Hermite–Hadamard

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με $\mathbf{f}''(\mathbf{x})>0,\forall\mathbf{x}\in(\alpha,\beta)$.

Έστω και οι συναρτήσεις $\mathbf{g},\mathbf{h}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ με

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\frac{\mathbf{f}(\beta)-\mathbf{f}(\alpha)}{\beta-\alpha}(\mathbf{x}-\alpha)-\mathbf{f}(\alpha)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathbf{x}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\mathbf{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

A.

Να δείξετε ότι:

i. $\mathbf{f}(\mathbf{x})\geq\mathbf{f}'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathbf{x}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\mathbf{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\forall\mathbf{x}\in[\alpha,\beta]$

ii. $\mathbf{f}(\mathbf{x})\leq\frac{\mathbf{f}(\beta)-\mathbf{f}(\alpha)}{\beta-\alpha}(\mathbf{x}-\alpha)+\mathbf{f}(\alpha),\forall\mathbf{x}\in[\alpha,\beta]$

iii. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα συμπεράσματα των παραπάνω υποερωτημάτων

B. Έστω η συνάρτηση $\mathbf{r}(\mathbf{x})=\begin{cases}\mathbf{x}^{\mathbf{x}},\mathbf{x}>0\\ 1,\mathbf{x}=0\end{cases}$

i. Να μελετήσετε την r ως προς την συνέχεια.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση r είναι κυρτή.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\mathbf{a}\to0^+}\int_{\mathbf{a}}^{\frac{1}{\mathbf{a}}}\mathbf{r}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$.

iv. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{2}}{2}<\int_0^1\mathbf{x}^{\mathbf{x}}\mathbf{dx}<1$

v. Να λύσετε την εξίσωση
$(\mathbf{x}+2010)^{\mathbf{x}+2010}-\mathbf{x}^{\mathbf{x}}+1=2011^{2011},\mathbf{x}>0$

mathxl 26-4-2010

Hermite–Hadamard

ΛΥΣΗ

Α.

i.

Επειδή η f είναι $\mathbf{f''(x)>0, \forall x \in (\alpha,\beta)}$ και συνεχής στο [α, β] θα είναι κυρτή στο [α, β] άρα θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη στο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ έχει εξίσωση

$$\mathbf{y - f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \mathbf{f'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathbf{x} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{y = f'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathbf{x} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \mathbf{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Οπότε

$$\mathbf{f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathbf{x} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \mathbf{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \forall \mathbf{x} \in [\alpha,\beta]$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

ii.

Είναι $\mathbf{g'(x) = f'(x)} - \frac{\mathbf{f}(\beta)-\mathbf{f}(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $\mathbf{f''(x)>0, \forall x \in (\alpha,\beta)}$ άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β)

Η f είναι

- συνεχής στο [α, β] από υπόθεση
- παραγωγίσιμη στο (α, β) από υπόθεση

άρα από ΘΜΤ στο [α, β], θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο (α, β) ώστε να ισχύει $\mathbf{f'}(\xi) = \frac{\mathbf{f}(\beta)-\mathbf{f}(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow \mathbf{g'}(\xi) = 0$

- Για x > ξ έχουμε $\mathbf{f'(x) > f'}(\xi) \Rightarrow \mathbf{g'(x)} > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο [ξ, β] ως συνεχής σε αυτό.

- Για x < ξ έχουμε $f'(x)<f'(\xi)\Rightarrow g'(x)<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [α, ξ] ως συνεχής σε αυτό

Άρα έχει ελάχιστο στην θέση ξ με τιμή g(ξ) και μέγιστο σε κάποιο από τα άκρα του [α, β]. Επειδή είναι $g(\alpha)=g(\beta)=0$, το μέγιστο ισούται με 0

χ	α	ξ	β
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	0 ↘	$g(\xi)$	↗ 0

Από τον ορισμό του μεγίστου θα ισχύει

$$g(x)\le 0\Leftrightarrow f(x)\le\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha),\forall x\in[\alpha,\beta]$$ με

την ισότητα να ισχύει μόνο στα α και β.

iii.

Η γεωμετρική ερμηνεία του (ι) υποερωτήματος, έχει ήδη δοθεί στην απόδειξη του και η γεωμετρική ερμηνεία του δεύτερου υποερωτήματος είναι ότι κάθε κυρτή συνάρτηση στο [α, β] βρίσκεται κάτω από την χορδή που έχει άκρα τα σημεία $(\alpha,f(\alpha)),(\beta,f(\beta))$.

B.

i.

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=-\lim_{x\to 0^+}(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}r(x)=\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^0=1=r(0)$$

άρα η r είναι συνεχής στο 0

Στο (0,+οο) είναι συνεχής ως σύνθετη της συνεχούς $x\ln x$ (γινόμενο συνεχών) με την e^x.

Κατά συνέπεια είναι συνεχής στο [0,+οο)

ii.

Για θετικά x έχουμε

Hermite–Hadamard

$$r'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=x^x\left(x\ln x\right)'=x^x\left(1+\ln x\right)$$

$$r''(x)=\left(x^x\right)'\left(1+\ln x\right)+x^x\left(1+\ln x\right)'=x^x\left(1+\ln x\right)^2+\frac{x^x}{x}=$$

$$=x^x\left[\left(1+\ln x\right)^2+\frac{1}{x}\right]>0$$

Άρα η r είναι κυρτή στο [0,+oo) ως συνεχής σε αυτό.
iii.

Επειδή η r είναι κυρτή στο $\left[\alpha,\frac{1}{\alpha}\right],\alpha>0$, από Αι για την εφαπτομένη στο $\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}$ ισχύει

$$r(x)\geq r'\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)+r\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)$$

Με ολοκλήρωση της μη αρνητικής και συνεχούς h στο $\left[\alpha,\frac{1}{\alpha}\right],\alpha>0$, η οποία μηδενίζει μόνο στο $\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}$, έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}x^x dx>\left[\frac{1}{2}r'\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\Rightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}x^x dx>\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$$

Hermite–Hadamard

Είναι

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\ln\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}}=\lim_{\alpha\to 0^+} e^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\ln\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)}=+\infty$$

Άρα

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$ και για το ζητούμενο όριο θα ισχύει

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_a^{\frac{1}{a}} r(x)dx \ge \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^{\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_a^{\frac{1}{a}} r(x)dx = +\infty$$

iv.

Από A i, ii ισχύει

$$r(x)\ge r'\left(\frac{0+1}{2}\right)\left(x-\frac{0+1}{2}\right)+f\left(\frac{0+1}{2}\right),\forall x\in[0,1]$$

$$r(x)\le \frac{r(1)-r(0)}{1-0}(x-0)+f(0),\forall x\in[0,1]$$

Από τις οποίες παίρνουμε

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln 2)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\le r(x)\le 1$ και επειδή η ισότητες δεν ισχύουν παντού, με ολοκλήρωση στο [0,1] παίρνουμε

$$\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln 2)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx<\int_0^1 x^x dx<\int_0^1 1dx\Rightarrow$$

$$0+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-0)<\int_0^1 x^x dx<1(1-0)\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\int_0^1 x^x dx<1$$

v.

Αφού η r είναι κυρτή, η r΄ θα είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+oo), κατά συνέπεια $x+2010>x\Rightarrow r'(x+2010)>r'(x),(1)$.

Για θετικά x , ορίζουμε την

$k(x)=r(x+2010)-r(x),x>0$ με παράγωγο

$k'(x)=r'(x+2010)-r'(x)>0$ από (1), άρα είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+oo) , οπότε και 1-1

Είναι $k(1)=r(1+2010)-r(1)=2011^{2011}-1$

Πάμε να λύσουμε την εξίσωση μας

$$(x+2010)^{x+2010}-x^x+1=2011^{2011}\Leftrightarrow$$

$$(x+2010)^{x+2010}-x^x=2011^{2011}-1\Leftrightarrow$$

$$r(x)=r(1)\overset{r\uparrow}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}}x=1$$

mathxl