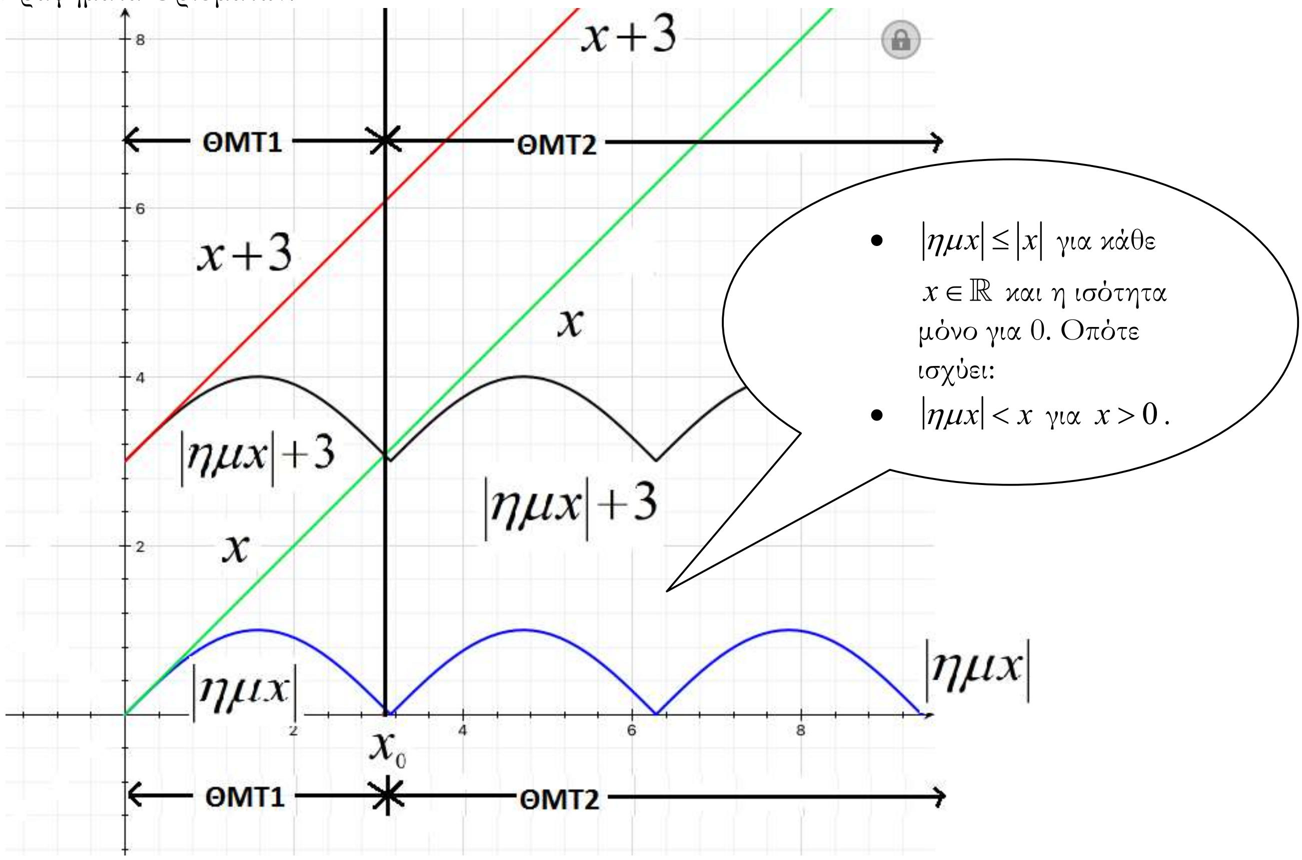
Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση
$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ όταν $x\in[0,+\infty)$

(Μονάδες 9)

Λύση

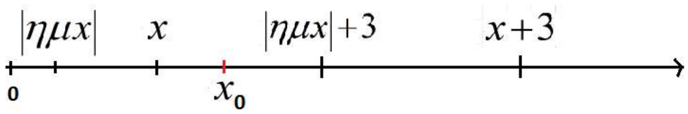
Ύπαρξη: Προφανής Ρίζα της εξίσωσης $x=0$.

Απόδειξη Μοναδικότητας: με ΘΜΤ
Παρατηρώντας ο μαθητής «ισοσκέλιση» ορισμάτων, πέραν της θεώρησης συνάρτησης η οποία αντιμετωπίζει το θέμα βέλτιστα θα μπορούσε να σκεφτεί διαμέριση και εφαρμογή Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Αυτό που θα τον προβλημάτιζε αμέσως μετά, είναι η διάταξη των ορισμάτων της f στην εξίσωση ώστε να αποφύγει το πρόβλημα της επικάλυψης. Στο παρακάτω γράφημα έχουμε μάζι και τις 4 συναρτήσεις (ορίσματα) ώστε να δούμε την δυναμική διαμέριση που προκύπτει εξαιτίας του μεταβλητού x.
Γραφήματα Ορισμάτων:



Η διαμέριση που προκύπτει εξαρτάται από την τομή των συναρτήσεων x και $|\eta\mu x|+3$ η οποία βρίσκεται στο μοναδικό σημείο με τετμημένη x_0 όπως φαίνεται στο σχήμα(Υπαρξιακή Ανάλυση για ρίζα (Bolzano + Μονοτονία)). Ξεπερνώντας και αυτό το στάδιο, ο μαθητής εφαρμόζει ΘΜΤ στα εξής διαστήματα.

1η Περίπτωση διαμέρισης $x \in (0, x_0]$



- ΘΜΤ 1 για $x \in (0, x_0]$
  - Η f είναι συνεχής στο $[|\eta\mu x|, x]$ για κάθε $x \in (0, x_0]$
  - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(|\eta\mu x|, x)$ για κάθε $x \in (0, x_0]$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{1x} \in (|\eta\mu x|, x)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi_{1x}) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|}$$

- ΘΜΤ 2 για $x \in (0, x_0]$
  - Η f είναι συνεχής στο $[|\eta\mu x| + 3, x + 3]$ για κάθε $x \in (0, x_0]$
  - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(|\eta\mu x| + 3, x + 3)$ για κάθε $x \in (0, x_0]$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{2x} \in (|\eta\mu x| + 3, x + 3)$ έτσι ώστε

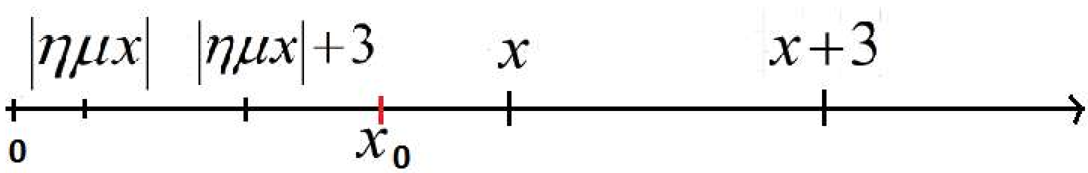
$$f'(\xi_{2x}) = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3)}{x - |\eta\mu x|}$$

$$\xi_{1x} < \xi_{2x} \overset{f\,\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}{\Leftrightarrow} f'(\xi_{1x}) < f'(\xi_{2x}) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} < \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3)}{x - |\eta\mu x|} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Οπότε δεν ισχύει η ισότητα για $x \in (0, x_0]$ άρα δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(0, x_0]$.

2η Περίπτωση διαμέρισης $x \in (x_0, +\infty)$



- ΘΜΤ 1 για $x \in (x_0, +\infty)$
  - Η f είναι συνεχής στο $[|\eta\mu x|, |\eta\mu x| + 3]$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$
  - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(|\eta\mu x|, |\eta\mu x| + 3)$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{3x} \in (|\eta\mu x|, |\eta\mu x| + 3)$ έτσι ώστε

$$f'\left(\xi_{3x}\right)=\frac{f\left(\left|\eta\mu x\right|+3\right)-f\left(\left|\eta\mu x\right|\right)}{3}$$

- ΘΜΤ 2 για $x\in\left(x_0,+\infty\right)$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[x,x+3\right]$ για κάθε $x\in\left(x_0,+\infty\right)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x,x+3\right)$ για κάθε $x\in\left(x_0,+\infty\right)$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_{4x}\in\left(x,x+3\right)$ έτσι ώστε

$$f'\left(\xi_{4x}\right)=\frac{f\left(x+3\right)-f\left(x\right)}{3}$$

$$\xi_{3x}<\xi_{4x}\overset{f\,\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}{\Leftrightarrow}f'\left(\xi_{3x}\right)<f'\left(\xi_{4x}\right)\Leftrightarrow\frac{f\left(\left|\eta\mu x\right|+3\right)-f\left(\left|\eta\mu x\right|\right)}{3}<\frac{f\left(x+3\right)-f\left(x\right)}{3}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\left|\eta\mu x\right|+3\right)-f\left(\left|\eta\mu x\right|\right)<f\left(x+3\right)-f\left(x\right)$$

Οπότε δεν ισχύει η ισότητα ούτε για $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ άρα δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $\left(x_0,+\infty\right)$.

Οπότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Μόρια (Προσωπική Άποψη):

- 1 για την προφανή ρίζα.
- 3+3 για τις δύο περιπτώσεις διαμέρισης.
- 2 χρήση μονοτονίας f' για την απόδειξη ανισοτήτων.