

33^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα
Τίρανα, 7 Μαΐου 2016

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι «ένα προς ένα» και τέτοιες, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο n , να ισχύει

$$\left| \sum_{i=1}^n i \left(f(x+i+1) - f(f(x+i)) \right) \right| < 2016.$$

Πρόβλημα 2.

Έστω $ABCD$ ένα εγγράψιμο τετράπλευρο με $AB < CD$. Οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο F και οι ευθείες AD και BC τέμνονται στο σημείο E . Θεωρούμε τις προβολές K και L του σημείου F στις πλευρές AD και BC αντίστοιχα και τα μέσα M , S και T των EF , CF και DF αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων MKT και MLS ανήκει στο τμήμα CD .

Πρόβλημα 3.

Να βρείτε όλα τα μονικά πολυώνυμα f με ακεραίους συντελεστές που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε ο p να διαιρεί τον $2(f(p)!)+1$ για κάθε πρώτο $p > N$, για τον οποίο ο αριθμός $f(p)$ είναι θετικός ακέραιος.
Σημείωση: Ένα μονικό πολυώνυμο έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του ίσο με 1.

Πρόβλημα 4.

Το επίπεδο χωρίζεται σε μοναδιαία τετράγωνα από δύο σύνολα παράλληλων ευθειών, σχηματίζοντας ένα άπειρο πλέγμα. Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο χρωματίζεται με ένα από τα 1201 χρώματα έτσι, ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με περίμετρο 100 το οποίο να περιέχει δύο τετράγωνα του ίδιου χρώματος. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο με διαστάσεις 1×1201 ή 1201×1 που να περιέχει δύο τετράγωνα του ίδιου χρώματος.
Σημείωση: Υποθέτουμε εδώ ότι κάθε ορθογώνιο έχει πλευρές που περιέχονται στις ευθείες του πλέγματος.