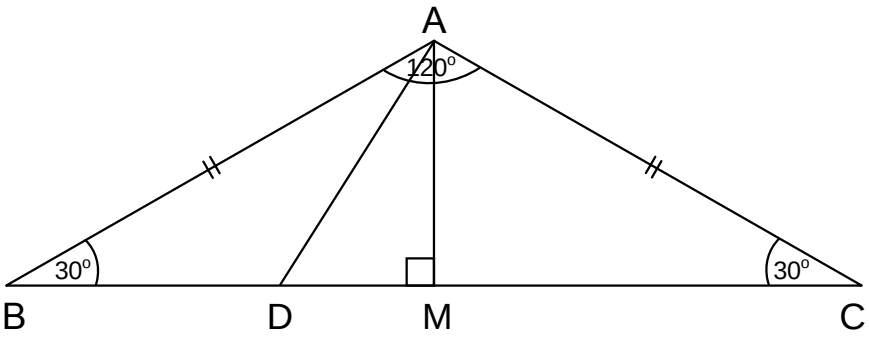
Ειδικό Ισοσκελές

(mathematica, 22/08/2015, george visvikis)

Το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($AB = AC$) με $A = 120^o$. Πάνω στην πλευρά BC θεωρούμε σημείο D, ώστε $BD = \frac{BC}{3}$. Να αποδείξετε ότι $AD = BD$.



Φέρουμε τη διάμεσο AM της BC, η οποία είναι και ύψος αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Αφού το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $AB = AC$ ισχύει $B = C = 180^o - A \Rightarrow B = C = 30^o$.

Ακόμη, είναι $BM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2BM$.

Από την υπόθεση ξέρουμε όμως ότι $BD = \frac{BC}{3}$. Επομένως $BD = \frac{2BM}{3}$ (1).

Στο τρίγωνο ABM έχουμε: $\tan 30^o = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{AM}{\frac{BC}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2AM}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 6AM = BC\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \frac{BC\sqrt{3}}{6}$.

Είναι $DM = BM - BD = BM - \frac{2BM}{3} \Rightarrow DM = \frac{BM}{3} = \frac{\frac{BC}{2}}{3} \Rightarrow DM = \frac{BC}{6}$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ADM παίρνουμε:

$$AD^2 = AM^2 + DM^2 = \left(\frac{BC\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{BC}{6}\right)^2 = \frac{3BC^2}{36} + \frac{BC^2}{36} \Rightarrow AD^2 = \frac{4BC^2}{36} \Rightarrow AD = \frac{2BC}{6} \Rightarrow AD = \frac{BC}{3}$$

Όμως ισχύει: $AD = \frac{BC}{3} = \frac{2BM}{3}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι: $AD = BD$.

Άρα, το ζητούμενο αποδείχτηκε.

nikos_el