Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \mu\epsilon\ \mathbf{f(0)=1}$,για την οποία ισχύει :$|\mathbf{e^x f(y) - e^y f(x)}| \le \mathbf{(x-y)^2}$ για κάθε $\mathbf{x,y}\in\mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $\mathbf{f(x)=e^x, x}\in\mathbb{R}$

Λύση

$$\left|e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x)\right| \le (x-x_0)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x)}{x-x_0}\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow$$
$$-(x-x_0) \le \frac{e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x)}{x-x_0} \le (x-x_0)$$

από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x)}{x-x_0} = 0$ όμως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x)}{x-x_0} = 0$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x_0) + e^{x_0} f(x_0) - e^{x_0} f(x)}{x-x_0} = 0$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}\bullet f(x_0) - \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\bullet e^{x_0}\right] = 0$$

Έστω

$$A(x) = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}\bullet f(x_0) - \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\bullet e^{x_0}$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\bullet e^{x_0} = A(x) - \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}\bullet f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\bullet e^{x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[A(x) - \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}\bullet f(x_0)\right] = e^{x_0}\bullet f(x_0)$$
$$e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[A(x) - \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}\bullet f(x_0)\right] = e^{x_0}\bullet f(x_0) \quad \ldots$$
$$e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = e^{x_0}\bullet f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)\in\mathbb{R}$$

οπότε, $f'(x_0) = f(x_0)$ άρα για κάθε χ ισχύει: $f'(x) = f(x)$ δηλαδή $f(x) = c\cdot e^x$, όμως $f(0)=1$ οπότε προκύπτει, $f(x) = e^x$

Τηλέγραφος Κώστας