

Η αρχική συνθήκη ξαναγράφεται:

$$xf'(x) = f(x) + f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right),$$

η οποία για να ισχύει πρέπει με  $f(x) > 0$  και  $x > 0$  ή  $f(x) < 0$  και  $x < 0$ .

Άρα  $xf'(x) - f(x) = f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ , διαιρώ με  $x^2$  και έχω:

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right). \text{ Ισοδύναμα } \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

Θέτω  $f(x)/x = g(x)$  και εξετάζω την περίπτωση που  $f(x) > 0$  και  $x > 0$ .

$$\text{Άρα } g'(x) = g(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(g(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \cdot \ln(g(x)) \Leftrightarrow (\ln g(x))' = \frac{1}{x} \cdot \ln(g(x)) \text{ ισοδύναμα}$$

$$\frac{(\ln g(x))'}{\ln(g(x))} = (\ln x)' \Leftrightarrow (\ln(\ln g(x)))' = (\ln x)' \Leftrightarrow \ln(\ln g(x)) = \ln x + c.$$

Για  $x = 1$  έχουμε  $g(1) = f(1) = e$ , άρα  $c = 0$ .

Άρα  $\ln g(x) = x$ , δηλαδή  $g(x) = e^x$  δηλαδή  $f(x) = xe^x$ , με  $x > 0$ .

Με όμοια βήματα δείχνουμε ότι  $f(x) = xe^{-x}$ , με  $x < 0$ .