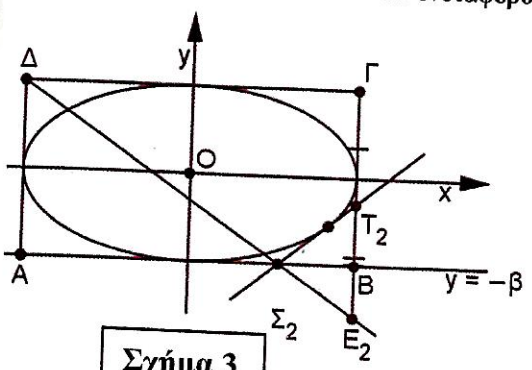
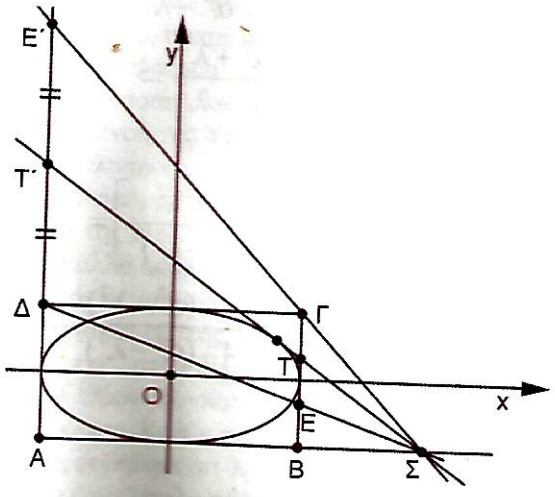


Σχήμα 3

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν τη δεύτερη εφαπτομένη της έλλειψης από το Σ, αρκεί να θεωρήσουμε το σημείο τομής Ε της ΣΔ με την ΒΓ και να ενώσουμε το Σ με το μέσο Τ της ΕΓ. Ανάλογα εργαζόμαστε όταν το Σ ανήκει σε κατακόρυφη εφαπτομένη.

Σχόλιο: Το Σ μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ΑΒ, οπότε το Ε θα είναι το αντίστοιχο σημείο της ΒΓ. Εξάλλου αν ενώσουμε το Σ με το Γ και η ΣΓ τμήσει την ΑΔ στο Ε′, τότε σύμφωνα με το θεώρημα της δέσμης με κορυφή το Σ η ευθεία ΣΤ θα περάσει από το μέσο Τ′ της ΔΕ′. Έτσι λοιπόν η εφαπτομένη μπορεί να κατασκευαστεί και αν ενώσουμε το Σ με το μέσο Τ′ της ΔΕ′. Ανάλογα εργαζόμαστε για τις θέσεις Σ_1, Σ_2 του Σ όπως φαίνεται καθαρά στα Σχήματα 1, 2 και 3.



Ως γνωστόν η συνθήκη επαφής της ευθείας $y = \lambda x + \kappa$ με την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ή με την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2$ ή $-\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2$ αντιστοίχως (blak).

Στην υπερβολή λοιπόν συμφέρει να παρατηρήσουμε ότι:

$-\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow (\lambda\alpha - \beta)(\lambda\alpha + \beta) = \kappa^2$, ενώ στην έλλειψη ότι:

$\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \kappa^2 - \lambda^2\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = (\kappa - \lambda\alpha)(\kappa + \lambda\alpha)$.

Παρατήρηση:

Για $\alpha = \beta = \rho$ έχουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$ και η συνθήκη $\beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2$ ισοδυναμεί με την $d(O, \varepsilon) = \rho$, όπου $\varepsilon : y = \lambda x + \kappa$. Πράγματι: $\varepsilon : \lambda x - y + \kappa = 0$, οπότε

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \kappa|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \rho \Leftrightarrow \kappa^2 = \rho^2(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 = \rho^2\lambda^2 + \rho^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = \alpha^2\lambda^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \lambda^2\alpha^2 = \kappa^2$$

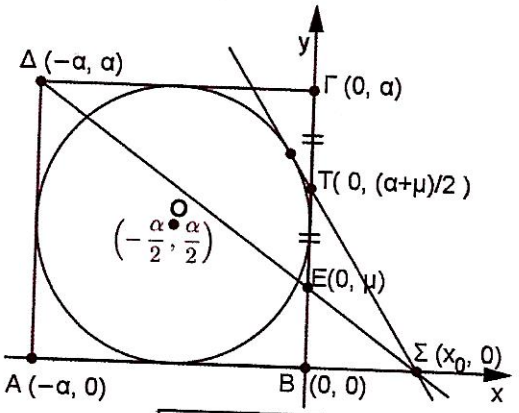
Στην απόδειξη για την έλλειψη θέτοντας $\alpha = \beta = \rho$ προκύπτει η απόδειξη για τον κύκλο.

Βέβαια στην περίπτωση του κύκλου συμφέρει να θεωρήσουμε ως ημιάξονα των x την αντικείμενη ημιευθεία της ΒΑ και ως ημιάξονα των y την ημιευθεία ΒΓ διότι τότε έχουμε $x_B = x_E = x_T = x_\Gamma = 0$. Πράγματι έτσι βρίσκουμε:

$\overrightarrow{\Delta E} = (\alpha, \mu - \alpha)$, $\overrightarrow{E\Sigma} = (x_0, -\mu)$.

$$\overrightarrow{\Delta E} \,/\!/\, \overrightarrow{E\Sigma} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & -\mu \\ \alpha & \mu - \alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_0(\mu - \alpha) +$$

$$+ \alpha\mu = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\alpha\mu}{\alpha - \mu}.$$



Σχήμα 4

Άρα $\overrightarrow{T\Sigma} = \left(x_0, -\frac{\alpha + \mu}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{T\Sigma} = \frac{-\frac{\alpha + \mu}{2}}{x_0} = -\frac{\alpha + \mu}{2 \cdot \frac{\alpha\mu}{\alpha - \mu}} = -\frac{\alpha^2 - \mu^2}{2\alpha\mu}$$, οπότε