ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :3

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 10

Β. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano .

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος**

α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] ,τότε $\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)+G(\alpha)$

Μονάδες 2

β. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση f g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει πάντα : $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g'(x_0)$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση που είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της , είναι αναγκαστικά και γνησίως μονότονη .

Μονάδες 2

ε. Αν η f δέχεται σε ένα σημείο της οριζόντια εφαπτόμενη , τότε θα έχει στο σημείο αυτό κατ ' ανάγκη και τοπικό ακρότατο .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w τέτοιοι ώστε $|z+2-2i|=\alpha$ και $|w-1+i|=\beta$, α , β > 0 . Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-\beta x-6}{x^2-4}=\dfrac{7}{4}$,

α. να δείξετε ότι α = 2 , β = 1 .

Μονάδες 9

β. να βρείτε που κινούνται οι εικόνες των z , w

Μονάδες 6

γ. να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f:\Re\to\Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, με σύνολο τιμών το $\Re$, τέτοια ώστε $f^3(x)+2f(x)=x$ για κάθε $x\in\Re$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα κοίλα και τα σημεία καμπής . **Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} με τύπο $f^{-1}(x)=x^3+2x$, $x\in\Re$.

Μονάδες 5

γ. Αν $g(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2}$ να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , την ασύμπτωτη και τις ευθείες x = 1 , x = e . **Μονάδες 7**

δ. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx=3$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f(x)=1+\int_{x}^{2x} f(t-x)dt$ για κάθε $x \in \Re$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x}$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(x)=\int_{1}^{x} f(t^{2})dt$, τον x΄x και τον y΄y .

Μονάδες 7

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{x}^{x+2} f(t^{2})dt$, $x \in \Re$.

❶ Να δείξετε ότι η g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (- 2 , 0)

Μονάδες 6

❷ Να αιτιολογήσετε ότι είναι g(x) > 0 και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln g(x)}{x^{2}}$

Μονάδες 6

☠ **d.** Να δείξετε ότι

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x^{2}}h(x)\right)=0$

e. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της h που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

ΘΕΜΑ 1^{o} Γ. ❶ Λ ❷ Σ ❸ Λ ❹ Λ ❺ Λ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. Θεωρώ $g(x)=\dfrac{\alpha x^2-\beta x-6}{x^2-4} \Leftrightarrow g(x)(x^2-4)=\alpha x^2-\beta x-6$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)(x^2-4)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\alpha x^2-\beta x-6\right)\Leftrightarrow 0=4\alpha-2\beta-6\Leftrightarrow \beta=2\alpha-3$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-(2\alpha-3)x-6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-2\alpha+3x-6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x(x-2)+3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{2a+3}{4}$

Άρα $\dfrac{2a+3}{4}=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow a=2$ οπότε $\beta=1$.

β. $|z+2-2i|=2$ άρα η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο Κ (- 2 , 2) , R = 2

$|w-1+i|=1$ άρα η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο Λ (1 , - 1) , ρ = 1

γ. $|z-w|_{max}=(\text{ΚΛ})+R+\rho=\sqrt{(1+2)^2+(-1-2)^2}+2+1=\sqrt{18}+3=3\sqrt{2}+3$

$|z-w|_{min}=(\text{ΚΛ})-R-\rho=\sqrt{(1+2)^2+(-1-2)^2}-2-1=3\sqrt{2}-3$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. $3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$

Επίσης $f''(x)=-\dfrac{6\cdot f(x)\cdot f'(x)}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}$ και $f^3(0)+2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+2)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

Οπότε για $x>0$ είναι $f(x)>0$ άρα $f''(x)<0$ δηλ. f κοίλη στο $(-\infty,0]$

για $x<0$ είναι $f(x)<0$ άρα $f''(x)>0$ δηλ. f κυρτή στο $[0,+\infty)$

Επιπλέον $f''(0)=0$ άρα παρουσιάζει σημείο καμπής στο (0 , 0) .

β. $f^3\left(f^{-1}(x)\right)+2f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x^3+2x$, $x\in\Re$

γ. $g(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2}=\dfrac{x^3+2x}{x^2}=x+\dfrac{2}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Επομένως $E=\int_1^e |g(x)-x|dx=\int_1^e \dfrac{2}{x}dx=\left[2\ln x\right]_1^e=2$

δ. Στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ άρα $dx=f'(u)du$

Για $x=0$ έχω $f(0)=f(u)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=0$ ενώ για $x=1$ έχω $f(3)=f(u)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=3$.

$$\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 uf'(u)du=\int_0^3 f(x)dx+\left[uf(u)\right]_0^3-\int_0^3 f(u)du=3f(3)=3$$

ΘΕΜΑ 4^o

α. Θέτουμε $t-x=u$ οπότε $dt=du$. Για $t=x$, $u=0$ ενώ για $t=2x$, $u=x$

δηλ. $f(x)=1+\int_0^x f(u)du$. Η f είναι συνεχής , άρα η $g(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη

οπότε και η f θα είναι παραγωγίσιμη . Παραγωγίζουμε και προκύπτει

$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$. Για $x=0$ είναι c = 1 , επομένως $f(x)=e^x$

β. $h'(x)=f(x^2)>0$ δηλ. η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$

Για x < 1 είναι h(x) < h(1) δηλ. h(x) < 0 .

$$E=\int_0^1 |h(x)|dx=-\int_0^1 h(x)dx=-\int_0^1 (x)'\cdot h(x)dx=-[x\cdot h(x)]_0^1+\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

γ. ❶ Η g είναι συνεχής στο [- 2 , 0] , παραγωγίσιμη στο (- 2 , 0)

Είναι $g(0)=\int_0^2 f(t^2)dt$ και $g(-2)=\int_{-2}^0 f(t^2)dt \overset{t=-u}{=} -\int_2^0 f(u^2)du=\int_0^2 f(u^2)du$

❷ $0<x\le t\le x+2$ άρα $x^2\le t^2\le (x+2)^2 \Leftrightarrow e^{x^2}\le e^{t^2}\le e^{(x+2)^2}$

Οπότε $\int_x^{x+2} e^{x^2}dt\le \int_x^{x+2} e^{t^2}dt\le \int_x^{x+2} e^{(x+2)^2}dt \Leftrightarrow (x+2-x)e^{x^2}\le \int_x^{x+2} e^{t^2}dt\le (x+2-x)e^{(x+2)^2}$ δηλ.

$$2e^{x^2}\le \int_x^{x+2} e^{t^2}dt\le 2e^{(x+2)^2} \Leftrightarrow \ln\left(2e^{x^2}\right)\le \ln g(x)\le \ln\left(2e^{(x+2)^2}\right)\Leftrightarrow \ln 2+x^2\le \ln g(x)\le \ln 2+(x+2)^2$$

$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{x^2}+1\le \frac{\ln g(x)}{x^2}\le \frac{\ln 2}{x^2}+\frac{(x+2)^2}{x^2}$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{x^2}+1\right)=0+1=1$ και

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{x^2}+\frac{(x+2)^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{x^2}+\frac{x^2+4x+4}{x^2}\right)=0+1=1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln g(x)}{x^2}=1$.

☠ **d.** ❶ Βρίσκουμε την εφαπτόμενη στο (1 , h(1)) και προκύπτει η ευθεία ε : y = e x – e

Η h είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$, άρα θα ισχύει $h(x)\le e\cdot x-e$

Όμως $\lim_{x\to-\infty}(e\cdot x-e)=-\infty$, άρα (με απόδειξη) θα είναι $\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$

❷ $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2}h(x)\right)=0\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{e^{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{h'(x)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$

e. Η εφαπτόμενη θα είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$.

Για x = y = 0 , θα πρέπει να υπάρχει λύση της εξίσωσης

$$f(\xi)=\xi f'(\xi)\Leftrightarrow \int_1^{\xi} f(t^2)dt=\xi\cdot e^{\xi^2}\Leftrightarrow e^{-\xi^2}\int_1^{\xi} f(t^2)dt=\xi \Leftrightarrow e^{-\xi^2}\int_1^{\xi} f(t^2)dt-\xi=0$$

Θεωρούμε την $\phi(x)=e^{-x^2}\int_1^x f(t^2)dt-x$, $x\in\Re$. Είναι $\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=e^{-x^2}\int_1^x f(t^2)dt-x=+\infty$ και

$\phi(1)=-1<0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Ενδ.Τιμών το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της φ άρα υπάρχει εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της h που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .