Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ «ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ» ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΤΟ Δ1 ΘΕΜΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ 2015

$1^{η}$ Θεματική ενότητα
Η ταυτότητα των μαθηματικών και η πορεία της μαθηματικής επιστήμης

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
7ο ΓΕΛ Περιστερίου
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη
Τα μαθηματικά είναι επιστήμη πνεύματος και ελεύθερης σκέψης. Πολλές φορές, αναπτύσσονται αυτοματοποιημένες διαδικασίες-εργαλεία για να επιλυθεί ένα πρόβλημα. Μια γνωστή τέτοια διαδικασία είναι η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων που χρησιμοποιεί τη διακρίνουσα. Στα τρέχοντα σχολικά βιβλία υπάρχουν αναλυτικές αποδείξεις για τον θεωρητικό τρόπο επίλυσης μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς σταθερούς (ή παραμετρικούς) συντελεστές. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν μια «δευτεροβάθμια εξίσωση» με μεταβλητούς συντελεστές μπορεί να επιλυθεί με τον ίδιο τρόπο. Θα επιχειρηματολογήσουμε ως προς την καταφατική απάντηση.

Abstract
Maths is a science of spirit and free will. Very often we develop procedures to solve a problem. A well known procedure is solving the quadratic equation using the discriminant. In the current school books there are analytical proofs of the theoretical way to solve a quadratic equation with constant or parametric real coefficients. Someone may wonder if we can solve a "quadratic equation" with variable coefficients using the same methodology. We will argue that we can.

Εισαγωγή

Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ και $\alpha \neq 0$, η εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad (1)$$

ονομάζεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο x** [1]. Η εξίσωση αυτή λύνεται χρησιμοποιώντας τη **διακρίνουσα**, Δ, που ορίζεται ως

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma. \quad (2)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, η τιμή της διακρίνουσας καθορίζει την ύπαρξη δύο συζυγών μιγαδικών ριζών, την ύπαρξη μιας διπλής πραγματικής ρίζας ή την ύπαρξη δύο άνισων πραγματικών ριζών.

Διακρίνουσα ορίζεται σε κάθε πολυωνυμική εξίσωση. Κάθε εξίσωση 3ου βαθμού παίρνει τη μορφή

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad (3)$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία μέσω του μετασχηματισμού

$$x = y - \frac{\alpha}{3}, \quad (4)$$

παίρνει τη μορφή

$$x^3 + Ax + B = 0, \quad (5)$$

με $A, B \in \mathbb{R}$, της οποίας η διακρίνουσα [2] ορίζεται ως

$$\Delta = -4A^3 - 27B^2. \quad (6)$$

Η επίλυση κυβικών και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων μελετήθηκε αρχικά από τον Cardano [3] το 1545 στο έργο του Ars Magna (η Μεγάλη Τέχνη).

Γενικά, αν R είναι ένας ακέραιος δακτύλιος [2] και $t_1, t_2, ..., t_n$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία του R και x είναι μια μεταβλητή του $R[t_1, t_2, ..., t_n]$, θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2)...(x - t_n). \quad (7)$$

Ορίζουμε ως διακρίνουσα $\Delta^2(t)$ του πολυωνύμου $P(x)$ το γινόμενο

$$\Delta^2(t) = \prod_{i<j} (t_i - t_j)^2, \quad (8)$$

η οποία είναι και η διακρίνουσα της πολυωνυμικής εξίσωσης P(x) = 0.

Η έννοια της διακρίνουσας χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, όπως στις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) 2ης τάξης [4]. Συγκεκριμένα, κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} &A(x_1,x_2)u_{x_1x_1}(x_1,x_2)+2B(x_1,x_2)u_{x_1x_2}(x_1,x_2)\\ &\quad+\Gamma(x_1,x_2)u_{x_2x_2}(x_1,x_2)=\Phi(x_1,x_2,u,u_{x_1},u_{x_2}) \end{aligned} \tag{9}$$

όπου $A,B,\Gamma\in C^1$ και δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα σε κάποιο σημείο $x_0=x_1^0,x_2^0$ του πεδίου ορισμού τους, χαρακτηρίζεται ως ελλειπτικού ή υπερβολικού ή παραβολικού τύπου από την τιμή της διακρίνουσας

$$\Delta\left(x_1^0,x_2^0\right)=B^2\left(x_1^0,x_2^0\right)-A\left(x_1^0,x_2^0\right)\Gamma\left(x_1^0,x_2^0\right). \tag{10}$$

Εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x,
με πραγματικούς συντελεστές ανεξάρτητους του x

Η επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης απασχόλησε τη μαθηματική κοινότητα από παλιά. Σε μια Βαβυλωνιακή πινακίδα [5] με αριθμό AO8862 (1750 π.Χ.) υπάρχει η παρακάτω σειρά από πράξεις

$$\begin{aligned} &29:2=14,5 && 14,5\times14,5=210,25\\ &210,25-210=0,25 && \sqrt{0,25}=0,5\\ &14,5+0,5=15 && 14,5-0,5=14 \end{aligned} \quad . \tag{11}$$

Αν κάποιος δει με ερευνητική διάθεση τις (11), εύκολα καταλαβαίνει ότι πρόκειται για την επίλυση της εξίσωσης

$$x^2-29x+210=0\,, \tag{12}$$

κάτι που αποδεικνύει πως οι Βαβυλώνιοι είχαν τρόπο για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού [5].

Στην αρχαία Ελλάδα άνθισε κυρίως η Γεωμετρική Άλγεβρα [6], τα θεμέλια της οποίας είχαν τεθεί από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων. Στην μελέτη του Διόφαντου στα «Αριθμητικά», για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων στο σύνολο των ρητών, δόθηκε την απαραίτητη συνέχεια [5].

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ., και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard [7]. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τους Wessel, Argand και Gauss έκανε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

«Εξίσωση 2ου βαθμού» ως προς x,
με πραγματικούς συντελεστές εξαρτώμενους από το x

Έστω η εξίσωση

$$\alpha(x)f^2(x)+\beta(x)f(x)+\gamma(x)=0, \tag{13}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι η f και $x\in D_\alpha\cap D_\beta\cap D_\gamma\cap D_f\subseteq\mathbb{R}$.

Αν $\alpha(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_\alpha\cap D_\beta\cap D_\gamma\cap D_f$, η (13) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(x)+\frac{\beta(x)}{2\alpha(x)}\right)^2=\frac{\Delta(x)}{4\alpha^2(x)}, \tag{14}$$

όπου

$$\Delta(x)=\beta^2(x)-4\alpha(x)\gamma(x), \tag{15}$$

είναι η «διακρίνουσα» της εξίσωσης (13). Χρησιμοποιούμε εισαγωγικά, διότι η έννοια της διακρίνουσας σε τέτοια εξίσωση δεν ορίζεται σε κάποιο βιβλίο, η μορφή όμως της συνάρτησης Δ μας επιτρέπει να το πράξουμε.

Όταν $x\in D_\alpha\cap D_\beta\cap D_\gamma\cap D_f$ με $\Delta(x)<0$, η εξίσωση (13) είναι αδύνατη.

Αν $\Delta(x)\geq 0$ και $x\in D_\alpha\cap D_\beta\cap D_\gamma\cap D_f$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετράγωνου η εξίσωση (13) δίνει

$$f(x)=\frac{-\beta(x)\pm\sqrt{\Delta(x)}}{2\alpha(x)}, \tag{16}$$

όπου η έκφραση αυτή συνδέει κάθε τιμή του x με την εικόνα του f(x), κάτι που σημαίνει ότι δεν είναι ο τύπος της συνάρτησης f, απλά μας παρέχει όλες τις δυνατές τιμές f(x).

Είναι φανερό δηλαδή ότι η θετική «διακρίνουσα» δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης όπως όταν έχουμε πραγματικούς σταθερούς ή παραμετρικούς συντελεστές, κάτι το οποίο θα γίνει φανερό από τα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παρόμοια προσέγγιση υπάρχει από τον Arnold [8], όπου κατά την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$A(x,y)+pB(x,y)+p^2C(x,y,p)=0, \tag{17}$$

όπου

$$y=y(x),\ p=y'(x), \tag{18}$$

γίνεται χρήση της διακρίνουσας για να προκύψει ότι

$$p = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}. \tag{19}$$

Η χρήση της διακρίνουσας σε μια «εξίσωση δευτέρου βαθμού» είναι αυτονόητο ότι ισχύει, αφού πρακτικά είναι γενίκευση ιδιοτήτων στις οποίες εμφανίζονται μεταβλητές που μπορούν να αντικατασταθούν από συναρτήσεις χωρίς καμία επεξήγηση. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \tag{20}$$

αφού ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός στο σώμα των πραγματικών αριθμών [9].
Με το ίδιο σκεπτικό ισχύει

$$f(x)g(x) = g(x)f(x), \tag{21}$$

για κάθε $x \in D_f \cap D_g \subseteq \mathbb{R}$.

Από την πλευρά της μαθηματικής λογικής υπάρχει το θεώρημα της αντικατάστασης, το οποίο εξασφαλίζει την εγκυρότητα των αντικαταστάσεων που κάνουμε στα μαθηματικά. Ο Shoenfield [10] ορίζει μια συγκεκριμένη εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο A, ως φραγμένη αν εμφανίζεται σε ένα τμήμα του A της μορφής $\exists xB$, αλλιώς η συγκεκριμένη εμφάνιση της x λέγεται ελεύθερη στον A. Η μεταβλητή λέγεται γενικά ελεύθερη στον A αν μια τουλάχιστον εμφάνισή της είναι ελεύθερη. Με $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1,a_2,\ldots a_n]$ συμβολίζει τον τύπο που προκύπτει αν όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις της x_1 αντικατασταθούν με a_1, όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις της x_2 αντικατασταθούν με a_2, …, όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις της x_n αντικατασταθούν με a_n.
Σύμφωνα με το θεώρημα αντικατάστασης [10], έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n] \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A, \\ &\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \to A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]. \end{aligned} \tag{22}$$

Από το θεώρημα προκύπτει ο εξής αυτοματισμός: Αν ο $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ είναι θεώρημα τότε και ο $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]$ είναι θεώρημα. Με άλλα λόγια αν έχουμε αποδείξει τον πρώτο ισχυρισμό, δεν χρειάζεται να αποδείξουμε και το δεύτερο.

Εφαρμογές σε «εξισώσεις 2ου βαθμού»

Έστω η εξίσωση 4ου βαθμού

$$x^4+2x^2+2x+1=0, \tag{23}$$

η οποία γράφεται

$$\left(x^2+2\right)x^2+2x+1=0. \tag{24}$$

Θεωρώντας

$$\alpha(x)=x^2+2,\ \beta(x)=2,\ \gamma(x)=1, \tag{25}$$

έχουμε

$$\Delta(x)=-4-4x^2<0, \tag{26}$$

οπότε η εξίσωση (23) είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$(x+1)x^2-(2x+1)x+x=0. \tag{27}$$

Αν $x=-1$ το πρώτο μέλος της (27) ισούται με -2, οπότε $x\neq -1$.

Θεωρώντας ότι η εξίσωση (27) είναι «δευτέρου βαθμού ως προς x» και

$$\alpha(x)=x+1,\ \beta(x)=-(2x+1),\ \gamma(x)=x, \tag{28}$$

έχουμε

$$\Delta(x)=1. \tag{29}$$

Τότε η (27) ισοδύναμα δίνει

$$\begin{cases} x=\dfrac{2x+1+1}{2(x+1)} \\ \text{ή} \\ x=\dfrac{2x+1-1}{2(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x-\dfrac{x}{x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=0 \end{cases}, \tag{30}$$

που είναι δεκτές (αφού $x\neq -1$).

Παλιότερα για την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, χρησιμοποιούνταν και η διακρίνουσα. Στις πανελλήνιες εξετάσεις του 1983 (τύπου 2 για την βελτίωση της βαθμολογίας) στο τρίτο ζήτημα [11] ζητούνταν η εύρεση του συνόλου τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$y=\frac{5x}{x^2+x+1}. \tag{31}$$

Αφού το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών είναι το

$$f(A)=\{y\in\mathbb{R}/\exists x\in\mathbb{R}, y=f(x)\} \quad (32)$$

ή

$$f(A)=\{y\in\mathbb{R}/\exists x\in\mathbb{R}, yx^2+(y-5)x+y=0\}, \quad (33)$$

όπου τα διαθέσιμα εργαλεία οδηγούσαν στο

$$f(A)=\{y=0/\exists x\in\mathbb{R}, -5x=0\}\cup\{y\in\mathbb{R}^*/(y-5)^2-4y^2\geq 0\}, \quad (34)$$

άρα

$$f(A)=\{0\}\cup\{y\in\mathbb{R}^*/-3y^2-10y+25\geq 0\}, \quad (35)$$

δηλαδή

$$f(A)=\left[-5,\frac{5}{3}\right]. \quad (36)$$

Παρόμοιες λυμένες ασκήσεις υπήρχαν και σε σχολικά βιβλία [12], [13].
Ας βρούμε τώρα το σύνολο των σημείων (x,y) του επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$y^2+3y-x^2+x+2=0. \quad (37)$$

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση ως «δευτεροβάθμια» με άγνωστο το y, έχουμε

$$\alpha(x)=1,\ \beta(x)=3,\ \gamma(x)=-x^2+x+2,\ \Delta(x)=(2x-1)^2. \quad (38)$$

Τότε τα σημεία (x,y) του επιπέδου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις

$$y=-x-1,\ \ y=x-2. \quad (39)$$

Ας μελετήσουμε τώρα ένα πολύ πιο ακραίο, αλλά και ωραίο παράδειγμα [14]. Έστω η εξίσωση

$$\sqrt{5-x}=5-x^2,\ x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]. \quad (40)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και κάνοντας πράξεις ισοδύναμα καταλήγουμε στην εξίσωση

$$5^2-(2x^2+1)5+x^4+x=0,\ x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]. \quad (41)$$

Το 5 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$y^2-(2x^2+1)y+x^4+x=0,\ x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right], \quad (42)$$

με

$$\alpha(x)=1,\ \beta(x)=-(2x^2+1),\ \gamma(x)=x^4+x,\ \Delta(x)=(2x-1)^2. \qquad (43)$$

Συνεπώς

$$5=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2},\ x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right], \qquad (44)$$

οπότε ισοδύναμα καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$x^2+x-5=0 \text{ ή } x^2-x-4=0,\ x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right], \qquad (45)$$

με δεκτές λύσεις τις

$$x=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ ή } x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}. \qquad (46)$$

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x^4-x+1=0 \qquad (47)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το $x=0$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, οπότε $x\neq 0$ και θεωρούμε την (47) ως «εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x» με

$$\alpha(x)=x^2,\ \beta(x)=-1,\ \gamma(x)=1,\ \Delta(x)=1-4x^2. \qquad (48)$$

Αν

$$\Delta(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2} \text{ ή } x>\frac{1}{2}, \qquad (49)$$

η (47) είναι αδύνατη στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Αν

$$\Delta(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x<0 \text{ ή } 0<x\leq\frac{1}{2}, \qquad (50)$$

τότε

$$1<x^4+1\leq\frac{17}{16} \text{ και } \left(-\frac{1}{2}\leq x<0 \text{ ή } 0<x\leq\frac{1}{2}\right), \qquad (51)$$

οπότε η εξίσωση (47) είναι και πάλι αδύνατη στο $\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Συνεπώς η εξίσωση (47) είναι αδύνατη στους πραγματικούς.
Η εξίσωση

$$x^3+5x-6=0 \tag{52}$$

δεν έχει ρίζα το 0, οπότε την θεωρούμε ως «εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x» με

$$\alpha(x)=x,\ \beta(x)=5,\ \gamma(x)=-6,\ \Delta(x)=25+24x\,. \tag{53}$$

Αν

$$\Delta(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{25}{24}, \tag{54}$$

η εξίσωση (52) είναι αδύνατη στο $\left(-\infty,-\frac{25}{24}\right)$.

Αν

$$\Delta(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{25}{24}\leq x<0 \text{ ή } x>0\,, \tag{55}$$

τότε

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24x}}{2x},\ \text{με}\ -\frac{25}{24}\leq x<0 \text{ ή } x>0\,. \tag{56}$$

Από την (56) προκύπτει

$$2x^2+5=\pm\sqrt{25+24x},\ \text{με}\ -\frac{25}{24}\leq x<0 \text{ ή } x>0\,. \tag{57}$$

Τότε

$$4x^4+20x^2-24x=0,\ \text{με}\ -\frac{25}{24}\leq x<0 \text{ ή } x>0 \tag{58}$$

ή

$$4x(x-1)(x^2+x+6)=0,\ \text{με}\ -\frac{25}{24}\leq x<0 \text{ ή } x>0\,, \tag{59}$$

δηλαδή μοναδική λύση της (52) είναι $x=1$.

Προσφάτως στις πανελλήνιες εξετάσεις (ερώτημα Δ3 του 2010 και ερώτημα Δ1 του 2015) έχουν τεθεί θέματα τα οποία μπορούν να λυθούν θεωρώντας τις εξισώσεις που προκύπτουν ως «δευτεροβάθμιες». Στο Δ1 θέμα των εξετάσεων του 2015 στα Μαθηματικά κατεύθυνσης είχε δοθεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με

$$f(0)=0,\ f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\,. \tag{60}$$

Με κατάλληλες διαδικασίες προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (61)$$

Η συναρτησιακή εξίσωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί «ως δευτέρου βαθμού» με άγνωστη ποσότητα $u = e^{f(x)}$, οπότε η «διακρίνουσα» είναι

$$\Delta(x) = 4(x^2 + 1) \quad (62)$$

και ισχύει

$$e^{f(x)} = \frac{2x \pm \sqrt{4(x^2+1)}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (63)$$

Η έκφραση αυτή συνδέει κάθε τιμή του x με την εικόνα του f(x). Όμως ισχύει ότι

$$x - \sqrt{x^2+1} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (64)$$

και

$$x + \sqrt{x^2+1} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (65)$$

οπότε

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (66)$$

ή

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (67)$$

Η επίλυση της εξίσωσης (61) υπάρχει και στο [15] στη σελίδα 110, που λύνεται με συμπλήρωση τετραγώνου. Και οι δύο λύσεις δεν απαιτούν τη χρήση της συνέχειας της συνάρτησης f …

Ας δούμε μια εφαρμογή στην οποία ζητείται η εύρεση της συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με

$$f^2(x) - (x^2+1)f(x) + \frac{2x^2+1}{4} = 0. \quad (68)$$

Θεωρούμε την (68) ως εξίσωση «δευτέρου βαθμού ως προς f(x)» με

$$\alpha(x) = 1,\ \beta(x) = -(x^2+1),\ \gamma(x) = \frac{2x^2+1}{4},\ \Delta(x) = x^4. \quad (69)$$

Τότε

$$f(x)=\frac{x^2+1\pm x^2}{2},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \tag{70}$$

Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f, αλλά τις διάφορες πιθανές μορφές του τύπου της f, όπως

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{2}\ \text{ή}\ f(x)=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+1}{2}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{2}\ , & x<0\end{cases}\ \text{κ.τ.λ.}. \tag{71}$$

Ως τελευταία εφαρμογή [16] θα δούμε τη χρήση της διακρίνουσας για την παραγοντοποίηση της παράστασης

$$E=2^x-4^x+6^x-8^x-9^x+12^x+1,\ x\in\mathbb{R}. \tag{72}$$

Θέτοντας

$$a=2^x, b=3^x,\ x\in\mathbb{R}, \tag{73}$$

η (72) γράφεται

$$E=-b^2+(a+a^2)b+1+a-a^2-a^3. \tag{74}$$

Η (74) μπορεί να θεωρηθεί τριώνυμο ως προς b, με διακρίνουσα

$$\Delta=(a^2-a-2)^2. \tag{75}$$

Τότε η παράσταση Ε παραγοντοποιείται ως εξής

$$E=(4^x-3^x-1)(3^x-2^x-1),\ x\in\mathbb{R}. \tag{76}$$

Συμπεράσματα

Αν έχουμε έναν έγκυρο τύπο, τότε στη θέση των μεταβλητών του μπορούμε να αντικαθιστούμε οτιδήποτε (υπό την προϋπόθεση ότι ο τύπος έχει νόημα) και η σχέση που προκύπτει ισχύει. Ο δρόμος για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχει χαραχθεί με τη βοήθεια μεταβλητών. Αν οι μεταβλητές οριστούν στο σύνολο των πραγματικών, αυτές μπορούν να αντικατασταθούν με πραγματικές συναρτήσεις και οι δύο σχέσεις που προκύπτουν δίνουν ζεύγη τιμών $(x, f(x))$ και όχι τύπο συνάρτησης. Σημειωτέον ότι αν η διακρίνουσα είναι αρνητική η εξίσωση είναι αδύνατη (23), ενώ αν είναι θετική δεν είναι απαραίτητο ότι έχει λύση (47).

Ευχαριστίες
Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή μαθηματικών της Ευαγγελικής Σχολής Νέας Σμύρνης κ. Μαυρογιάννη Νικόλαο (M.Sc., Ph.D.) που είχε την ευγενή καλοσύνη να διαβάσει την εργασία μας και συζητήσει μαζί μας διάφορες λεπτομέρειες.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

1. Αδαμόπουλος Λ., κ.ά., Μαθηματικά Ι, Γ΄ Λυκείου, Άλγεβρα, *ΟΕΔΒ*, 1991.
2. Serge Lang, Undergraduate Algebra, *Springer-Verlag*, 1990.
3. Katz J. Victor, Ιστορία των Μαθηματικών, *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης*, 2013.
4. Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ., Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, *Αυτοέκδοση*, 1994.
5. Θωμαϊδης Χ. Γιάννης, Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου, *Εκδόσεις Ζήτη*, 2011.
6. Van Der Waerden, Η αφύπνιση της επιστήμης, *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης*, 2010.
7. Ανδρεαδάκης Σ., κ.ά., Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Λυκείου, *ΙΤΥΕ Διόφαντος*, 2012.
8. Arnold I. V., Geometrical methods in the theory of the ordinary differential equations, *Springer*, 1988.
9. Βάρσος Δ., κ.ά., Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα, *Εκδόσεις Σοφία*, 2005.
10. Shoenfield R. J., Mathematical logic, *Addison-Wiley*, 1967.
11. Κυριακόπουλος Αντώνης, Θέματα Μαθηματικών Εισαγωγικών Εξετάσεων 1974-1992, 1ης και 4ης Δέσμης, *Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου*, 1993.
12. Αδαμόπουλος Λ., κ.ά., Μαθηματικά Ι, Γ΄ Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων, Ανάλυση, *ΟΕΔΒ*, 1990.
13. Ανδρεαδάκης Σ., κ.ά, Άλγεβρα Α΄ Ενιαίου Λυκείου, *ΟΕΔΒ*, 1990.
14. http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=237851#p237851.
15. Durell V. C., Robson A., Advanced Trigonometry, *Dover*, 2003.
16. Andreescu T., Ganesh A., 108 Algebra Problems, *XYZ Press*, 2014.