Πανελλαδικες Εξετασεις Γ Λυκειου
Μαθηματικα Κατεύθυνσης

Θέματα-Ενδεικτικές Λύσεις

Νικόλαος Δ. Κατσίπης

19 Μαΐου 2010

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) ς) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0.$$

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι

$$3 \leq |w| \leq 7.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση .$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right].$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi'\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 304 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 273 του σχολικού βιβλίου.

Α4. α) Σωστό.
β) Σωστό.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.
ϵ) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Για $z \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = -4$. Οπότε, $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$.

Β2.

$$\begin{aligned} z_1^{2010} + z_2^{2010} &= ((1+i)^2)^{1005} + ((1-i)^2)^{1005} = \\ &= (2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Β3. Είναι $|z_1 - z_2| = |2i| = 2$. Οπότε,
$|w - (4 - 3i)| = 2$.
Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(4,-3) και ακτίνα $\rho = 2$.

Β4. Η απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από το κέντρο $K(4,-3)$ είναι
$(OK) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 > \rho$, οπότε το σημείο O είναι εκτός κύκλου.
Είναι λοιπόν,
$(OK) - \rho \leq |w| \leq (OK) + \rho$, δηλαδή, $3 \leq |w| \leq 7$.
(Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τον γεωμετρικό τρόπο κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας

$$\Big||w-(4-3i)|-|4-3i|\Big| \leq |w-(4-3i)+(4-3i)| \leq |w-(4-3i)|+|4-3i|.)$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} > 0,$$

διότι το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta = -3 < 0$ άρα είναι (ομόσημο του συντελεστή του x^2) θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $(3x-2)^2+1 > 0$ και $x^4+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\begin{aligned}
&2(x^2-3x+2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 2(3x-2) = \ln\Big((3x-2)^2+1\Big) - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + \ln\Big((x^2)^2+1\Big) = 2(3x-2) + \ln\Big((3x-2)^2+1\Big) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2).
\end{aligned}$$

Επειδή η f είναι 1-1 (ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$), το παραπάνω είναι ισοδύναμο με $x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

Γ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Επίσης, $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Οπότε, τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$, είναι σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x-1)$$

ή

$$y = x - 1 + \ln 2.$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(1, f(1))$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

ή

$$y = 3x - 1 + \ln 2.$$

Το κοινό σημείο τομής των ευθειών με τις παραπάνω εξισώσεις είναι το $(0, \ln 2 - 1)$, το οποίο είναι σημείο του άξονα $\psi'\psi$.

Γ4.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \\ &= \int_{-1}^{1} (2x^2 + xln(x^2+1))dx = \\ &= \int_{-1}^{1} 2x^2dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2xln(x^2+1)dx =_{(t=x^2+1)} \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + \int_{2}^{2} \ln t dt = \\ &= \frac{4}{3} + 0 = \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Έστω η συνάρτηση

$$h(t) = \frac{t}{f(t) - t}.$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ (η $f(t) - t \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών). Οπότε, η συνάρτηση

$$\int_0^x h(t)dt = \int_0^x \frac{t}{f(t) - t}dt,$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η

$$f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t}dt,$$

είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη (προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων), με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = \\ &= 2f(x)\frac{x}{f(x)-x} - 2f(x) - 2x\frac{x}{f(x)-x} = \\ &= \frac{2f^2(x) - 2f^2(x) + 2xf(x) - 2xf(x)}{f(x)-x} = \\ &= 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

συνεπώς η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Από το ερώτημα **Δ3**, έχουμε ότι

$$g(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$, $g(0) = c$, από το οποίο προκύπτει ότι $c = f(0)^2 = 3^2 = 9$.
Άρα,

$$f^2(x) - 2xf(x) = 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2+9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε, $f(x) - x \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και εφόσον είναι θετική ($f(0) = 3 > 0$) θα είναι

$$f(x) - x = \sqrt{x^2+9}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

ή

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Για την F, έχουμε
$F(x) = \int_\alpha^{x+1} f(t)dt - \int_\alpha^x f(t)dt, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.
Η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για την f έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} &= \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \\ &> \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq \\ &\geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα, η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Οπότε, $F'(x) = f(x+1) - f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως,

$$F(x) < F(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ή

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης του **Δ4** είναι μέσω του συμπεράσματος του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

στα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$.)