτος παράγοντας ανήκει στο σύνολο P άρα και ο n' έχει κοινό πρώτο παράγοντα με κάθε καλό m' με $k \leq m' \leq n$. Επιπλέον κάθε καλό m' με $n < m' < n'$ έχει κοινό πρώτο παράγοντα με το n (αλλιώς δεν θα ήταν καλό) και άρα κοινό πρώτο παράγοντα με το n' . Άρα και ο n' είναι καλός και άρα το ζεύγος (n, n') δεν είναι αντιπαράδειγμα.

Έστω λοιπόν ότι το n είναι κακό. Υπάρχει λοιπόν $k \leq m < n$ με $(m, n) = 1$ το οποίο είναι καλό. Έστω $m \in A_Q$. Τότε και το N_Q είναι καλό αλλιώς το (N_Q, m) θα ήταν μικρότερο αντιπαράδειγμα. Αφού $(m, n) = 1$ είναι και $(N_Q, n) = 1$ και άρα $(N_Q, n') = 1$. Άρα και το n' είναι κακό. Οπότε και σε αυτήν την περίπτωση το (n, n') δεν είναι αντιπαράδειγμα.

Επομένως το ζητούμενο όντως ισχύει.

- (91) Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων. Θα δείξουμε ότι $a_n = 3n - 6$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $a_n \leq 3n - 6$. Για $n = 3$ είναι απλό. Έστω επαγωγικά ότι $a_k = 3k - 6$. Τότε για $n = k + 1$ κάνουμε το εξής: Στο πρώτο βήμα παίρνουμε το σύνολο $\{k, k + 1\}$. Μετά κάνουμε τις $3k - 6$ κινήσεις για την περίπτωση $n = k$, μόνο που αντί του συνόλου $\{k\}$ χρησιμοποιούμε το $\{k, k + 1\}$ και γενικά αντί του συνόλου A με $k \in A$ χρησιμοποιούμε το $A \cup \{k + 1\}$. Οπότε σε $1 + (3k - 6)$ βήματα θα έχουμε όλα τα σύνολα μεγέθους k που περιέχουν το k και το $k + 1$, καθώς και το $\{1, 2, \dots, k - 1\}$. Τώρα με άλλες δυο κινήσεις παίρνουμε τα $\{1, 2, \dots, k - 1, k\}$ και $\{1, 2, \dots, k - 1, k + 1\}$. Οπότε η επαγωγή τελειώνει.

Τώρα θα δείξουμε ότι $a_n \geq 3n - 6$ κινήσεις. Για $n = 3$ είναι απλό. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ας πάρουμε το ελάχιστο k με $a_k < 3k - 6$. Προφανώς $k > 3$. Θα δείξουμε ότι $a_{k-1} < 3(k - 1) - 6 = 3k - 9$. Αν κοιτάξουμε όλες τις κινήσεις θα υπάρχουν δύο όπου θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο $\{k\}$. Τουλάχιστον μία κατά την διαδικασία όπου θα φτιάξουμε το $\{1, 2, \dots, k - 2, k\}$ (όχι απαραίτητα στο τελικό βήμα). Αν την πρώτη φορά που χρησιμοποιήσουμε το k πάρουμε ένα σύνολο A με $i \in A$ και $i \neq k$, τότε θέλουμε τουλάχιστον άλλη μία για να πάρουμε το $\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{i\}$.

Αν τώρα για την περίπτωση $n = k$ στην βήμα i παίρνουμε την ένωση των A_i και B_i , στην περίπτωση $n = k - 1$ στο βήμα i παίρνουμε την ένωση των $A_i \setminus \{k\}$ και $B_i \setminus \{k\}$. εκτός και αν $A_i = \{k\}$ ή $B_i = \{k\}$ οπότε σε αυτήν την περίπτωση αγνοούμε πλήρως το βήμα i και πηδάμε στο βήμα $i + 1$. Οπότε σε λιγότερο από $3k - 8$ βήματα θα πάρουμε όλα τα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ μεγέθους $k - 1$. Θα πάρουμε όμως και το σύνολο $\{1, 2, \dots, k - 1\}$. Αν αγνοήσουμε το βήμα που μας δίνει αυτό το σύνολο τότε θα έχουμε λιγότερα από $3k - 9$ βήματα και άρα $a_{k-1} < 3k - 9$ καταλήγοντας στο ζητούμενο άτοπο.

- (92) Αν δώσουμε την τιμή 1 σε κάθε ευτυχισμένο άτομο και 0 σε κάθε δυστυχισμένο, τότε κάθε φορά που ο A χαμογελά στον B , η τιμή του B είναι το άθροισμα των τιμών των δύο mod 2.

Πηγαίνοντας ανάποδα αν οι τιμές των ατόμων την Πέμπτη το βράδυ είναι $x_1, x_2, \dots, x_{2014}$, τότε αυτό σημαίνει πως την Πέμπτη το πρωί ο A_{2014} είχε τιμή $x_{2013} + x_{2014}$, ο A_{2013} είχε τιμή $x_{2012} + x_{2013}$, και επαγωγικά ο A_n είχε τιμή $x_{n-1} + x_n$ όπου $x_0 = 0$.

Την Τετάρτη το πρωί, πάλι επαγωγικά και πάλι ξεκινώντας από τον A_{2014} , ο A_n είχε τιμή $x_{n-2} + x_n$. Την Τρίτη το πρωί ο A_n είχε τιμή $x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$ και την Δευτέρα το πρωί $x_{n-4} + x_n$. (Όπου $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 = 0$.)

Αν την Πέμπτη το βράδυ όλοι ήταν ευτυχισμένοι, τότε την Δευτέρα το πρωί οι μόνοι ευτυχισμένοι ήταν οι A_1, A_2, A_3, A_4 . Επιλέγουμε τώρα τα 14 άτομα που την Πέμπτη το βράδυ ήταν δυστυχισμένοι. Κάθε ένας αλλάζει την διάθεση το πολύ δύο ατόμων. Συνολικά έχουμε 28 αλλαγές. Οπότε μπορούμε να έχουμε το πολύ $4 + 28 = 32$ ευτυχισμένα άτομα την Δευτέρα το πρωί.

Το 32 επιτυγχάνεται αν την Πέμπτη το βράδυ έχουμε π.χ. δυστυχισμένους τους $A_5-A_8, A_{13}-A_{16}, A_{21}-A_{24}, A_{29}, A_{30}$. Αυτό σημαίνει πως την Δευτέρα το πρωί είχαμε ευτυχισμένους τους A_1-A_{30} και τους A_{33}, A_{34} .

- (93) Μέχρι η αρχική ομάδα των n μελών να διαγραφεί ισχύει το εξής: Σε κάθε βήμα θα έχουμε k άλλες ομάδες για κάποιο k , ώστε κάθε δυο ομάδες να έχουν διαφορετικό αριθμό μελών και κάθε ομάδα να έχει το πολύ $k + 1$ μέλη. Αυτό είναι άμεσο επαγωγικά αφού στο αμέσως επόμενο βήμα θα έχουμε είτε k είτε $k + 1$ άλλες ομάδες (ανάλογα με το αν υπήρχε ομάδα με ένα μέλος ή όχι). Όσες προήλθαν από προηγούμενες ομάδες θα έχουν το πολύ k μέλη ενώ η καινούργια ομάδα θα έχει το πολύ $k + 1$ μέλη.

Επίσης αν A είναι το σύνολο των αριθμών των μελών των άλλων ομάδων τότε το πιο πάνω δείχνει ότι $A = [k + 1] \setminus \{i\}$ για κάποιο $i \in [k + 1]$. Παρατηρούμε ότι αν $A = [k + 1] \setminus \{i\}$ τότε στο επόμενο βήμα είναι $A = [k + 1] \setminus \{i - 1\}$ αν $i \neq 1$ και $A = [k + 2] \setminus \{k + 2\}$.

Οπότε την στιγμή ακριβώς που η αρχική ομάδα διαγραφεί θα υπάρχουν $1 \leq r \leq t$ ώστε να υπάρχουν $t - 1$ ομάδες. Για κάθε $i \in [t] \setminus \{r\}$ θα υπάρχει μία ακριβώς ομάδα με i μέλη. Απαραίτητα πρέπει $n = \binom{t+1}{2} - r$. Οπότε

$$2n = t(t + 1) - 2r \geq t^2 - t > (t - 1)^2$$

και άρα

$$1 + \sqrt{2n} > t.$$

Γράφουμε A για το σύνολο των αριθμών των ατόμων των ομάδων. Ισχυρίζομαι ότι από αυτό το σημείο ισχύει πάντα ένα από τα εξής:

- (α) Έχουμε $t - 1$ ομάδες με $A \subseteq [t]$ και $|A| = t - 1$.

- (β) Έχουμε $t - 1$ ομάδες με $A \subseteq [t - 1]$ και $|A| = t - 2$. Επιπλέον αν $i \in [t - 1]$ μοναδικό ώστε να υπάρχουν δυο ομάδες με i άτομα και $j \in [t - 1]$ μοναδικό ώστε $j \notin A$ τότε $j < i$.
- (γ) Έχουμε t ομάδες με $A \subseteq [t]$ και $|A| = t - 1$. Επιπλέον αν $i \in [t]$ μοναδικό ώστε να υπάρχουν δυο ομάδες με i άτομα και $j \in [t]$ μοναδικό ώστε $j \notin A$ τότε $j > i$.

Πράγματι αρχικά είμαστε στην περίπτωση (α). Από την (α) πάμε ξανά στην (α) αν $1 \in A$ και $t \notin A$. Από την (α) πάμε στην (β) αν $1 \in A$ και $t \in A$. Τέλος από την (α) πάμε στην (γ) αν $1 \notin A$ (και άρα $t \in A$). Από την (β) πάμε στην (γ) αν $1 \notin A$ και πάμε στην (β) αν $1 \in A$ (αφού τότε υπάρχει ακριβώς μια ομάδα με ένα άτομο). Τέλος στην περίπτωση (γ) σίγουρα έχουμε είτε μία είτε δύο ομάδες με ένα άτομο. Αν έχουμε μία, πάμε στην (γ) ενώ αν έχουμε δύο πάμε στην (α).

Εφόσον λοιπόν ισχύει ο ισχυρισμός από αυτό το σημείο και μετά έχουμε πάντα το πολύ $t < 1 + \sqrt{2n}$ ομάδες.

- (94) Ένα γνωστό πρόβλημα από την IMO Shortlist του 1988 λέει ότι θα υπάρχουν σίγουρα δυο γειτονικά κελιά με διαφορά αριθμών τουλάχιστον n . Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη διότι θα μας βοηθήσει και σε αυτό το πρόβλημα.

Έστω λοιπόν k ο ελάχιστος αριθμός ώστε να υπάρχει μια σειρά ή μια στήλη με όλους τους αριθμούς της να ανήκουν στο $[k]$. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτή είναι η σειρά i και έστω επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το k ανήκει στην στήλη j (αναγκαστικά αυτής της σειράς). Σίγουρα κάθε άλλη στήλη έχει ένα αριθμό μεγαλύτερο του k και ένα αριθμό μικρότερο του k . Οπότε σε κάθε στήλη r εκτός ίσως από την j μπορούμε να βρούμε δυο γειτονικά κελιά ώστε το ένα να έχει τον αριθμό $x_r > k$ και το άλλο τον αριθμό $y_r < k$. (Δεν είναι απαραίτητο τα y_r να βρίσκονται στην σειρά i .) Σίγουρα το μεγαλύτερο από τα x_r , έστω το x_{r_1} είναι τουλάχιστον $n + k - 1$. Επειδή όμως $y_{r_1} < k$ και $x_{r_1} - y_{r_1} \leq n$ τότε είναι $x_{r_1} = n + k - 1$ και $y_{r_1} = k - 1$. Επαγωγικά μπορούμε να βρούμε $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ ώστε $x_{r_t} = n + k - t$ και $y_{r_t} = k - t$ για κάθε $1 \leq t \leq n - 1$.

Κοιτάμε τώρα τα κελιά $(i - 1, j)$ και $(i + 1, j)$. (Αν $i = 1$ ή $i = n$ απλά αγνοούμε το ένα από αυτά.) Επειδή το κελί (i, j) περιέχει το k και όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $[k - n + 1, k + n - 1]$ εκτός από τον k βρίσκονται σε κελιά άλλων στηλών, τα κελιά $(i - 1, j)$ και $(i + 1, j)$ μπορούν να περιέχουν μόνο τους αριθμούς $k - n$ και $k + n$. Αν το $k - n$ είναι γειτονικό με το k και στην ίδια στήλη ορίζω $x_{r_n} = k, y_{r_n} = k - n$. Αλλιώς ορίζω $x_{r_n} = k + n, y_{r_n} = k$. Εν πάση περιπτώσει σε κάθε στήλη r μπορούμε να βρούμε ένα ζεύγος γειτονικών κελιών με το ένα να περιέχει τον αριθμό x_r , το άλλο τον αριθμό y_r με $x_r - y_r = n$ και επιπλέον υπάρχει m ώστε $\{y_1, \dots, y_n\} = \{m + 1, \dots, m + n\}$ και $\{x_1, \dots, x_n\} = \{m + n + 1, \dots, m + 2n\}$.

Κοιτάμε την στήλη ℓ που περιέχει τους αριθμούς $m + 1, m + n + 1$. Κοιτάμε τώρα μια γειτονική της στήλης και έστω τα γειτονικά κελιά x, y αυτής της στήλης που περιέχουν τους αριθμούς $m + n + t, m + t$ αντίστοιχα (για κάποιο $1 < t \leq n$). Κοιτάμε τα γειτονικά τους κελιά στην ℓ . Έστω x' το γειτονικό του x και y' το γειτονικό του y . Πρέπει

$$x' \in \{m + t, \dots, m + n + t - 1\} \cup \{m + n + t + 1, \dots, m + 2n + t\}.$$

Επειδή όμως οι αριθμοί $\{m + 2, \dots, m + n\} \cup \{m + n + 2, \dots, m + 2n\}$ βρίσκονται σε άλλες στήλες πρέπει

$$x' \in \{m + n + 1\} \cup \{m + 2n + 1, \dots, m + 2n + t\}.$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$y' \in \{m+t-n, \dots, m+1\} \cup \{m+n+1\}.$$

Επειδή όμως $x' - y' \leq n$ είτε $x' = m+n+1$ και $y' = m+1$ είτε $x' = m+2n+1$ και $y' = m+n+1$. Και στις δύο περιπτώσεις είναι $x+y' = x'+y$ οπότε έχουμε το ζητούμενο 2×2 τετράγωνο.

- (95) Το γράφημα $K_{4,n-4}$ έχει $|E|/|V| = 4 - 16/n$. Κάθε κύκλος του γραφήματος πρέπει να χρησιμοποιεί τουλάχιστον δύο κορυφές από κάθε μέρος ενώ κάθε κύκλος με χορδή τουλάχιστον τρεις κορυφές από κάθε μέρος. Άρα το $K_{4,n-4}$ δεν περιέχει το ζητούμενο και άρα πρέπει $c \geq 4 - 16/n$ για κάθε n . Οπότε πρέπει $c \geq 4$.

Θα δείξουμε ότι $c = 4$. Προχωράμε με επαγωγή στο $|V| = n$. Για $n \geq 8$ είναι άμεσο αφού δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα ενώ για $n = 9$ είναι επίσης άμεσο αφού τότε είναι $G = K_9$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta(G) \geq 5$ αφού αλλιώς αφαιρούμε την κορυφή με τον μικρότερο βαθμό και τελειώσαμε από την επαγωγική υπόθεση.

Παίρνουμε τώρα ένα μονοπάτι P μέγιστου μήκους. Έστω το $v_1 v_2 \dots v_k$. Αφού το μονοπάτι έχει μέγιστο μήκος, όλοι οι γείτονες του v_1 ανήκουν σε αυτό. Έστω v_2, v_a, v_b, v_c, v_d πέντε γείτονες του v_1 με $2 < a < b < c < d$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των v_1 και v_k . Το v_k πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο γείτονες στο $\{v_2, \dots, v_{b-1}\}$ ή τουλάχιστον δύο στο $\{v_{b+1}, \dots, v_{k-1}\}$. Στην πρώτη περίπτωση, αν έχει γείτονες τα v_i, v_j με $2 \leq i < j \leq b-1$ μπορούμε να σχηματίσουμε τον κύκλο $v_k v_i v_{i+1} \dots v_j v_k$ και τον κύκλο $v_1 v_b v_{b+1} \dots v_d v_1$ με τον δεύτερο κύκλο να έχει την χορδή $v_1 v_c$. Η δεύτερη περίπτωση αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι τα $v_1 v_k$ είναι γειτονικά. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι τουλάχιστον το ένα από τα δύο έχει βαθμό 5 αφού αλλιώς η ίδια διαδικασία όπως πιο πάνω μας δίνει τους ζητούμενους κύκλους.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι $k = n$. Πράγματι επειδή το P είναι μέγιστο και μπορούμε να το κλείσουμε σε κύκλο, δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ των κορυφών του P και των κορυφών του $V \setminus P$. Αλλά τότε τουλάχιστον ένα από τα $G[P]$ και $G[V \setminus P]$ ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση και άρα έχουμε τους ζητούμενους κύκλους.

Οπότε το G έχει κύκλο Hamilton. Πρέπει επιπλέον να έχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 8. Παίρνουμε μια τέτοια κορυφή u_1 και ένα μονοπάτι Hamilton $u_1 \dots u_n$. Έστω u_a, u_b, u_c, u_d κάποιες γειτονικές κορυφές του u_1 με $2 < a < b < c < d < n$. Αν δεν υπάρχει η ακμή $u_{a-1} u_n$ τότε θεωρούμε το μονοπάτι Hamilton $u_{a-1} u_{a-2} \dots u_1 u_a u_{a+1} \dots u_n$. Επειδή δεν υπάρχει η ακμή $u_{a-1} u_n$ τότε μπορούμε να βρούμε τους ζητούμενους κύκλους όπως προηγουμένως.

Επομένως η u_n έχει γείτονα την u_{a-1} και με παρόμοιο τρόπο έχει επίσης γείτονες τις u_{b-1}, u_{c-1} και u_{d-1} . Επειδή έχει επίσης γείτονα την u_{n-1} ακόμη μπορούμε να αγνοήσουμε την ακμή $u_1 u_n$ και να βρούμε τους ζητούμενους κύκλους όπως προηγουμένως.

- (96) Πιο γενικά, για ένα $2n \times 2n$ πίνακα με $n \geq 2$, θα δείξουμε ότι $k = 2n(n-1)$. [Σε κάθε βήμα αλλάζουμε την στάση των λαμπών σε μια γραμμή ή στήλη με τουλάχιστον n αναμμένες λάμπες.]

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε αρχικά αναμμένες τις λάμπες σε όλα τα κελιά $(i, i+j)$ όπου $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq j \leq n-1$ και η πρόσθεση είναι mod n τότε: Σε κάθε γραμμή

και σε κάθε στήλη έχουμε ακριβώς $n - 1$ αναμμένες λάμπες. Οπότε δεν μπορούμε να κάνουμε κανένα βήμα και άρα $k \geq 2n(n - 1)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι από οποιαδήποτε κατανομή μπορούμε να καταλήξουμε σε μία με το πολύ $2n(n - 1)$ αναμμένες λάμπες. Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα ο αριθμός των αναμμένων λαμπών δεν αυξάνεται. Επιπλέον μειώνεται εκτός και αν η γραμμή ή στήλη που θα χρησιμοποιήσουμε έχει ακριβώς n αναμμένες λάμπες. Αρκεί να δείξουμε ότι αν έχουμε $m > 2n(n - 1)$ αναμμένες λάμπες τότε μπορούμε με μια ακολουθία κινήσεων να μειώσουμε τον αριθμό τους.

Αν σε οποιοδήποτε βήμα έχουμε μια γραμμή ή στήλη με περισσότερες από n αναμμένες λάμπες τότε τελειώσαμε. Ας υποθέσουμε ότι ποτέ δεν συμβαίνει αυτό για να καταλήξουμε σε άτοπο. Θα δείξουμε αρχικά ότι με μια ακολουθία κινήσεων μπορούμε να έχουμε τουλάχιστον $(n + 1)/2$ στήλες με τουλάχιστον n αναμμένες λάμπες. Έστω ότι αρχικά έχουμε r στήλες με n αναμμένες λάμπες, s στήλες με $n - 1$ αναμμένες λάμπες και t στήλες με το πολύ $n - 2$ αναμμένες λάμπες. Είναι $r + s + t = 2n$ και $rn + s(n - 1) + t(n - 2) > 2n(n - 1)$ οπότε $r - t > 0$, δηλαδή $r - t \geq 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r < (n + 1)/2$.

Παίρνουμε μια γραμμή με ακριβώς n αναμμένες λάμπες. (Επειδή υπάρχουν περισσότερες από $2n(n - 1)$ αναμμένες λάμπες θα υπάρχει τουλάχιστον μια γραμμή με τουλάχιστον n αναμμένες λάμπες. Από την υπόθεση που κάναμε πρέπει να έχει ακριβώς n αναμμένες λάμπες.) Αλλάζουμε την στάση των λαμπών αυτής της γραμμής. Αν σε αυτήν την γραμμή και σε κάποια από τις r στήλες με n αναμμένες λάμπες υπήρχε μια σβηστή λάμπα τότε αυτή η στήλη τώρα θα έχει $n + 1$ αναμμένες λάμπες οπότε τελειώσαμε. Άρα κάθε μία από αυτές τις r στήλες έχει αναμμένη λάμπα σε αυτήν την γραμμή. Άρα συνολικά οι s στήλες μια $n - 1$ αναμμένες λάμπες έχουν το πολύ $n - r$ αναμμένες λάμπες σε αυτήν την γραμμή. Οπότε αν αλλάξουμε την στάση των λαμπών σε αυτήν την γραμμή τότε αυτές οι s στήλες θα έχουν συνολικά τουλάχιστον $s - (n - r) = s + r - n = n - t \geq n + 1 - r$ αναμμένες λάμπες σε αυτήν την γραμμή. Επομένως μετά από αυτήν την κίνηση θα έχουμε τουλάχιστον $n + 1 - r$ στήλες με n αναμμένες λάμπες. Επειδή $r < (n + 1)/2$ είναι $n + 1 - r > (n + 1)/2$ οπότε μπορούμε πράγματι να πετύχουμε τουλάχιστον $(n + 1)/2$ στήλες με n αναμμένες λάμπες. Αφού $n \geq 2$ μπορούμε να πετύχουμε τουλάχιστον 2 στήλες με n αναμμένες λάμπες.

Έστω τώρα ότι έχουμε $a \geq (n + 1)/2$ στήλες με n αναμμένες λάμπες και b γραμμές με n αναμμένες λάμπες. Κάθε τετραγωνάκι που βρίσκεται σε μια από αυτές τις στήλες και μια από αυτές τις γραμμές πρέπει να έχει αναμμένη λάμπα αφού αλλιώς αλλάζοντας την στάση των λαμπών της στήλης του, η γραμμή του θα έχει τώρα $n + 1$ αναμμένες λάμπες. Άρα συνολικά αυτές οι γραμμές και στήλες έχουν $na + nb - ab$ αναμμένες λάμπες. Κοιτάζουμε τώρα τις $(2n - a)(2n - b)$ λάμπες που δεν βρίσκονται σε αυτές τις γραμμές και στήλες. Ισχυρίζομαι ότι κάθε μια από τις $2n - b$ γραμμές που δεν έχουν n αναμμένες λάμπες, έχει το πολύ $n - a$ αναμμένες λάμπες σε αυτά τα τετραγωνάκια. Πράγματι αν είχε τουλάχιστον $n + 1 - a$ αναμμένες λάμπες, τότε αλλάζοντας διαδοχικά τις στάσεις των λαμπών όλων των στηλών που έχουν τουλάχιστον n αναμμένες λάμπες και δεν έχουν αναμμένη λάμπα σε αυτήν την γραμμή, θα καταλήξουμε με τουλάχιστον $a + (n + 1 - a) = n + 1$ αναμμένες λάμπες σε αυτήν την γραμμή, άτοπο.

Τότε όμως ο πίνακας έχει το πολύ

$$na + b(n - a) + (2n - b)(n - a) = 2n^2 - an \leq 2n^2 - 2n = 2n(n - 1)$$

αναμμένες λάμπες, άτοπο. Οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

- (97) Κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G με κορυφές όλους τους διαφορετικούς τρόπους όπου οι παίκτες μπορούν να κρατάνε τα χαρτιά, και ακμή από τον τρόπο u στον τρόπο v αν όταν βρισκόμαστε στην διαρρύθμιση u , στην επόμενη κίνηση μπορούμε να πάμε στην διαρρύθμιση v .

Έστω τώρα ότι βρισκόμαστε σε μια κορυφή u όπου και οι δύο παίκτες κρατάνε χαρτιά. Έστω G_u το υπογράφημα που περιέχει όλες τις κορυφές στις οποίες μπορούμε να καταλήξουμε ξεκινώντας από το u . Υποθέτουμε πως δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κορυφή όπου ένας παίκτης κρατάει όλα τα χαρτιά. Τότε κάθε κορυφή του G_u έχει ακριβώς δύο κατευθυνόμενες ακμές που φεύγουν από αυτή, ενώ έχει το πολύ δύο ακμές που έρχονται προς αυτήν. Άρα μετρώντας όλες τις ακμές του G_u με δύο τρόπους (ακμές που φεύγουν από τις κορυφές και ακμές που έρχονται προς τις κορυφές) κάθε κορυφή έχει ακριβώς δύο ακμές που κατευθύνονται προς αυτήν.

Έστω τώρα μια κορυφή v του G_u όπου ο πρώτος παίκτης έχει τον μέγιστο αριθμό χαρτιών. Η v έχει το πολύ δύο ακμές που κατευθύνονται προς αυτήν στο G . Επίσης για να έχει δύο (γνωρίζουμε πως πρέπει να έχει δύο ακόμη και στο G_u) πρέπει ο δεύτερος παίκτης να κρατάει τουλάχιστον δύο χαρτιά. Από αυτές όμως τις ακμές η μία έρχεται από μια κορυφή w όπου στο βήμα από την w στο u αυτός που πήρε τα χαρτιά ήταν ο δεύτερος παίκτης. Δηλαδή ο πρώτος παίκτης έχει περισσότερα χαρτιά στην κορυφή w από την κορυφή u . Τότε όμως η w δεν ανήκει στο G_u και άρα στο G_u η u έχει το πολύ μία ακμή που κατευθύνεται προς αυτήν, άτοπο.

- (98) Πιο γενικά θα δείξουμε ότι αν έχουμε ένα γράφημα G όπου για κάθε κορυφή v υπάρχουν το πολύ $2m$ κορυφές σε απόσταση 3 από αυτή, τότε για κάθε κορυφή v υπάρχουν το πολύ $m(m+1)$ κορυφές σε απόσταση 4 από αυτή. [Το φράγμα είναι το βέλτιστο δυνατό. Π.χ. αν πάρουμε m μονοπάτια μήκους 3 που να ξεκινούν από μία κορυφή και η τελευταία ακμή κάθε μονοπατιού να έχει άλλες m γειτονικές κορυφές.]

Έστω μια κορυφή v και έστω $v_1, \dots, v_k$ οι γειτονικές της κορυφές. Έστω A_1 το σύνολο των κορυφών που βρίσκονται σε απόσταση 3 από την v_1 και σε απόσταση 4 από την v . Έστω A_2 το σύνολο των κορυφών που βρίσκονται σε απόσταση 3 από την v_2 , σε απόσταση 4 από την v και οι οποίες δεν ανήκουν στο A_1 . Πιο γενικά, έχοντας ορίσει τα σύνολα $A_1, \dots, A_r$ για $1 \leq r \leq k-1$ ορίζουμε A_{r+1} το σύνολο των κορυφών που βρίσκονται σε απόσταση 3 από την v_{r+1} , σε απόσταση 4 από την v και οι οποίες δεν ανήκουν στα $A_1, \dots, A_r$. Για $i \in [k]$, έστω $m_i = |A_i|$. Ας υποθέσουμε ότι ακριβώς t από τα $m_1, \dots, m_k$ είναι μη μηδενικά. Η v έχει $m_1 + \dots + m_k$ κορυφές σε απόσταση 4.

Ισχυρίζομαι επίσης ότι για κάθε $i \in [k]$ η v_i έχει τουλάχιστον $m_i + t - 1$ κορυφές σε απόσταση 3. Πράγματι για κάθε $j \neq i$ με $m_j \neq 0$ παίρνουμε μια κορυφή $v_{i,j} \in A_j$ και ένα μονοπάτι μήκους 3 από το v_j στο $v_{i,j}$. Αυτό το μονοπάτι πρέπει να έχει τουλάχιστον μια κορυφή, έστω την $w_{i,j}$, που να βρίσκεται σε απόσταση 3 από την v_i . Για κάθε i όλα αυτά τα $w_{i,j}$ πρέπει να είναι διαφορετικά αφού αν $w_{i,j} = w_{i,j'} =: w$ για κάποια $j \neq j'$ τότε $d(v_j, w) = d(v_{j'}, w)$ αφού αν π.χ. $d(v_j, w) < d(v_{j'}, w)$ τότε η απόσταση του v_j από κάθε κορυφή της $A_{j'}$ είναι το πολύ 2 και άρα η απόσταση της v από κάθε κορυφή της $A_{j'}$ είναι το πολύ 3, άτοπο. Τότε όμως οι $v_{i,j}, v_{i,j'}$ έχουν απόσταση 3 από τόσο από την v_j όσο και από την $v_{j'}$, άτοπο αφού τότε θα έπρεπε και οι δύο να ανήκουν στο $A_{\min\{j,j'\}}$.

Για κάθε μη μηδενικό m_i είναι $m_i \leq 2m + 1 - t$ και άρα

$$m_1 + \dots + m_k \leq t(2m + 1 - t) \leq m(m + 1)$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

- (99) Για το (α) παίρνω το σύνολο $A \cup B$ όπου $A = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\}$ και $B = \{97, 98\}$. Για να πάρω άθροισμα που να ισούται με $1 \pmod 3$ πρέπει απαραίτητα να χρησιμοποιήσω το 97. Οπότε αν υπάρχουν δυο τέτοια αθροίσματα ίσα, αγνοώντας το 97 θα έχω δυο αθροίσματα ίσα της μορφής $0 \pmod 3$. Ομοίως αν έχω δυο αθροίσματα της μορφής $2 \pmod 3$ που είναι ίσα, θα χρησιμοποιούν και τα δύο το 98 οπότε μπορώ να πάρω δυο ίσα αθροίσματα της μορφής $0 \pmod 3$.

Κάθε άθροισμα της μορφής $0 \pmod 3$ χρησιμοποιεί είτε και τα δύο είτε κανένα στοιχείο του B . Επειδή $97 + 98 = 195 > 3 + 6 + \dots + 96 = 189$, τότε αν δυο αθροίσματα είναι ίσα είτε και τα δύο θα περιέχουν τα 97 και 98 είτε κανένα δεν θα περιέχει τα 97 και 98. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένα δεν περιέχει τα 97 και 98 αφού αλλιώς τα αφαιρούμε και τα δύο.

Τώρα έπεται εύκολα ότι όλα τα αθροίσματα είναι διαφορετικά αφού όλα τα αθροίσματα υποσυνόλων του A είναι προφανώς διαφορετικά. (Παίρνουμε τα 64 αθροίσματα της μορφής $3n$ με $n \in \{0, 1, \dots, 63\}$).

Για το (β) έστω ότι το 9 είναι 100-διακριτό και έστω ένα σύνολο $\{x_1, \dots, x_9\}$ ακεραιών $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_9 \leq 100$ με όλα τα 2^9 αθροίσματα διαφορετικά. Έστω $S_1, \dots, S_{512}$ αυτά τα αθροίσματα και έστω S το συνολικό άθροισμα. Θέτω $T_i = 2S_i - S$ για $1 \leq i \leq 512$. Θέτω επίσης $R = x_1^2 + \dots + x_9^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{512} T_i^2 &= \sum_{A \subseteq \{1, 2, \dots, 9\}} \left(\sum_{i \in A} x_i - \sum_{i \notin A} x_i \right)^2 \\ &= \sum_{A \subseteq \{1, 2, \dots, 9\}} \left(\sum_{i \in A} \sum_{j \in A} x_i x_j + \sum_{i \notin A} \sum_{j \notin A} x_i x_j - \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} x_i x_j \right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το x_i^2 εμφανίζεται από μία φορά για κάθε $A \subseteq \{1, 2, \dots, 9\}$ (δηλαδή συνολικά 2^9 φορές) στο πιο πάνω άθροισμα, πάντα με το πρόσημο «+». Επίσης το $x_i x_j$ για $i \neq j$ εμφανίζεται 2^8 φορές με το πρόσημο «+» και 2^8 φορές με το πρόσημο «-». Οπότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{512} T_i^2 = 2^9 R.$$

Από την άλλη όμως τα T_i πρέπει να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, είτε όλα άρτια είτε όλα περιττά, και κανένα να μην ισούται με 0. Οπότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{512} T_i^2 &\geq 2 \sum_{i=1}^{256} (2i-1)^2 = 2 \left[\frac{512 \times 513 \times 1025}{6} - 4 \frac{256 \times 257 \times 513}{6} \right] \\ &= \frac{512 \times 513 \times (1025 - 514)}{3} = 2^9 \times 511 \times 171 \end{aligned}$$

Δηλαδή $R \geq 511 \times 171$. Όμως

$$R \leq 91^2 + \dots + 99^2 = 81285 < 87381 = 511 \times 171,$$

άτοπο.

Ας δώσουμε και την προτεινόμενη απόδειξη για το (β).

Έστω το σύνολο $\{x_1, \dots, x_9\}$ όπως προηγουμένως. Κοιτάμε τα

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 420$$

που χρησιμοποιούν από 3 ως 6 στοιχεία. Το μεγαλύτερο άθροισμα είναι το $x_4 + \dots + x_9$, το μικρότερο είναι το $x_1 + x_2 + x_3$ οπότε πρέπει

$$(x_4 + \dots + x_9) - (x_1 + x_2 + x_3) \geq 419.$$

Κοιτάμε τώρα όλα τα αθροίσματα που χρησιμοποιούν ακριβώς 2, 3 ή 4 στοιχεία μεγαλύτερα του x_3 . Υπάρχουν

$$8 \left(\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right) = 400$$

τέτοια αθροίσματα με το μεγαλύτερο να ισούται με $(x_1 + x_2 + x_3) + (x_6 + \dots + x_9)$ και το μικρότερο να ισούται με $x_4 + x_5$. Οπότε είναι

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_6 + \dots + x_9) - (x_4 + x_5) \geq 399.$$

Προσθέτοντας τις δυο εξισώσεις που βρήκαμε λαμβάνουμε

$$2(x_6 + \dots + x_9) \geq 818.$$

Δηλαδή $x_6 + \dots + x_9 \geq 409$, άτοπο αφού $x_6 + \dots + x_9 < 400$.

- (100) Θεωρώ το σύνολο $A \times A = \{(a, b) : a, b \in A\}$. Το διαμερίζω σε υποσύνολα, έτσι ώστε τα (a, b) και (c, d) να ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο αν και μόνο αν $a/b = c/d$. Απαριθμώ αυτά τα υποσύνολα, έστω $C_1, \dots, C_k$ με την ιδιότητα αν $(a, b) \in C_i$ και $(c, d) \in C_j$ με $i > j$ τότε $a/b > c/d$.

Είναι απλό ότι $|C_1| = 1$ με μόνο στοιχείο το $(\max A, \min A)$ και $|C_k| = 1$ με μόνο στοιχείο το $(\min A, \max A)$. Επίσης είναι απλό ότι $|C_1| + \dots + |C_k| = |A|^2$.

Για το υποσύνολο C_i ορίζω

$$a_i = \max\{a : (a, b) \in C_i\} \quad \text{και} \quad b_i = \max\{b : (a, b) \in C_i\}.$$

Είναι απλό ότι $(a_i, b_i) \in C_i$. Ομοίως ορίζω

$$a'_i = \min\{a : (a, b) \in C_i\} \quad \text{και} \quad b'_i = \min\{b : (a, b) \in C_i\}$$

και παρατηρώ ότι $(a'_i, b'_i) \in C_i$.

Τέλος κοιτώ όλα τα κλάσματα της μορφής:

$$(\alpha) \quad x_i := \frac{a_i + a_i}{b_i + b_i} \quad \text{για } 1 \leq i \leq k$$

$$(\beta) \quad y_{i,c} := \frac{a_i + c}{b_i + d} \quad \text{όπου } 1 \leq i \leq k-1 \text{ και } (c, d) \in C_{i+1}$$

$$(\gamma) \quad z_{i,c} := \frac{c + a_{i+1}}{d + b_{i+1}} \quad \text{για } 1 \leq i \leq k-1 \text{ και } (c, d) \in C_i.$$

Προφανώς όλα αυτά τα κλάσματα ανήκουν στο B . Ισχυρίζομαι ότι είναι άνισα ανά δύο εκτός από τις περιπτώσεις $y_{i,a_{i+1}} = z_{i,a_i}$. Αν αποδειχθεί ο ισχυρισμός τότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί αφού έχουμε γράψει συνολικά

$$\begin{aligned} & k + (|C_1| + \dots + |C_{k-1}|) + (|C_2| + \dots + |C_k|) - (k-1) \\ &= k + (|A|^2 - 1) + (|A|^2 - 1) - (k-1) \\ &= 2|A|^2 - 1 \end{aligned}$$

κλάσματα.

Μένει λοιπόν να αποδειχθεί ότι όλα τα κλάσματα είναι όντως άνισα (εκτός από τις περιπτώσεις που προείπαμε). Πράγματι αυτό έπεται άμεσα από τις ακόλουθες απλές παρατηρήσεις.

- (α) $x_1 > x_2 > \dots > x_k$
- (β) $x_i > y_{i,c} > y_{i,c'} > x_{i+1}$ για κάθε i και κάθε $c < c'$
- (γ) $x_i > z_{i,c} > z_{i,c'} > x_{i+1}$ για κάθε i και κάθε $c > c'$
- (δ) $y_{i,c} > y_{i,a_{i+1}} = z_{i,a_i} > z_{i,c'}$ για κάθε i, c, c' .