

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: ΤΡΕΙΣ (3) ΩΡΕΣ**

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 8

A.2 Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle.

Μονάδες 7

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A .

Μονάδες 2

β) Αν μια συνάρτηση f είναι "1-1", τότε είναι και γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ "κοντά" στο x_0 .

Μονάδες 2

δ) Αν f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

Μονάδες 2

ε) Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(1, f(1))$ δίνεται από την εξίσωση $(\varepsilon): x - 2y + 1 = 0$, τότε:

B.1 Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 5

B.2 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1) + \sqrt[3]{f^2(x-1)} - 2}{x-2}$.

Μονάδες 5

B.3 Να δείξετε ότι η ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία $B(\xi, f(\xi))$, και $\Gamma(-\xi, 0)$, με $\xi \in \mathbb{R}^*$, εφάπτεται της C_f στο B .

Μονάδες 7

B.4 Να βρείτε το σημείο M της C_f , που απέχει την ελάχιστη απόσταση απ' το σημείο $\Delta\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να δείξετε ότι:

Γ.1 Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 1$.

Μονάδες 4

Γ.2 Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$.

Μονάδες 7

Γ.3 Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2\alpha + \beta}{3}$.

Μονάδες 6

Γ.4 Αν, επιπλέον, $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = 3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$, τέτοιες ώστε

- $f(0) = g(0) = 1$
- $2f'(x) + f^2(x)g(x) = 2g'(x) + g^2(x)f(x) = 0$, για κάθε $x > -1$.

Δ.1 Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και $f = g$.

Μονάδες 7

Δ.2 Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, για κάθε $x > -1$.

Μονάδες 4

Δ.3 Να δείξετε ότι τρία οποιαδήποτε διαφορετικά, ανά δύο, σημεία της γραφικής παράστασης της f , είναι κορυφές τριγώνου.

Μονάδες 6

Δ.4 Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \alpha + 1$, με $\alpha > 0$. Στη συνέχεια, να βρείτε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία!!!