$$\Sigma T: y-0=-\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma T: y=-\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}x+\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}\cdot x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma T: y=-\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}x+\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}\cdot\frac{\alpha\mu}{\alpha-\mu}\Leftrightarrow$$

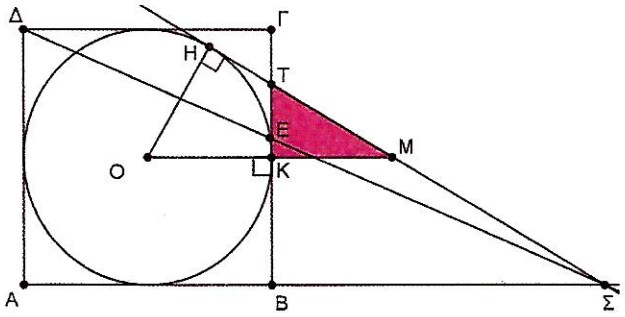
$$\Leftrightarrow \boxed{\Sigma T:\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}x+y-\frac{\alpha+\mu}{2}=0}$$

$$d(O,\Sigma T)=\frac{\left|\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha+\mu}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\mu^2}{2\alpha\mu}\right)^2+1}}=$$

$$=\frac{\frac{\alpha^2+\mu^2}{4\mu}}{\sqrt{\frac{(\alpha^2-\mu^2)^2+4\alpha^2\mu^2}{4\alpha^2\mu^2}}}=\frac{\frac{\alpha^2+\mu^2}{4\mu}}{\frac{\alpha^2+\mu^2}{2\alpha\mu}}=\frac{\alpha}{2}.$$

Ευκλείδεια Απόδειξη *Ειδική περίπτωση με το Ε μέσο του ΒΓ υπάρχει στη Γεωμετρία Γ. Σ. Σταυριανίδη, έκδοση 1960 (Θεσσαλονίκη). Αυτή άλλωστε ήταν και η αφορμή της γενίκευσης που κάναμε στην έλλειψη.*

Θεωρούμε αρχικά το Ε μεταξύ Β και Γ (ανάλογα εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις).



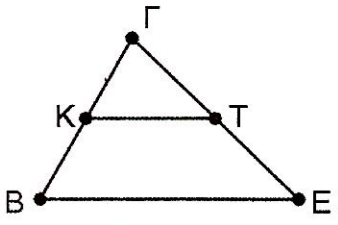
Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α, ΒΕ = λ, ΤΕ = ΤΓ και Κ το μέσο του ΒΓ. Τότε:

$$TE=T\Gamma=\frac{\alpha-\lambda}{2},\ B\Gamma=\frac{BE+B\Gamma}{2}=\frac{\lambda+\alpha}{2}$$

$$(\text{ή } B\Gamma=\alpha-\Gamma T),\ K\Gamma=\frac{\alpha}{2}-T\Gamma=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha-\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

[και απ' ευθείας για κάθε τριάδα σημείων Β, Γ, Ε ισχύει: {Κ μέσο του ΒΓ, Τ μέσο του ΕΓ} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K\Gamma=\frac{BE}{2}=\frac{\lambda}{2}\quad (\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ \alpha)].$$



Σχήμα α

Αν ΒΣ = x, τότε $\triangle$ ΣΑΔ $\approx$ $\triangle$ ΣΒΕ

$$\Rightarrow\frac{x+\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\lambda}\Rightarrow 1+\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\lambda}\Rightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\lambda}-1\Rightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha-\lambda}{\lambda}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{\alpha\lambda}{\alpha-\lambda}}.\ \triangle KTM\approx\triangle B\Sigma T$$

$$\Rightarrow\frac{KM}{x}=\frac{TK}{TB}\Rightarrow\frac{KM}{x}=\frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda+\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\cdot x=\frac{\alpha\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow OM=OK+KM\Rightarrow\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}=$$

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha^2-\lambda^2+2\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow MT^2=KT^2+KM^2=$$

$$=\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\alpha^2\lambda^4}{(\alpha^2-\lambda^2)^2}=\frac{\lambda^2}{4}\left[1+\frac{4\alpha^2\lambda^2}{(\alpha^2-\lambda^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^2}{4}\cdot\frac{(\alpha^2-\lambda^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}{(\alpha^2-\lambda^2)^2}=\frac{\lambda^2}{4}\cdot\frac{(\alpha^2+\lambda^2)^2}{(\alpha^2-\lambda^2)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow MT=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}.$$

Αν λοιπόν $OH\perp\Sigma T$, τότε:

$$\triangle OHM\approx\triangle TKM\Rightarrow\frac{OH}{OM}=\frac{TK}{TM}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow OH=\frac{TK}{TM}\cdot OM=\frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\lambda^2}{\alpha^2-\lambda^2}=\frac{\alpha}{2}.$$

Άρα η ΣΤ εφάπτεται του εγγεγραμμένου κύκλου.