
749) A) i) Δίνεται η συνάρτηση $f, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Να μελετηθεί ως προς τη

μονοτονία – ακρότατα, κυρτότητα – σημεία καμπής.

ii) Δίνεται και η συνάρτηση $F, F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , να

υπολογίσετε την F' και να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η F είναι περιττή.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ και στη

συνέχεια να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

iii) Έστω και η $G, G(x) = F(2x) - F(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να μελετήσετε

την μονοτονία της στο \mathbb{R} .

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) \leq \ln 2$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει στο \mathbb{R} το όριο της \mathbf{G} , όταν $x \rightarrow +\infty$.

ε) Να δείξετε ότι η \mathbf{G} είναι περιττή.

στ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{G}(x)$.

Β) Δίνεται τέλος και η συνάρτηση $\Phi, \Phi(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

i) α) Να υπολογίσετε την Φ' και να δειχθεί ότι $\mathbf{F} = \Phi$.

β) Με βάση αυτό να επαληθεύσετε την τιμή του ορίου της $\mathbf{G}(x)$ όταν $x \rightarrow +\infty$.

ii) α) Για $x > 0$, να δείξετε ότι $\mathbf{F}(x) = \ln 2x + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2}\right)$.

β) Να βρεθούν οι ασύμπτωτές της \mathbf{F} , εάν υπάρχουν.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της \mathbf{F} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.
