Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της Έλλειψης

Γεωμετρική κατασκευή της δεύτερης εφαπτομένης έλλειψης από τυχαίο σημείο μιας οριζόντιας ή μιας κατακόρυφης εφαπτομένης της

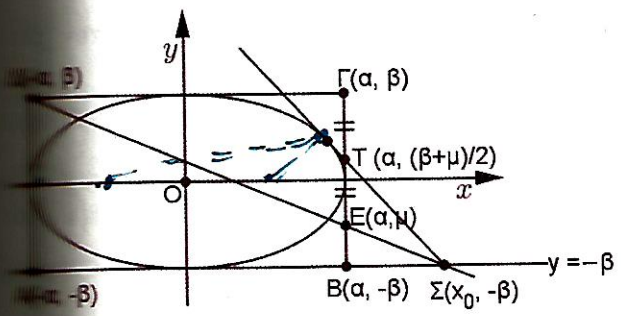
Από τον **Γιώργο Τασσόπουλο**
Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών.

Έστω ΑΒΓΔ το περιγεγραμμένο σε μια έλλειψη ορθογώνιο και Σ τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ. Αν Ε το σημείο τομής των ΣΔ, ΒΓ και Τ το μέσο του ΕΓ, τότε η ΣΤ εφάπτεται της έλλειψης

Απόδειξη

Παίρνουμε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

και τοποθετούμε , χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha,\beta>0$ και $AB//x'x$ με $x_A<0$ και $y_A<0$.



Σχήμα 1

Αν $E(\alpha,\mu)$, τότε $T\left(\alpha,\frac{\beta+\mu}{2}\right)$, οπότε

$\overrightarrow{\Delta E}=(2\alpha,\mu-\beta)$, $\overrightarrow{E\Sigma}=(x_0-\alpha,-\beta-\mu)$ και

$\overrightarrow{\Delta E}\,//\,\overrightarrow{E\Sigma}\Rightarrow\begin{vmatrix}x_0-\alpha & -\beta-\mu\\ 2\alpha & \mu-\beta\end{vmatrix}=0\Rightarrow$

$(x_0-\alpha)(\mu-\beta)+2\alpha(\beta+\mu)=0\Rightarrow x_0=\frac{\alpha(\mu+3\beta)}{\beta-\mu}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{T\Sigma}=\left(x_0-\alpha,-\beta-\frac{\beta+\mu}{2}\right)=\left(x_0-\alpha,-\frac{3\beta+\mu}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\lambda_{\Sigma T}=\frac{-\frac{3\beta+\mu}{2}}{x_0-\alpha}=-\frac{\frac{3\beta+\mu}{2}}{\frac{\alpha(\mu+3\beta)}{\beta-\mu}-\alpha}=-\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}$

Άρα $\Sigma T: y+\beta=-\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}(x-x_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\Sigma T: y=-\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}x+x_0\cdot\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}-\beta.$

Έχουμε $\Sigma T: y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda=-\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}$

και $\kappa=x_0\cdot\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\alpha(\beta+\mu)}-\beta=$

$=\frac{\alpha(\mu+3\beta)}{\cancel{\beta-\mu}}\cdot\frac{(3\beta+\mu)\cancel{(\beta-\mu)}}{4\alpha(\beta+\mu)}-\beta=\frac{(3\beta+\mu)^2}{4(\beta+\mu)}-\beta.$

Αρκεί λοιπόν $\beta^2+\lambda^2\alpha^2=\kappa^2$, ή $\beta^2=\kappa^2-\lambda^2\alpha^2$.

Έχουμε πράγματι: $\kappa^2-\lambda^2\alpha^2=(\kappa+\lambda\alpha)(\kappa-\lambda\alpha)$

και $\kappa+\lambda\alpha=\frac{(3\beta+\mu)^2}{4(\beta+\mu)}-\beta-\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\cancel{\alpha}(\beta+\mu)}\cdot\cancel{\alpha}=$

$=\frac{3\beta+\mu}{4(\beta+\mu)}(3\beta+\mu-\beta+\mu)-\beta=\frac{3\beta+\mu}{4(\beta+\mu)}\cdot2(\beta+\mu)-\beta=$

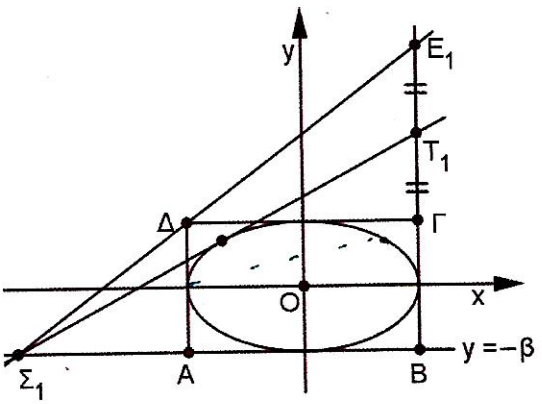
$=\frac{3\beta+\mu}{2}-\beta=\boxed{\frac{\beta+\mu}{2}}$ (1),

$\kappa-\lambda\alpha=\frac{(3\beta+\mu)^2}{4(\beta+\mu)}-\beta+\frac{(3\beta+\mu)(\beta-\mu)}{4\cancel{\alpha}(\beta+\mu)}\cdot\cancel{\alpha}=$

$=\frac{3\beta+\mu}{4(\beta+\mu)}(3\beta+\cancel{\mu}+\beta-\cancel{\mu})-\beta=\frac{3\beta+\mu}{4(\beta+\mu)}\cdot4\beta-\beta=$

$=\frac{3\beta+\mu}{\beta+\mu}\cdot\beta-\beta=\beta\left(\frac{3\beta+\mu}{\beta+\mu}-1\right)=\boxed{\frac{2\beta^2}{\beta+\mu}}$ (2).

Άρα: (1), (2) $\Rightarrow(\kappa+\lambda\alpha)(\kappa-\lambda\alpha)=\beta^2$



Σχήμα 2