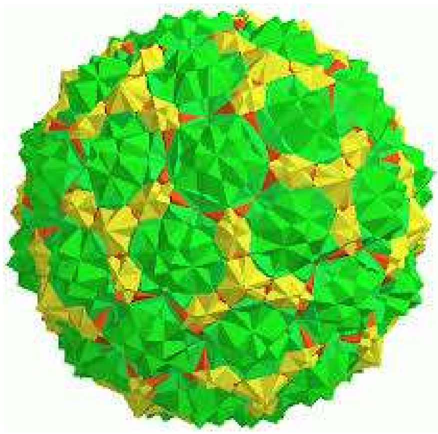
Μπάμπης Στεργίου

Μαθηματική Ομάδα

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

ΘΑΛΗΣ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ



Προσωρινό αρχείο

12/10/2016

Βιβλίο του Μαθητή

♠♠♠♠♠♠

2016

Αντί προλόγου

Φίλε μαθητή !

Πρώτα από όλα σε συγχαίρουμε για την αγάπη σου προς τα μαθηματικά και για την απόφασή σου να συμμετάσχεις στο διαγωνισμό ΘΑΛΗΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Οι σημειώσεις που κρατάς δεν είναι τίποτα παραπάνω από έναν πρόχειρο οδηγό, που θα σου επιτρέψει σε πολύ σύντομο διάστημα να κάνεις μια εκτίμηση για το πνεύμα και το επίπεδο των θεμάτων. Πρέπει όμως να σου πούμε από την αρχή ότι η συμμετοχή με αξιώσεις σε έναν διαγωνισμό μαθηματικών απαιτεί συστηματική και πολύμηνη προετοιμασία. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μερικών εβδομάδων δεν μπορεί να γίνει τίποτα περισσότερο από μια πρώτη επαφή με το πνεύμα του διαγωνισμού και μια στοιχειώδη υπενθύμιση των βασικών ασκήσεων που πρέπει να κατέχει κάποιος, ώστε να περάσει ευχάριστα και δημιουργικά τις τρεις ώρες του διαγωνισμού. Για τον λόγο αυτό κανένας μαθητής δεν πρέπει να νοιώσει απογοήτευση, αν τα θέματα του φανούν δύσκολα. Θα λέγαμε μάλιστα ότι αυτό πρέπει να είναι μια μοναδική ευκαιρία, ώστε ο μαθητής να ασχοληθεί πιο σοβαρά με τα μαθηματικά και να επιδίδεται στη λύση πιο σύνθετων ασκήσεων σε όλη τη διάρκεια της χρονιάς που θα ακολουθήσει. Μια πιο οργανωμένη ωστόσο και άρτια σχεδιασμένη συμμετοχή , μπορεί να στηριχθεί στη συνεχή μεθοδική καθημερινή ενασχόληση με το αντικείμενο, ήπιας μορφής αλλά και στη μελέτη ειδικών βιβλίων που είναι γραμμένα για το σκοπό αυτό και που αναφέρονται προς στο τέλος του τρίτου μέρους των σημειώσεων αυτών.

Οι παρούσες σημειώσεις μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικές, όταν έχουν την καθοδήγηση του μαθηματικού σου , που θα σου υπενθυμίσει γρήγορα τη βασική θεωρία κάθε κεφαλαίου και θα σου επιλέξει κατάλληλα παραδείγματα από τα πολλά που περιέχονται εδώ. Όπως και να έχουν όμως τα πράγματα, η επιτυχία είναι αποκλειστικά δική σου υπόθεση. Ήδη η επιλογή σου να πάρεις μέρος στο διαγωνισμό είναι το πρώτο σημαντικό βήμα , οπότε από κάθε άποψη μπορείς να νοιώθεις ικανοποιημένος.

Σου ευχόμαστε ολόψυχα καλή επιτυχία και καλή συνέχεια μέχρι τον Αρχιμήδη και τη Βαλκανιάδα Νέων !

♥ ■ ▲ ♥ ■ ▲ ♥ ■ ▲ ♥ ■

*****Αφιερώνεται στους συναδέλφους μαθηματικούς και τους μαθητές τους που συμμετέχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς !!!**

Μπάμπης Στεργίου

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΜΕ

ΤΑΞΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΑΛΗΣ

Λυμένα Παραδείγματα

1. Πρόβλημα στις εξισώσεις

Στην πόλη μου τα ζώα (γάτες και σκύλοι) συμπεριφέρονται παράξενα : Το 10 % από τις γάτες νομίζουν ότι είναι σκύλοι και το 10 % των σκύλων νομίζουν ότι είναι γάτες ! Μια μέρα το 26 % όλων των ζώων της πόλης (σκύλοι και γάτες) συμπεριφέρονταν σαν γάτες. Ποιο ποσοστό των ζώων είναι πραγματικές γάτες ; "

Θέμα διαγωνισμού από την Αυστραλία

ΛΥΣΗ

Στην πόλη θεωρούμε πως όλα τα ζώα είναι είτε γάτες είτε σκύλοι.
Αν χ είναι το ποσοστό των ζώων που πραγματικά είναι γάτες (είτε το πιστεύουν δηλαδή , είτε όχι), τότε το υπόλοιπο ποσοστό του συνόλου των ζώων είναι οι σκύλοι. Αυτό το ποσοστό είναι όμως $100 - \chi$ (άσχετα με το αν το πιστεύουν).
Το 10% από τις πραγματικές γάτες όμως πιστεύει ότι είναι σκύλοι, άρα μόνο το 90% από τις αληθινές γάτες πιστεύει ότι είναι γάτες. Επομένως μόνο το $\frac{90}{100}x = 0{,}9x$ είναι το ποσοστό των ζώων που είναι γάτες και το πιστεύουν.
Το 10% των σκύλων πιστεύει ότι είναι γάτες. Άρα το $\frac{10}{100}$ του $100 - x$ (το ποσοστό των ζώων που είναι σκύλοι) , δηλαδή το $0{,}1(100 - x) = 10 - 0{,}1x$ είναι το ποσοστό των ζώων που είναι σκύλοι , αλλά πιστεύουν ότι είναι γάτες.
Τα ζώα λοιπόν που νομίζουν ότι είναι γάτες αποτελείται :

- Από όλες οι γάτες , εκτός από εκείνες που νομίζουν ότι είναι σκύλοι , δηλαδή $0,9x$ των ζώων καθώς και
- Από όλους τους σκύλους που νομίζουν ότι είναι γάτες , δηλαδή $10-0,1x$

Αφού ξέρουμε ότι τη συγκεκριμένη μέρα τα ζώα που νομίζουν ότι είναι γάτες είναι το 26 % όλων των ζώων , εύκολα καταλήγουμε στην εξίσωση

$0,9x + 10 - 0,1x = 26$

Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτει ότι $x = 20$. Άρα το 20 % των ζώων είναι (πραγματικές) γάτες.

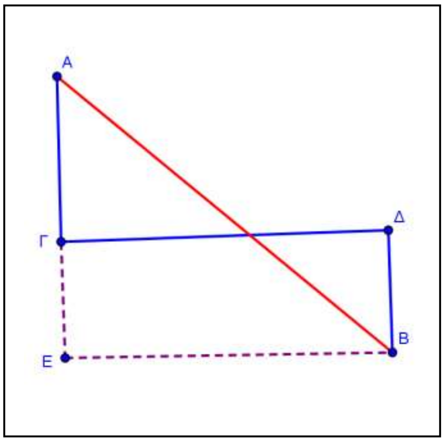
2. Πρόβλημα στο Πυθαγόρειο

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α , ταξιδεύει 3 Km νότια , στη συνέχεια 12 Km ανατολικά και τέλος ξανά 2Km νότια , μέχρι που φτάνει στο λιμάνι Β.

Πόσα χιλιόμετρα απέχει το λιμάνι Α από το λιμάνι Β ;

Θέμα ξένου διαγωνισμού

ΛΥΣΗ



Το πλοίο έκανε τη διαδρομή ΑΓΔΒ και εμείς ζητάμε το μήκος του ΑΒ που δείχνει την απόσταση των δύο λιμανιών.

Ολοκληρώνουμε το σχήμα, όπως δείχνει το διάγραμμα. Επειδή

$$AE=AΓ+ΓE = 3 + 2 = 5 \text{ και } BE =ΓΔ=12 ,$$

σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε :

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Επομένως $AB = \sqrt{169} = 13$

2.Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Έστω ν φυσικός αριθμός με $\frac{1}{\nu+1}+\frac{2}{\nu+2}+...+\frac{2010}{\nu+2010}=2009$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+...+\frac{1}{\nu+2010}=\frac{1}{\nu}.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $A=\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ ...\ \frac{1}{\nu+2010}$. Τότε:

- $\nu A=\nu\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ ...\ \frac{1}{\nu+2010}\right)=\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{\nu}{\nu+2}+\ ...\ \frac{\nu}{\nu+2010}$.
- $\nu A+2009=\left(\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{\nu}{\nu+2}+\ ...\ \frac{\nu}{\nu+2010}\right)+\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{2}{\nu+2}+\ ...\ +\frac{2010}{\nu+2010}\right)=$

$$=\left(\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+1}\right)+\left(\frac{\nu}{\nu+2}+\frac{2}{\nu+2}\right)+\ ...\ +\left(\frac{\nu}{\nu+2010}+\frac{2010}{\nu+2010}\right)=\underbrace{1+1+\ ...\ +1}_{2010\ \text{φόρες}}=2010.$$

Άρα $\nu A+2009=2010$, οπότε $\nu A=2010-2009\Leftrightarrow \nu A=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{\nu}$.

Άλλος τρόπος

Παρατηρούμε ότι αν από τους 2010 όρους του α′ μέλους αφαιρέσουμε το 1, τότε οι αριθμητές θα είναι ίσοι με $-\nu$. Πραγματικά έχουμε:

$$\frac{1}{\nu+1}+\frac{2}{\nu+2}+\frac{3}{\nu+3}+\ ...\ +\frac{2010}{\nu+2010}=2009\quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{1}{\nu+1}-1\right)+\left(\frac{2}{\nu+2}-1\right)+\left(\frac{3}{\nu+3}-1\right)+\ ...\ +\left(\frac{2010}{\nu+2010}-1\right)=2009-2010\quad \text{ή}$$

$$\frac{1-(\nu+1)}{\nu+1}+\frac{2-(\nu+2)}{\nu+2}+\ ...\ +\frac{2010-(\nu+2010)}{\nu+2010}=-1\ \text{ή}$$

$$-\nu\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ ...\ +\frac{1}{\nu+2010}\right)=-1\quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ ...\ +\frac{1}{\nu+2010}=\frac{1}{\nu}$$

Να σημειώσουμε ότι $\nu\neq 0$, διότι αν $\nu=0$, τότε η υπόθεση δίνει:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\ ...\ +\frac{2010}{2010}=2009\Leftrightarrow 2010=2009,$$

που είναι άτοπο.

4. Κάνουμε τα αθροίσματα γινόμενα

Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\alpha=2^{1653}-2^{1652}-2^{1651},\ \beta=3^{993}-2\cdot 3^{992}-2\cdot 3^{991}-3^{990},$$

$$\gamma=7^{662}+9\cdot 7^{660}-8\cdot 7^{661}.$$

(Ρουμανία – 1993)

ΛΥΣΗ

Θα γράψουμε τους αριθμούς ως γινόμενο παραγόντων, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των δυνάμεων :

- $\alpha = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651} = 2^{1651}(2^2 - 2^1 - 1) = 2^{1651}(4-2-1) = 2^{1651} = 2\cdot 2^{1650}$.
- $\beta = 3^{993} - 2\cdot 3^{992} - 2\cdot 3^{991} - 3^{990} = 3^{990}(3^3 - 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 1) = 3^{990}(27-18-6-1) = 2\cdot 3^{990}$
- $\gamma = 7^{662} + 9\cdot 7^{660} - 8\cdot 7^{661} = 7^{660}(7^2 + 9 - 8\cdot 7^1) = 7^{660}(49+9-56) = 2\cdot 7^{660}$.

Αρκεί λοιπόν να συγκρίνουμε τους αριθμούς:

$$2^{1650}, \quad 3^{990}, \quad 7^{660}.$$

Οι εκθέτεις 990, 660 μας οδηγούν στον εκθέτη 330, που είναι ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών. Είναι όμως $\text{ΜΚΔ}(1650,\ 990,\ 660) = 330$. Έτσι γράφουμε:

- $\alpha = 2\cdot 2^{1650} = 2\cdot\left(2^5\right)^{330} = 2\cdot 32^{330}$.
- $\beta = 2\cdot 3^{990} = 2\left(3^3\right)^{330} = 2\cdot 27^{330}$.
- $\gamma = 2\cdot 7^{660} = 2\left(7^2\right)^{330} = 2\cdot 49^{330}$.

Επειδή $27 < 32 < 49$, είναι $\beta < \alpha < \gamma$.

5. Τηλεσκοπικά αθροίσματα

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $S_1 = \dfrac{13}{1\cdot 14} + \dfrac{13}{14\cdot 27} + \dfrac{13}{27\cdot 40} + \ldots + \dfrac{13}{1997\cdot 2010}$.

β) $S_2 = \dfrac{2009}{1\cdot 3} + \dfrac{2009}{3\cdot 5} + \dfrac{2009}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{2009}{2007\cdot 2009}$.

ΛΥΣΗ

α) Με την πρώτη ματιά καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να δημιουργήσουμε τηλεσκοπικό άθροισμα. Είναι λοιπόν:

- $\dfrac{13}{1\cdot 14} = \dfrac{14-1}{1\cdot 14} = \dfrac{14}{1\cdot 14} - \dfrac{1}{1\cdot 14} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{14}$,
- $\dfrac{13}{14\cdot 27} = \dfrac{27-14}{14\cdot 27} = \dfrac{27}{14\cdot 27} - \dfrac{14}{14\cdot 27} = \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{27}$,
- ……………………………………………………..

- $\dfrac{13}{1997\cdot 2010}=\dfrac{2010-1997}{1997\cdot 2010}=\dfrac{2010}{1997\cdot 2010}-\dfrac{1997}{1997\cdot 2010}=\dfrac{1}{1997}-\dfrac{1}{2010}$.

Άρα:

$$S_1=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{40}\right)+\ ...\ +\left(\frac{1}{1997}-\frac{1}{2010}\right)=$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2010}=\frac{2010-1}{2010}=\frac{2009}{2010}.$$

Σχόλιο

Παρατηρούμε ότι το τυχαίο κλάσμα (όρος) του αθροίσματος έχει τη μορφή:

$$\frac{13}{\kappa(\kappa+13)}=\frac{(\kappa+13)-\kappa}{\kappa(\kappa+13)}=\frac{\kappa+13}{\kappa(\kappa+13)}-\frac{\kappa}{\kappa(\kappa+13)}=\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+3} \qquad (1).$$

Δίνοντας στο κ τις τιμές 1, 14, 27, …, 1997 παίρνουμε όλους τους όρους της παράστασης S_1.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές που προκύπτουν από την (1), βρίσκουμε την τιμή $S_1=\dfrac{2009}{2010}$.

β) Εργαζόμαστε ανάλογα. Είναι:

$$S_2=\frac{2009}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ ...\ +\frac{2}{2007\cdot 2009}\right)=\frac{2009}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\ ...\ +\frac{2009-2007}{2007\cdot 2009}\right)=$$
$$=\frac{2009}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ ...\ +\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2009}\right)\right]=$$
$$=\frac{2009}{2}\left(1-\frac{1}{2009}\right)=\frac{2009}{2}\cdot\frac{2008}{2009}=\frac{2008}{2}=1004.$$

6. Ένα ακόμα τηλεσκοπικό άθροισμα

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ ...\ +\dfrac{1}{2013\cdot 2014}$, $\beta=\dfrac{1}{1008}+\dfrac{1}{1009}+\dfrac{1}{1010}+\ ...\ +\dfrac{1}{2014}$.

Να αποδειχθεί ότι $\alpha=\beta$.

ΛΥΣΗ

Το μόνο βέβαιο που μπορούμε να σκεφτούμε βλέποντας αυτή την άσκηση, είναι ότι δεν θα κάνουμε πράξεις. Ας δούμε λοιπόν την υπέροχη τεχνική για τη λύση τέτοιων ασκήσεων:

$$\alpha=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ ...\ +\frac{1}{2013\cdot 2014}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{6-5}{5\cdot 6}+\ ...\ +\frac{2014-2013}{2013\cdot 2014}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ ...\ +\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ ...\ +\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$$

Όμως γενικά είναι $\alpha-\beta=(\alpha+\beta)-2\beta$, οπότε:

$$\alpha=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ ...\ +\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ ...\ +\frac{1}{2014}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ ...\ +\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}-\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\ ...\ +\frac{2}{2014}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ ...\ +\frac{1}{2014}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ ...\ +\frac{1}{1007}\right)=\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\ ...\ +\frac{1}{2014}=\beta\,.$$

7. Ανισότητα και τηλεσκοπικό άθροισμα

Δίνεται το άθροισμα $S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ ...\ +\frac{1}{2010^2}$. Να αποδειχθεί ότι $S<\frac{2009}{2010}$.

ΛΥΣΗ

Είναι $2^2=2\cdot 2>1\cdot 2$, οπότε:

- $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{2-1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$.
- $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.
- ……………………………..
- $\frac{1}{2010^2}<\frac{1}{2009\cdot 2010}=\frac{2010-2009}{2009\cdot 2010}=\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}$.

Άρα με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων παίρνουμε:

$$S<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ ...\ +\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}\right)=1-\frac{1}{2010}=\frac{2009}{2010}$$

8. Περίεργα αθροίσματα

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$B = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2\cdot 3^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4^2 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2012^2 - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 .$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha(\beta - \gamma)$. Έτσι:

- $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2012^2 - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2012(2012 - 2013) = -1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2012$.
- $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2011^2 - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2012 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2011(2011 - 2012) = -1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots 2011$.
- …………………………………………………………………………..

Ακολουθώντας αυτή την τακτική και για τα επόμενα βήματα, παίρνουμε:

$$B = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2\cdot 3^2 - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 =$$

$$= 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot(3-4) = 1\cdot 2^2 - 1\cdot 2\cdot 3 = 1\cdot 2\cdot(2-3) = -2 .$$

Άλλος τρόπος

Επειδή:

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots \kappa^2 = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \kappa\cdot\kappa = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \kappa\cdot\left[(\kappa+1)-1\right] =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \kappa(\kappa+1) - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \kappa ,$$

και εργαζόμενοι "τηλεσκοπικά", παίρνουμε:

$$B = (1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2) + (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3) + (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) + \ldots +$$

$$+(1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2012) - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 =$$

$$= -1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 - 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013 = -2 .$$

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\delta+\gamma}$, $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$.
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}$

αρκεί τα εμφανιζόμενα κλάσματα να έχουν νόημα.

9. Οι αγαπημένες αναλογίες

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί , $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ και $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

ΛΥΣΗ

Η πρώτη αναλογία δίνει:

$$\frac{x}{(x+1)-x}=\frac{y}{(y+2)-y}=\frac{z}{(z+3)-z}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\lambda.$$

Άρα $x=\lambda$, $y=2\lambda$, $z=3\lambda$ και είναι:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=54\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{2\lambda}+\frac{3}{3\lambda}=54\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=54\Leftrightarrow\frac{3}{\lambda}=54\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}=18\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{18}.$$

Έτσι $x=\frac{1}{18}$, $y=\frac{1}{9}$, $z=\frac{1}{6}$, οπότε:

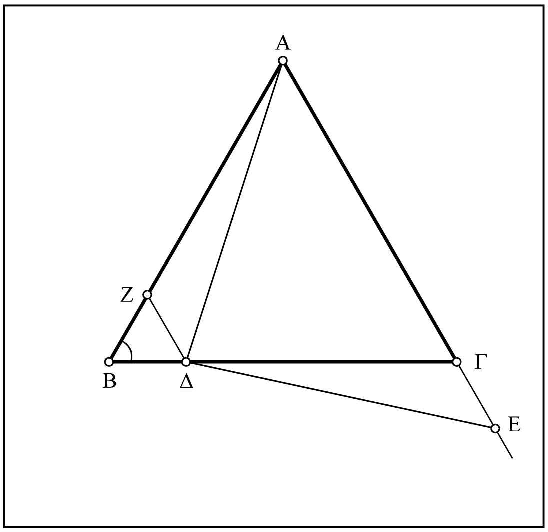
$$A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=18+9+6=43.$$

10. Που πάμε χωρίς γεωμετρία ;

Από το χώρο της γεωμετρίας μπορούμε να διαλέξουμε άφθονα διαμάντια, εδώ ωστόσο θα περιοριστούμε σε μερικά βασικά παραδείγματα. Ο απαιτητικός μαθητής μπορεί να απολαύσει πλήθος από γεωμετρικά θέματα, με την απαραίτητη θεωρία, στο βιβλίο μας : ***Γεωμετρία για Διαγωνισμούς ,τόμος 1****.*

Α. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε τμήμα $ΓΕ=ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι $ΔΑ=ΔΕ$.

ΛΥΣΗ



Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BZ=$ $=BΔ$. Επειδή $\hat{B}=60^o$ και $BΔ=BZ$, το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισόπλευρο Επομένως:

$$ΔZ=ΔB=ΓE.$$

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα, διότι:

- $ΔZ=ΓE$,
- $AZ=ΓΔ$, ως διαφορές ίσων τμημάτων,

- $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 120^{\mathrm{o}} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}$.

  Άρα θα είναι και $\Delta\mathrm{A} = \Delta\mathrm{E}$.

Β. Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ. Στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ έτσι, ώστε:

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 2\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} \text{ και } \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 2\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{Z}.$$

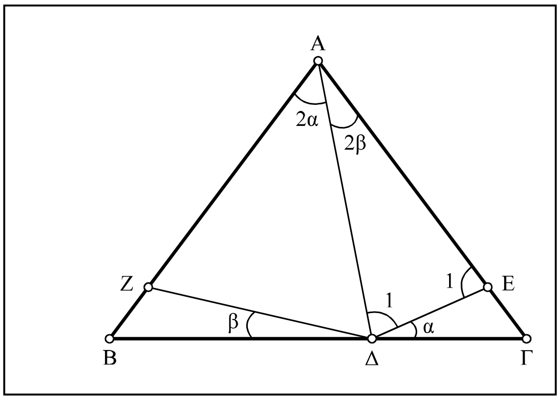
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

Έστω $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = \alpha$ και $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \beta$. Είναι:

- $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^{\mathrm{o}} - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \dfrac{180^{\mathrm{o}} - 2\alpha - 2\beta}{2} =$

  $= 90^{\mathrm{o}} - \alpha - \beta$ (1).



- $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} \overset{(1)}{=} 2\beta + (90^{\mathrm{o}} - \alpha - \beta) =$

  $= 90^{\mathrm{o}} - \alpha + \beta$ (2).

- $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} - \mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma \overset{(2)}{=}$

  $= 180^{\mathrm{o}} - (90^{\mathrm{o}} - \alpha + \beta) - \alpha =$

  $= 90^{\mathrm{o}} + \alpha - \beta + \alpha = 90^{\mathrm{o}} - \beta$.

- $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma + \mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta \overset{(1)}{=} \alpha + (90^{\mathrm{o}} - \alpha - \beta) =$

  $= 90^{\mathrm{o}} - \beta$.

  Άρα $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^{\mathrm{o}} - \beta$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Έτσι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$. Όμοια είναι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AZ}$, οπότε $\mathrm{AZ} = \mathrm{AE}$.

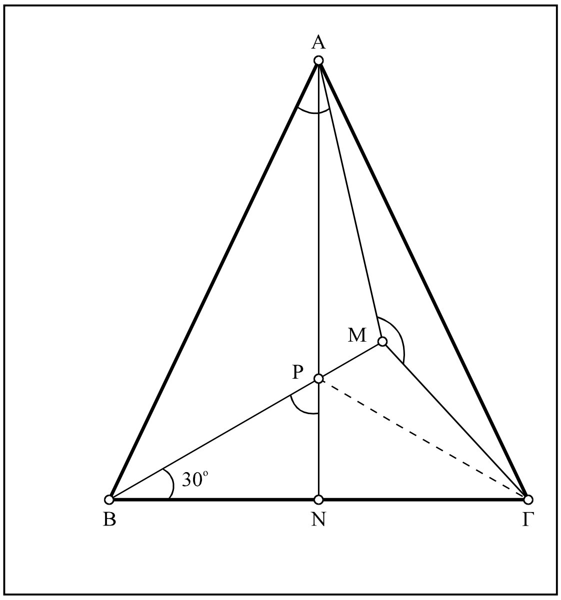
Γ. Στο εσωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma)$ υπάρχει ένα σημείο Μ, ώστε:

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^{\mathrm{o}} \text{ και } \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \frac{3}{4}\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma.$$

Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 150^{\mathrm{o}}$.

ΛΥΣΗ

Φέρνουμε το ύψος ΑΝ του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνει την ΜΒ στο Ρ. Είναι τότε:



- $\mathrm{P\hat{B}N} = \mathrm{P\hat{\Gamma}N} = 30^{o}$,
- $\mathrm{B\hat{P}N} = \mathrm{N\hat{P}\Gamma} = 60^{o}$,
- $\mathrm{M\hat{P}\Gamma} = 180^{o} - 60^{o} - 60^{o} = 60^{o}$.

Άρα $\mathrm{M\hat{P}\Gamma} = \mathrm{M\hat{P}A}$, οπότε η ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{P}\Gamma}$.

Επειδή $\mathrm{M\hat{A}B} = \frac{3}{4}\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$, είναι:

$$\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \frac{1}{4}\mathrm{B\hat{A}\Gamma},$$

δηλαδή:

$$\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \frac{1}{4}\cdot 2\mathrm{P\hat{A}\Gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{P\hat{A}\Gamma}.$$

Άρα και η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{P\hat{A}\Gamma}$, οπότε στο $\overset{\Delta}{\mathrm{PA\Gamma}}$ το Μ είναι έγκεντρο. Άρα:

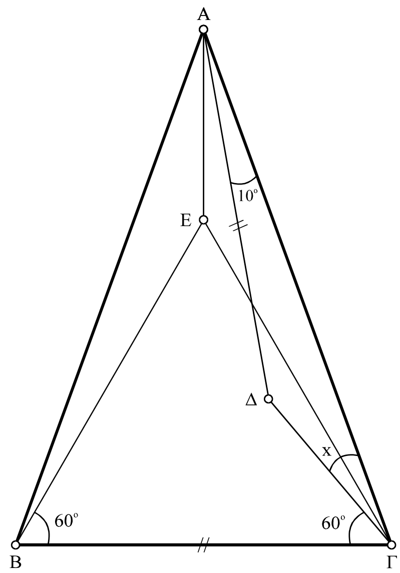
$$\mathrm{A\hat{M}\Gamma} = 90^{o} + \frac{\mathrm{A\hat{P}\Gamma}}{2} = 90^{o} + 60^{o} = 150^{o}.$$

Δ. Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 40^{o}$. Στο εσωτερικό του ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} = 10^{o}$ και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}A} = 20^{o}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε στο εσωτερικό του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΕ. Είναι τότε:

$$\mathrm{BE} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \text{ και } \mathrm{A\hat{B}E} = 10^{o} = \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}.$$

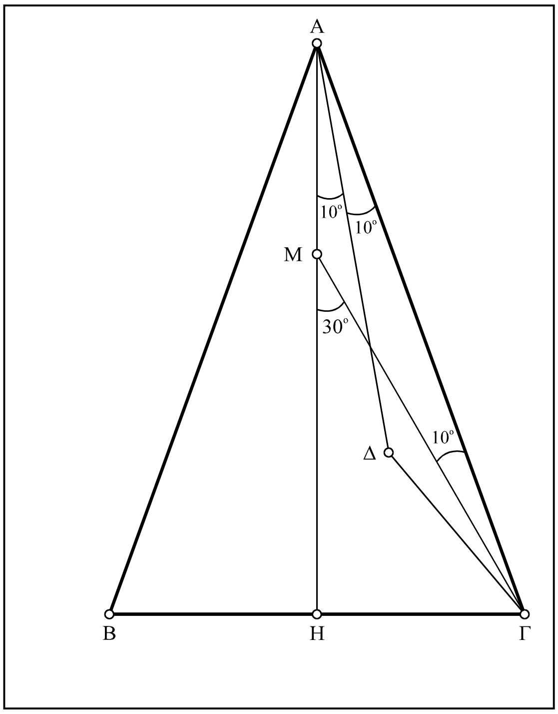


Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{ABE}}$, οπότε $\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}A} = \mathrm{B\hat{A}E} = 20^{o}$, διότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 40^{o}$ και η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

Άλλος τρόπος

Αν Η είναι το μέσο του ΑΗ και Μ είναι σημείο του ΑΗ, ώστε $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 10^{o}$, τότε:

$$\mathrm{H}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 20^{o} + 10^{o} = 30^{o}.$$



Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο ΗΜΓ είναι:

$$\mathrm{M}\Gamma = 2\mathrm{H}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}\Delta.$$

Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{AM}\Gamma} = \overset{\Delta}{\mathrm{A}\Delta\Gamma}$, διότι:

$$\mathrm{A}\Gamma - \text{κοινή},\ \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{A}\Delta,\ \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 10^{o}.$$

Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 20^{o}$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΕΜΕ

Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

ΘΑΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μπάμπης Στεργίου - 2016

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

10.1 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2002\cdot\left[(-1)^{2001}+(-1)^{2002}\right]^2 - \left[(-2)^{-3}\right]^2 + \frac{1}{64}.$$

(Ευκλείδης – 2002)

10.2 α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-\frac{8}{9}$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

(Ευκλείδης – 2011)

10.3 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=(-5)^2-(-2)^{-3}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^{1000},$$

$$B=\left[(-5)^2-(-2)^3-1\right]:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{35}{24}\right].$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς Α και Β.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{A}{B} \quad \text{και} \quad \frac{25A}{23B}.$$

(Θαλής – 2001)

10.4 Αν:

$$x+y=3(-2)^2 \quad \text{και}$$

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=7x+10y-3w-87.$$

(Θαλής – 2011)

10.5 Αν $A=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2}$ και $B=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2+3}$, όπου ν είναι θετικός ακέραιος, να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

(Θαλής – 2010)

10.6 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha=\left(8^7-9\cdot8^6+9\cdot8^5-\ldots-9\cdot8^2+9\cdot8-1\right)^{2000}$$

και

$$\beta=1024^{200}\cdot625^{1000}.$$

Να συγκρίνετε τους αριθμούς α^2 και β.

(Ευκλείδης – 1999)

10.7 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A=\alpha^2-10\alpha\beta+27\beta^2-8\beta+8.$$

(Ευκλείδης – 2002)

10.8 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A=\frac{333334\cdot666663\cdot333331+333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος.

(Θαλής – 1999)

10.9 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γραφεί ο αριθμός 105 ως άθροισμα τουλάχιστον δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών;

(Θαλής – 1999)

10.10 Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει ότι $\alpha y=\beta x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

(Θαλής – 1998)

10.11 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \\ + \ldots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2 .$$

10.12 Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = (x^2 + x + 2)^2 - x^3$.

(Ευκλείδης – 2002)

10.13 Με πόσους τρόπους μπορούμε να παραστήσουμε τον πρώτο αριθμό 1997 ως διαφορά δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών;

(Ευκλείδης – 1998)

10.14 Να βρείτε τον ακέραιο αριθμό κ, ώστε ο αριθμός:

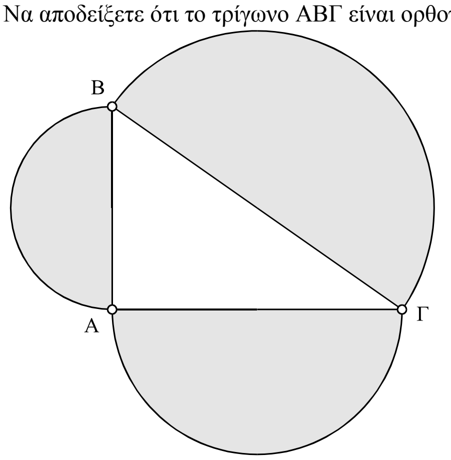
$$A = \frac{\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}{\kappa - 2}$$

να είναι ακέραιος.

(Ευκλείδης – 1998)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

10.15 Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Το μεγάλο ημικύκλιο έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων ημικυκλίων. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



(Ευκλείδης – 2002)

10.16 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $AB = x$, $B\Gamma = 10$ και $A\Gamma = x + 2$. Αν:

$$(x+2)^2 - x^2 = 28,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Θαλής – 2002)

10.17 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και το ορθογώνιο ΑΓΕΖ, έτσι ώστε η ΕΖ να περνάει από το Β. Να βρείτε το λόγο

$$\lambda = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(AZE\Gamma)}.$$

10.18 Ένα ορθογώνιο διαιρείται σε 4 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα 4 ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18, 25 τετρ. εκατοστά. να βρείτε το εμβαδόν του τέταρτου ορθογωνίου.

(Θαλής – 1999)

10.19 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ στη βάση ΒΓ και Ι το μέσο του ΑΔ. Η ευθεία ΒΙ τέμνει την ΑΓ στο Ε και η ευθεία ΓΙ τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΙΓ στο Θ, ενώ η παράλληλη από το Δ προς την ΑΓ τέμνει την ΙΒ στο Η. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

(Ευκλείδης – 1999)

10.20 Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\alpha = 26^{400},\ \beta = 82^{300} \text{ και}$$

$$\gamma = 2^{300}\sqrt{41^{600} - 2^{200} \cdot 13^{800}} .$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

(Θαλής – 1998)

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

10.21 Να βρείτε τα ψηφία a, b, c, x $(\alpha > 0)$, για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = \overline{199x}.$$

(Προκριματικός Νέων – 1999)

10.22 Δίνεται ο ακέραιος αριθμός:

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right] \cdot \nu,$$

όπου ν είναι θετικός ακέραιος. Να βρείτε τις τιμές του ν, ώστε ο Α να είναι διαιρέτης του 24.

(Ευκλείδης – 2010)

10.23 Αν διαιρέσουμε το θετικό και περιττό ακέραιο α με 5, βρίσκουμε υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

(Θαλής – 2010)

10.24 Να εξετάσετε αν υπάρχει διψήφιος φυσικός αριθμός που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του, ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του.

(Θαλής – 2010)

10.25 Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, …, 1999 δεν διαιρούνται ούτε με το 5, ούτε με το 7.

(Θαλής – 2000)

10.26 Σε μια βαλκανική συνάντηση νέων συμμετέχουν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

(Θαλής – 2001)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.27 Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς x, y, z, t, w, ώστε να ισχύει:

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{w}}}} = \frac{1998}{115}.$$

(Αρχιμήδης Νέων – 1998)

10.28 Αν x, y, z είναι θετικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα.

(Αρχιμήδης Junior – 2011)

10.29 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \geq \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \dfrac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}$,

β) $\alpha(1+\beta) + \beta(1+\gamma) + \gamma(1+\alpha) \geq 6\sqrt{\alpha\beta\gamma}$.

(Προκριματικός Νέων – 1999)

10.30 Αν α_1, α_2, …, α_ν είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(1+3\alpha_1+\alpha_1^2)(1+3\alpha_2+\alpha_2^2)\dots(1+3\alpha_\nu+\alpha_\nu^2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_\nu} > 2^{2\nu}.$$

(Αρχιμήδης Junior – 1998)

10.31 Έστω ν σταθερός θετικός ακέραιος και x, y θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε:

$$xy = \nu x + \nu y.$$

Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του x, ως συνάρτηση του ν.

(Αρχιμήδης Νέων – 1999)

10.32 Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = \sqrt{1 + \frac{8\cdot 1^2 - 1}{1^2 \cdot 3^2}} + \sqrt{1 + \frac{8\cdot 2^2 - 1}{3^2 \cdot 5^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{8\cdot 1003^2 - 1}{2005^2 \cdot 2007^2}}.$$

(Προκριματικός Νέων – 2007)

10.33 Έστω οι αριθμοί x, y, $z > 0$ και $\kappa > z$, ώστε:

$$\alpha = x + \kappa y + \kappa z, \quad \beta = \kappa x + y + \kappa z,$$
$$\gamma = \kappa x + \kappa y + z.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \geq \frac{3}{2\kappa+1}.$$

(Προκριματικός – 1998)

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΑΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Λύσεις των ασκήσεων

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

10.1 $A = 2002\cdot(-1+1)^2 - 2^{-6} + \frac{1}{64} = 0 - \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0$.

10.2 α) Είναι:

$$\frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cdot\frac{2x+18}{4} - 8\cdot\frac{7-3x}{8} = 8\cdot 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(2x+18) - (7-3x) = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x+36-7+3x = 8 \Leftrightarrow 7x = 8-29 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = -3.$$

β) Για $\beta = -\frac{1}{3}$ είναι:

$$A = \left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3} - $$
$$-9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{9} =$$
$$= \left(9 + \frac{1}{9}\right)(-1)^{-3} - 9\left(+\frac{1}{9}\right) - \frac{8}{9} =$$
$$= \frac{82}{9}\cdot(-1) - 1 - \frac{8}{9} = -\frac{82}{9} - 1 - \frac{8}{9} =$$
$$= -\frac{82+8}{9} - 1 = -\frac{90}{9} - 1 = -10 - 1 = -11.$$

10.3 α) Είναι:

- $A = 25 + \frac{1}{8} : \left(-\frac{1}{8}\right) + 1 = 26 + \frac{1}{8}(-8) = = 26 - 1 = 25$.
- $B = [25 - (-8) - 1] : \left(-\frac{1}{8} + \frac{35}{24}\right) = = (25+8-1) : \frac{35-3}{24} = 32\cdot\frac{24}{32} = 24$.

β) Έχουμε $A = 25$ και $B = 24$, οπότε:

- $\frac{A}{B} = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$.
- $\frac{25B}{23A} = \frac{25\cdot 24}{23\cdot 25} = \frac{24}{23} = 1 + \frac{1}{23}$.

Επειδή $23 < 24$, είναι $\frac{1}{23} > \frac{1}{24}$. Άρα:

$$\frac{A}{B} < \frac{25B}{23A}.$$

10.4 Είναι:

- $x + y = 3\cdot 4 = 12$
- $y - w = \left(\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{24} = = \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)^{24} = 1^{24} = 1$.
- $A = (7x+7y) + (3y-3w) - 87 = = 7(x+y) + 3(y-w) - 87 = = 7\cdot 12 + 3\cdot 1 - 87 = 84 + 3 - 87 = = 87 - 87 = 0$.

10.5
- Έστω ν–άρτιος. Προφανώς είναι $2\nu^2 < 2\nu^2 + 3$ και επειδή $(-2)^\nu = 2^\nu > 0$, είναι $A > B$.
- Έστω ν–περιττός. Τότε $(-2)^\nu = -2^\nu < 0$ και επειδή $\frac{1}{2\nu^2} > \frac{1}{2\nu^2+3}$ είναι:

$$\frac{-2^\nu}{2\nu^2} < \frac{-2^\nu}{2\nu^2+3} \Leftrightarrow A < B.$$

10.6 Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$8^7 - 9\cdot 8^6 + 9\cdot 8^5 - 9\cdot 8^4 + 9\cdot 8^3 - 9\cdot 8^2 +$$
$$+9\cdot 8 - 1 = 8^7 - (8+1)8^6 + (8+1)8^5 -$$
$$-(8+1)8^4 + (8+1)8^3 - (8+1)8^2 + (8+1)8 - 1 =$$
$$= 8^7 - 8^7 - 8^6 + 8^6 + 8^5 - 8^5 - 8^4 +$$

$$+8^4+8^3-8^3-8^2+8^2+8-1=$$
$$=8-1=7\,.$$

Έτσι:

- $\alpha=7^{2000}$ και $\alpha^2=\left(7^{2000}\right)^2=7^{4000}$.
- $\beta=1024^{200}\cdot625^{1000}=\left(2^{10}\right)^{200}\cdot\left(5^4\right)^{1000}=$

$$=2^{2000}\cdot5^{4000}=2^{2000}\cdot\left(5^2\right)^{2000}=$$
$$=2^{2000}\cdot25^{2000}=50^{2000}>49^{2000}=$$
$$=(7^2)^{2000}=7^{4000}=\alpha\,.$$

Άρα $\beta>\alpha^2$.

10.7 Επειδή:

$$10=2\cdot5 \text{ και } 27=25+2=5^2+2\,,$$

έχουμε:

$$A=(\alpha^2-10\alpha\beta+25\beta^2)+(2\beta^2-8\beta+8)=$$
$$=(\alpha-5\beta)^2+2(\beta-2)^2\geq0\,.$$

Είναι $A=0$, όταν:

- $\beta-2=0\Leftrightarrow\beta=2$.
- $\alpha-5\beta=0\Leftrightarrow\alpha=5\beta\Leftrightarrow\alpha=10$.

Άρα η ελάχιστη τιμή του A είναι 0.

Σχόλιο

Είναι απαραίτητο να εξετάσουμε αν υπάρχουν τιμές των α, β ώστε $A=0$.

10.8 Έστω $\alpha=333333$. Τότε:

$$A=\frac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2)+(\alpha-6)}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{(2\alpha^2-\alpha-3)(\alpha-2)+\alpha-6}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{2\alpha^3-4\alpha^2-\alpha^2+2\alpha-3\alpha+6+\alpha-6}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{2\alpha^3-5\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2(2\alpha-5)}{\alpha^2}=2\alpha-5$$

που είναι ακέραιος $(A=666661)$.

10.9 Έστω ότι ο 105 είναι άθροισμα μ διαδοχικών ακεραίων:

$$\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+\ldots+(\nu+\mu-1)=105\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\mu\nu+(1+2+3+\ldots+\mu-1)=105\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\mu\nu+\frac{(\mu-1)\mu}{2}=105\Leftrightarrow\mu\nu=105-\frac{(\mu-1)\mu}{2}\,.$$

Πρέπει:

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2}\leq105\Leftrightarrow\mu(\mu-1)\leq210\,.$$

Όμως $210=14\cdot15$, οπότε:

$$\mu\in\{2,3,4,\ldots,14\}\,.$$

Για τις τιμές αυτές παίρνουμε:

$$\nu=1,\ \nu=6,\ \nu=12,\ \nu=15,$$
$$\nu=19,\ \nu=34,\ \nu=52\,.$$

10.10 Από την υπόθεση έχουμε:

$$\alpha y=\beta x\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x}{y}=\lambda\Leftrightarrow(\alpha=\lambda\beta,\ x=\lambda y)\,.$$

Έτσι:

$$A=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=$$
$$=\frac{(\lambda y)^2}{(\lambda y)^2+y^2}+\frac{\beta^2}{(\lambda\beta)^2+\beta^2}=$$
$$=\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2y^2+y^2}+\frac{\beta^2}{\lambda^2\beta^2+\beta^2}=$$
$$=\frac{\lambda^2y^2}{y^2(\lambda^2+1)}+\frac{\beta^2}{\beta^2(\lambda^2+1)}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}+\frac{1}{\lambda^2+1}=$$
$$=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+1}=1\,.$$

10.11 Παρατηρούμε ότι κάθε τριάδα έχει τη μορφή:

$$A_\kappa=(4\lambda+1)^2-(4\lambda+2)^2-$$
$$-(4\lambda+3)^2+(4\lambda+4)^2=$$
$$=(16\lambda^2+8\lambda+1)-(16\lambda^2+16\lambda+4)-$$
$$-(16\lambda^2+24\lambda+9)+(16\lambda^2+32\lambda+16)=$$
$$=8\lambda+1-16\lambda-4-24\lambda-9+32\lambda+16=4\,,$$

με $\kappa=0,1,2,\ldots,249$ (διότι $4\lambda+1=997\Leftrightarrow\Leftrightarrow\lambda=249$). Άρα είναι:

$$S=A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{249}=$$
$$=\underbrace{4+4+4+\ldots4}_{250-\text{όροι}}=4\cdot250=1000\,.$$

10.12 Είναι:

$$A=(x^2+x+2)^2-x^3=$$
$$=x^4+x^2+4+2x^3+4x+4x^2-x^3=$$
$$=(x^2+4)+x^4+x^3+4x+4x^2=$$
$$=(x^2+4)+(x^3+4x)+(x^4+4x^2)=$$
$$=(x^2+4)+x(x^2+4)+x^2(x^2+4)=$$
$$=(x^2+4)(1+x+x^2)\,.$$

Άλλος τρόπος

$$A=(x^2+x+2)^2-1+1-x^3=$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x+3)+(1-x)(1+x+x^2)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x+3+1-x)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+4)\,.$$

10.13 Έστω ότι $1997=x^2-y^2$, με $x>y$. Τότε:

$$(x-y)(x+y)=1\cdot1997\,.$$

Είναι όμως $x-y<x+y$ και ο 1997 είναι πρώτος, οπότε:

$$\begin{cases}x-y=1\\x+y=1997\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1998\\x+y=1997\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=999\\y=998\end{cases}.$$

Άρα $1997=999^2-998^2$, δηλαδή αυτό συμβαίνει μόνο κατά έναν τρόπο.

10.14 Θα γράψουμε τα υπόρριζα ως τετράγωνα αθροίσματος ή διαφοράς:

- $28-10\sqrt{3}=25-10\sqrt{3}+3=$
  $=5^2-2\cdot 5\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(5-\sqrt{3}\right)^2$.
- $5-2\sqrt{6}=3+2-2\sqrt{3\cdot 2}=$
  $=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}\right)^2=$
  $=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.
- $18+8\sqrt{2}=16+8\sqrt{2}+2=$
  $=4^2+2\cdot 4\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(4+\sqrt{2}\right)^2$.

Επομένως είναι:

$$A=\frac{\left(5-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(4+\sqrt{2}\right)}{\kappa-2}=\frac{9}{\kappa-2}.$$

Πρέπει $\kappa\neq 2$ και επιπλέον ο $\kappa-2$ να διαιρεί τον αριθμό 9. Άρα:

$$\kappa-2=\pm 1 \text{ ή } \pm 3 \text{ ή } \pm 9,$$

οπότε $\kappa\in\{3, 1, 5, -1, 11, -7\}$

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

10.15 Έχουμε:

$$\frac{\pi B\Gamma^2}{8}=\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{\pi A\Gamma^2}{8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2.$$

Άρα το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο Α.

Σχόλιο

Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ημικυκλίου είναι:

$$E=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2=\frac{\pi\delta^2}{8},$$

όπου δ είναι η διάμετρος του κύκλου.

10.16 Έχουμε:

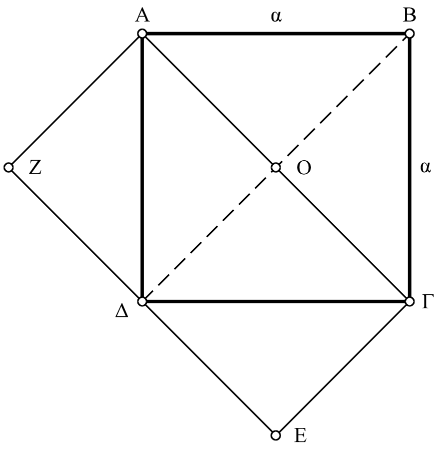
$$(x+2)^2-x^2=28\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4-x^2=28\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x=24\Leftrightarrow x=6.$$

Έτσι $AB=6$, $B\Gamma=10$, $A\Gamma=8$. Επειδή:

$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2\Leftrightarrow 10^2=6^2+8^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 100=36+64$$

που ισχύει, το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο.

10.17 Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Είναι τότε:



- $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$.
- $A\Gamma=\alpha\sqrt{2}$.
- $\Gamma E=AZ=\frac{B\Delta}{2}=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.
- $(A\Gamma EZ)=A\Gamma\cdot\Gamma E=\alpha\sqrt{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha^2\cdot 2}{2}==\alpha^2$.

Άρα:

$$\lambda=\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(AZE\Gamma)}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1,$$

δηλαδή $(AB\Gamma\Delta)=(A\Gamma EZ)$.

10.18 Από το σχήμα έχουμε:

	γ	δ
α	10	25
β	18	

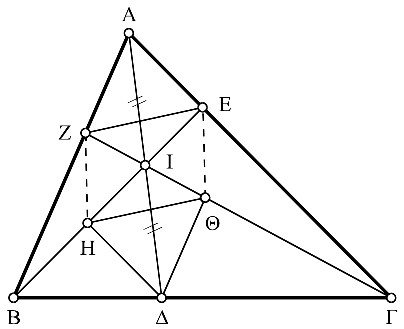
$$\alpha\gamma=10,\ \alpha\delta=25,\ \beta\gamma=18,$$

δηλαδή ζητάμε το $E=\beta\delta$.

Οι δύο τελευταίες ισότητες δίνουν:

$$\alpha\delta\cdot\beta\gamma=25\cdot 18\Leftrightarrow\alpha\gamma\cdot\beta\delta=450\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10\cdot\beta\delta=450\Leftrightarrow\beta\delta=45\Leftrightarrow E=45\text{ cm}^2.$$

10.19 Για να είναι το ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο, αρκεί τα τμήματα ΖΘ και ΕΗ να διχοτομούνται.



- Είναι ΔΘ // ΑΖ και το Ι μέσο του ΑΔ, οπότε $\overset{\Delta}{IAZ}=\overset{\Delta}{I\Delta\Theta}$. Άρα $IZ=I\Theta$.
- Είναι ΔΗ // ΑΕ, οπότε $\overset{\Delta}{IAE}=\overset{\Delta}{I\Delta H}$. Άρα $IH=IE$. Συνεπώς το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι

διαγώνιες διχοτομούνται.

Σχόλιο

Από το θεώρημα Θαλή έχουμε:

- *ΔΘ // ΑΖ, οπότε* $\frac{I\Theta}{IZ}=\frac{I\Delta}{IA}=1$.
- *ΔΗ // ΑΕ, οπότε* $\frac{IH}{IE}=\frac{I\Delta}{IA}=1$.

Άρα $I\Theta=IZ$ *και* $IH=IE$*, που σημαίνει ότι τα τμήματα ΖΘ, ΕΗ διχοτομούνται.*

10.20 Ας συγκρίνουμε πρώτα τους αριθμούς α και β. Είναι:

$$\alpha=26^{400}<27^{400}=\left(3^3\right)^{400}=3^{1200}=$$
$$=\left(3^4\right)^{300}=81^{300}<82^{300}.$$

Άρα $\alpha<\beta$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^2+\gamma^2=\beta^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(26^{400}\right)^2+\left(2^{300}\sqrt{41^{600}-2^{200}\cdot13^{800}}\right)^2=$$
$$=\left(82^{300}\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 26^{800}+2^{600}\left(41^{600}-2^{200}\cdot13^{800}\right)=$$
$$=(2\cdot41)^{600}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{800}\cdot13^{800}+2^{600}\cdot41^{600}-2^{800}\cdot13^{800}=$$
$$=2^{600}\cdot41^{600}\Leftrightarrow$$

(απλοποιούμε με το 2^{600})

$$\Leftrightarrow 2^{200}\cdot13^{800}+41^{600}-2^{200}\cdot13^{800}=41^{600}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{200}\cdot13^{800}=2^{200}\cdot13^{800}.$$

Αφού ισχύει η Πυθαγόρεια ιδιότητα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

10.21 Έχουμε:

$$\overline{abc}+\overline{acb}=\overline{199x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(100a+10b+c)+(100a+10c+b)=$$
$$=1990+x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200a+11(b+c)=1990+x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200a=1990+x-11(b+c)\qquad(1).$$

Είναι όμως $0\le b+c\le18$, οπότε:

$$0\le11(b+c)\le11\cdot18=198.$$

Άρα:

$$200a=1990+x-11(b+c)\ge$$
$$\ge1990+x-198=1792.$$

Από εδώ παίρνουμε ότι $a\ge9$, οπότε $a=9$. Από την (1) παίρνουμε τώρα ότι:

$$1800=1990+x-11(b+c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow11(b+c)=190+x.$$

Άρα ο 11 διαιρεί τον $190+x$, οπότε πρέπει:

$$190+x=198\Leftrightarrow x=8.$$

Έτσι, $b+c=18\Leftrightarrow b=c=9$.

Τελικά λοιπόν είναι $a=b=c=9$ και $x=8$.

10.22 Επειδή $(-1)^{2\nu}=1$ και $(-1)^{4\nu}=1$, είναι:

$$A=\nu\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{3\nu}+2\right].$$

- Αν ο ν είναι άρτιος, τότε $A=4\nu$ και αφού $A\,|\,24$, θα είναι $\nu=2$ $(A=8)$ ή $\nu=6$ $(A=24)$.
- Αν ο ν είναι περιττός, τότε $A=0$ και έτσι δεν έχουμε λύση, αφού το 0 δεν είναι διαιρέτης κανενός ακεραίου.

10.23 Επειδή ο α διαιρούμενος με τον 5 αφήνει υπόλοιπο 2, έχει τη μορφή:

$$\alpha=5\lambda+2.$$

- Αν ο λ ήταν άρτιος, τότε και ο α θα ήταν άρτιος, αφού με $\lambda=2\kappa$ παίρνουμε ότι $\alpha=5\lambda+2=5\cdot2\kappa+2=10\kappa+2=2\mu+2$ που είναι άρτιος.
- Ο λ είναι περιττός, δηλαδή $\lambda=2\mu+1$, οπότε:
$$\alpha=5\lambda+2=5(2\mu+1)+2=$$
$$=10\mu+5+2=10\mu+7.$$

Άρα ο α τελειώνει σε 7.

10.24 Έστω ότι ο $\overline{\alpha\beta}=10\alpha+\beta$ είναι τέτοιος αριθμός:

$$10\alpha+\beta=\alpha\cdot\beta-(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow11\alpha-\alpha\beta=-2\beta\Leftrightarrow\alpha(11-\beta)=-2\beta.$$

Επειδή $0\le\beta\le\alpha$, είναι $11-\beta>0$, οπότε $\alpha(11-\beta)>0$. Όμως $-2\beta<0$ και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

10.25 Όπως δείχνουν οι διπλανές διαιρέσεις, ανάμεσα στους αριθμούς 1, 2, 3, …, 1999 υπάρχουν:

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 5 \\ \cline{2-2} 49 & 399 \\ 49 & \\ 4 & \end{array}$$

- 395 πολλαπλάσια του 5.
- 285 πολλαπλάσια του 7
- 57 πολλαπλάσια και του 5 και του 7.

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 7 \\ \cline{2-2} 59 & 285 \\ 39 & \\ 4 & \end{array}$$

Άρα με έναν τουλάχιστον από τους 5, 7 διαιρούνται:

$$399+285-57=$$
$$=684-57=627$$

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 35 \\ \cline{2-2} 249 & 57 \\ 4 & \end{array}$$

αριθμοί. Έτσι, οι αριθμοί που δεν διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 7 έχουν πλήθος:

$$1999-627=1372.$$

10.26 • Παρατηρούμε ότι:

$$199=9\cdot22+1.$$

$$\begin{array}{r|l} 199 & 9 \\ \cline{2-2} 19 & 22 \\ 1 & \end{array}$$

Από την αρχή της

περιστεροφωλιάς, μία τουλάχιστον από τις 9 χώρες έστειλε τουλάχιστον $22+1=23$ παιδιά (9 φωλιές και 199 περιστέρια).

- Είναι επίσης $23=2\cdot 11+1$, οπότε πάλι με την αρχή της περιστεροφωλιάς προκύπτει ότι τουλάχιστον $11+1=12$ παιδιά είναι του ίδιου φύλλου (2 φωλιές και 23 περιστέρια).

Δ. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.27 Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{array}{r|l} 1998 & 115 \\ \hline 848 & 17 \\ 43 & \end{array}$$

$$\frac{1998}{115}=17+\frac{43}{115}=$$

$$=17+\frac{1}{\frac{115}{43}}=$$

$$\begin{array}{r|l} 115 & 43 \\ \hline 29 & 2 \end{array}$$

$$=17+\frac{1}{2+\frac{29}{43}}=$$

$$=17+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{43}{29}}}=$$

$$\begin{array}{r|l} 43 & 29 \\ \hline 14 & 1 \end{array}$$

$$=17+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{14}{29}}}=$$

$$=17+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{29}{14}}}}=17+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{14}}}} \qquad (1)$$

Επειδή η Ευκλείδεια διαίρεση για δύο αριθμούς είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι:

$$x=17,\quad y=2,\quad z=1,\quad t=2,\quad w=14.$$

10.28 Επειδή $3=\frac{x+y+z}{4}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{4}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{4}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{4}\right)\geq$$

$$\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Είναι όμως $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ για κάθε $\alpha,\ \beta>0$, οπότε:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=\sqrt{x}$$

και κυκλικά:

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4}\geq\sqrt{y},\quad \frac{z}{x}+\frac{y}{4}\geq\sqrt{z}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε την ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\left(\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y^2=4x,\ z^2=4y,\ x^2=4z).$$

Είναι λοιπόν:

$$x=\frac{y^2}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{4}\right)^2=\frac{1}{2^6}z^4=$$

$$=\frac{1}{2^6}\left(\frac{x^2}{4}\right)^4=\frac{1}{2^{14}}x^8.$$

Άρα $x^7=2^{14}\Leftrightarrow x=4$, οπότε τελικά:

$$x=y=z=4.$$

10.29 α) Είναι $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$, οπότε:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4}.$$

Άρα:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\leq$$

$$\leq\frac{\alpha+\beta}{4}+\frac{\beta+\gamma}{4}+\frac{\gamma+\alpha}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

β) Σύμφωνα με τις βασικές ανισότητες:

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}\quad\text{και}\quad x+y+z\geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$$

$(x,\ y,\ z>0)$ είναι:

$$\alpha(1+\beta)+\beta(1+\gamma)+\gamma(1+\alpha)=$$

$$=(\alpha+\alpha\beta)+(\beta+\beta\gamma)+(\gamma+\gamma\alpha)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{\alpha^2\beta}+2\sqrt{\beta^2\gamma}+2\sqrt{\gamma^2\alpha}=$$

$$=2\left(\sqrt{\alpha^2\beta}+\sqrt{\beta^2\gamma}+\sqrt{\gamma^2\alpha}\right)\geq$$

$$\geq 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2\beta}\cdot\sqrt{\beta^2\gamma}\cdot\sqrt{\gamma^2\alpha}}=$$

$$=6\cdot\sqrt[3]{\sqrt{(\alpha\beta\gamma)^3}}=6\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{\alpha\beta\gamma}\right)^3}=6\cdot\sqrt{\alpha\beta\gamma}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

10.30 Γνωρίζουμε ότι $x^2+y^2\geq 2xy$. Άρα:

- $1+3\alpha_1+\alpha_1^2=(\alpha_1^2+1^2)+3\alpha_1\geq 2\alpha_1+3\alpha_1=$
  $=5\alpha_1$.
- $1+3\alpha_2+\alpha_2^2=(\alpha_2^2+1^2)+3\alpha_2\geq 2\alpha_2+3\alpha_2=$
  $=5\alpha_2$.

Όμοια είναι:

- $\alpha_\nu^2+3\alpha_\nu+1\geq 5\alpha_\nu$.

Οι παραπάνω ανισότητες έχουν θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$$(1+3\alpha_1+\alpha_1^2)(1+3\alpha_2+\alpha_2^2)...(1+3\alpha_\nu+\alpha_\nu^2)\geq$$

$$\geq 5\alpha_1\cdot 5\alpha_2\ ...\ 5\alpha_\nu=5^\nu\alpha_1\alpha_2\ ...\ \alpha_\nu.$$

Άρα:

$$\frac{(1+3\alpha_1+\alpha_1^2)(1+3\alpha_2+\alpha_2^2)...(1+3\alpha_\nu+\alpha_\nu^2)}{\alpha_1\alpha_2\ ...\ \alpha_\nu}\geq$$

$$\geq\frac{5^\nu\cdot\alpha_1\alpha_2\ ...\ \alpha_\nu}{\alpha_1\alpha_2\ ...\ \alpha_\nu}=5^\nu>4^\nu=\left(2^2\right)^\nu=2^{2\nu}.$$

10.31 Έχουμε:

$$xy=\nu x+\nu y\Leftrightarrow xy-\nu x-\nu y+\nu^2=\nu^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y-\nu)-\nu(y-\nu)=\nu^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-\nu)(y-\nu)=\nu^2.$$

- Την ελάχιστη τιμή για το x έχουμε, όταν $x-\nu=1\Leftrightarrow x=\nu+1$.
- Τη μέγιστη τιμή για το x έχουμε, όταν $x-\nu=\nu^2\Leftrightarrow x=\nu^2+\nu$.

10.32 Το τυχαίο ριζικό έχει τη μορφή:

$$\sqrt{1+\frac{8\nu^2-1}{(2\nu-1)^2(2\nu+1)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(4\nu^2-1)^2+8\nu^2-1}{(4\nu^2-1)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{16\nu^4-8\nu^2+1+8\nu^2-1}{(4\nu^2-1)^2}}=\sqrt{\frac{16\nu^4}{(4\nu^2-1)^2}}=$$

$$=\frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}=\frac{(4\nu^2-1)+1}{4\nu^2-1}=1+\frac{1}{4\nu^2-1}=$$

$$=1+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\nu+1)-(2\nu-1)}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu+1}\right).$$

Έχουμε, για $\nu=1,\ 2,\ 3,\ ...,1003$ παίρνουμε:

$$\Sigma=\left(1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)+\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right)+...+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007}\right)\right)=$$

$$=1003+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2007}\right)=1003+\frac{1}{2}\cdot\frac{2006}{2007}=$$

$$=1003+\frac{1003}{2007}=\frac{1003\cdot2008}{2007}=\frac{2014024}{2007}.$$

10.33 Έχουμε ότι:

- $\alpha+\beta+\gamma=(x+\kappa y+\kappa z)+(\kappa x+y+\kappa z)+$ $+(\kappa x+\kappa y+z)=x(2\kappa+1)+(2\kappa+1)y+$ $+(2\kappa+1)z=(2\kappa+1)(x+y+z)$,

  οπότε $x+y+z=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2\kappa+1}$ (1)

- $\alpha=x+\kappa y+\kappa z=\kappa(x+y+z)-\kappa x+x=$ $=\dfrac{\kappa(\alpha+\beta+\gamma)}{2\kappa+1}-(\kappa-1)x$.

  Από αυτή προκύπτει ότι:

$$(\kappa-1)x=\frac{\kappa(\alpha+\beta+\gamma)}{2\kappa+1}-\alpha=$$

$$=\frac{\kappa\alpha+\kappa(\beta+\gamma)-2\kappa\alpha-\alpha}{2\kappa+1}=$$

$$=\frac{-(\kappa+1)\alpha+\kappa\beta+\kappa\gamma}{2\kappa+1}.$$

Άρα $x=\dfrac{-(\kappa+1)\alpha+\kappa\beta+\kappa\gamma}{(\kappa-1)(2\kappa+1)}$.

Κυκλικά παίρνουμε:

$$y=\frac{\kappa\alpha-(\kappa+1)\beta+\kappa\gamma}{(\kappa-1)(2\kappa+1)},$$

$$z=\frac{\kappa\alpha+\kappa\beta+(\kappa+1)\gamma}{(\kappa-1)(2\kappa+1)}.$$

Άρα:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\frac{-3(\kappa+1)}{(\kappa-1)(2\kappa+1)}+$$

$$+\frac{\kappa\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right]}{(\kappa-1)(2\kappa+1)}\geq$$

$$\geq\frac{-3(\kappa+1)}{(2\kappa+1)(\kappa-1)}+\frac{6\kappa}{(2\kappa+1)(\kappa-1)}=$$

$$=\frac{3\kappa-3}{(2\kappa+1)(\kappa-1)}=\frac{3(\kappa-1)}{(2\kappa+1)(\kappa-1)}=\frac{3}{2\kappa+1}$$

διότι γενικά $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq2$, όπου x, y είναι ομόσημοι αριθμοί.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ 1995 -2015

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εκφωνήσεις των ασκήσεων

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Να αναλυθεί σε γινόμενο η παράσταση $\alpha^7 - \alpha$. Αν το α είναι φυσικός αριθμός, η παράσταση αυτή είναι πάντα διαιρετή με το 42.

Θαλής 1990

2. Υπάρχουν άνθρωποι πάνω στη Γη που έχουν γεννηθεί την ίδια χρονολογία, ημερομηνία, ώρα και λεπτό; Η απάντηση να δικαιολογηθεί και να εξεταστεί αν ισχύει για τους κατοίκους της Ελλάδας (10.000.000).

Θαλής 1990

3. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα: $A = x^4 - x^2 + 16$, $B = x^4 - 7x^2 + 10$.

Θαλής 1990

4. Να υπολογιστούν οι αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0.$$

Θαλής 1995

5. Έστω $A = \sqrt{\sqrt{81}} + 3\sqrt{8} : \sqrt{2} + 8\sqrt{3} : \dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. Να υπολογιστεί η τιμή του $B = 3(-1)^A + 2(-1)^{A+1}$.

Θαλής 1996

6. Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει $\alpha y = \beta x$. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Θαλής 1997

7. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = \dfrac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$ είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

Θαλής 1998

8. Έστω $A = \dfrac{(-2)^{\nu}}{2\nu^2}$, $B = \dfrac{(-2)^{\nu}}{2\nu^2+3}$, όπου ν είναι θετικός ακέραιος. Να βρεθεί ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος.

Θαλής 1999

9. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (-5)^2 - (-2)^{-3} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{1000}$,

$B = [\,(-5)^2 - (-2)^3 - 1\,] : \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \dfrac{35}{24}\right]$.

Να βρείτε τους αριθμούς Α, Β και να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{A}{B}$ και $\dfrac{25B}{23A}$.

Θαλής 2000

10. Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = \left[(-1)^{2\nu} + (-1)^{2\nu+1}\right] \cdot \left(3^{12} + 2^{10}\right)$, $B = (-2)^{-3} : (-2)^{-1} + \dfrac{(-3)^{-2} - (-2)^{-4}}{(-4)^{-2}}$.

Θαλής 2001

11. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8.$$

Για ποιες τιμές των α, β λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α;

Θαλής 2001

12. Αν $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ και β = 3, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \alpha^3 - (1+\alpha)^{-2} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0 .$$

Θαλής 2002

13. Σε μια διοργάνωση σκακιού μέσω διαδικτύου συμμετείχαν 1119 αγόρια και κορίτσια. Το πρώτο κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια, το δεύτερο κορίτσι έπαιξε με 21 αγόρια, το τρίτο κορίτσι έπαιξε με 22 αγόρια κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο κορίτσι που έπαιξε με όλα τα αγόρια. Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα ήταν τα κορίτσια.

Θαλής 2002

14. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6-10x+2(4x-y-3)}{3(x-z)+3(y+z)} - 2(x+\frac{1}{3}) - 2y, \text{ αν } x + y = 2003.$$

Θαλής 2003

15. Οι ακέραιοι αριθμοί x και y είναι ανάλογοι προς τον αριθμητή και τον παρονομαστή, αντίστοιχα, του κλάσματος που προκύπτει από τη μετατροπή σε κλασματική μορφή του δεκαδικού αριθμού α=4,333.... Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \frac{6x-5y}{6x+5y} - \frac{21}{31}$.

Θαλής 2003

16. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^2 + x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}$, $B = \dfrac{\left[(-2)^3 + (-1)^3\right]}{9} + \dfrac{x}{2}$.

Αν είναι A = 6B , να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Θαλής 2004

17. Μία εταιρεία χρησιμοποίησε 20 εργάτες επί 6 μήνες, εργαζόμενους 8 ώρες το 24ωρο, για να τελειώσει το μισό ενός έργου. Επειδή το υπόλοιπο του έργου πρέπει να τελειώσει σε 2 μήνες ,η εταιρεία αποφάσισε να προσλάβει και άλλους εργάτες, της ιδίας απόδοσης ανά ώρα, οι οποίοι θα δουλεύουν δεύτερη βάρδια επί 10 ώρες το 24ωρο, ενώ οι υπάρχοντες εργάτες θα δουλεύουν όπως και πριν. Πόσους επιπλέον εργάτες πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ,ώστε να τελειώσει το έργο ακριβώς σε δύο μήνες;

Θαλής 2004

18. Έστω α = β + 2005. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = -3\,[2(\alpha + 2\beta) - 2(3\beta - 2\alpha) - 4\beta] + 19(\alpha - \beta).$$

Θαλής 2005

19. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και αβγ=10, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 (\alpha + \frac{\gamma}{2})^2 (\alpha + 2\beta)^2.$$

Θαλής 2006

20. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2}\alpha\beta^{-1} + \frac{10}{3}\alpha^{-1}\beta = 3.$$

Θαλής 2006

21. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $A = -[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2] : (-2)^4$,

$$B = -(x - 3) - 3(y - 4) - [x(y - 2) - y(x + 3)].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: A > B;

Θαλής 2007

22. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1-(-1)^{2009}]^0}, \quad B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}.$$

Αν είναι A = B , να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Θαλής 2008

23. Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της

παράστασης: $A = 4 \cdot (-1)^{\nu} + 2 \cdot \frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3\nu}}{5}$

Θαλής 2009

24. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 7x + 10y - 3w - 87.$$

Θαλής 2010

25. Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}\right)^{-2}.$$

Θαλής 2011

26. Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x .$$

Θαλής 2011

27. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση

$y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ)

με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $M(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε)

και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Θαλής 2011

28. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \dfrac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1}}$, αν είναι

$$x = 2^{-10} \ , \ y = 4^{-8} \ , \ z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Θαλής 2012

29. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5α + 2 < α\,(x - 3) + 2(α - 1)\,.$$

Θαλής 2012

30. Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot \left(3α - 4,6\right) - 2 \cdot \left(α - 0,2\right).$$

Θαλής 2013

31. Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις $-4 < 1 - 2β < 5$, να λύσετε ως προς άγνωστο τον x την ανίσωση: $2(x+1) - \dfrac{3}{2}(x+1) < \dfrac{x}{β}$.

Θαλής 2013

32. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{x^4 - 1}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-3\right)} - \dfrac{6}{13}$, αν $x = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Θαλής 2014

34. Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Θαλής 2014

35. Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια $Δ_1$ και $Δ_2$ με βάρη $β(Δ_1)$ και $β(Δ_2)$ αντίστοιχα και λόγο βαρών $\dfrac{β(Δ_1)}{β(Δ_2)} = \dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια $Δ_1$ και $Δ_2$.

Θαλής 2014

36. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\alpha-1}{\alpha-3} + \frac{1}{33} + \alpha^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} \text{ , αν } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}.$$

Θαλής 2015

37. Αν οι x, y, z,w,m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x+y) \cdot z^m - w$.

Θαλής 2015

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

38. Να γραφεί κύκλος που περνά από τα μέσα των τριών πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τόξο του κύκλου, το εξωτερικό της υποτείνουσας, ισούται με τη διαφορά των εξωτερικών τόξων του κύκλου στις 2 κάθετες πλευρές του τριγώνου.

Θαλής 1990

39. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 2. Για τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ ισχύει: $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.
Να αποδειχτεί ότι $\beta \geq 2$. Πότε ισχύει το ίσον;

Θαλής 1995

40. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και από την κορυφή Α παίρνουμε μια τυχαία ευθεία που τέμνει την ΓΒ στο Ε. Από το Δ φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς την ΑΕ και επ' αυτής παίρνουμε ένα σημείο Ζ.
Να δειχτεί ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές ΑΕ και ΑΖ έχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Θαλής 1996

41. Έστω ΑΒΓΔΕΖΗΘ κύβος με ακμή α. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας ΓΑΖΘ.

Θαλής 1997

42. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\alpha = 26^{400}$, $\beta = 82^{300}$ και γ μικρότερος από το μεγαλύτερο των α, β.
Να προσδιοριστεί το γ, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο.

Θαλής 1997

43. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαιρείται σε 4 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα τέσσερα ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18, 25 cm^2 αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδό του τέταρτου ορθογωνίου.

Θαλής 1998

44. Στο σχήμα έχουμε:

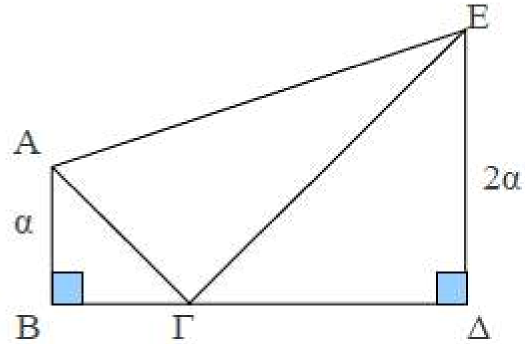
α) ΑΒ//ΕΔ

β) $\hat{B} = 90^o$

γ) $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta = 45^o$

δ) ΑΒ = α, ΔΕ = 2α.

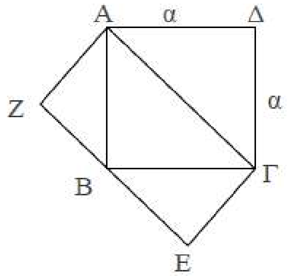
Να υπολογιστεί το μήκος του ΑΕ.



Θαλής 1999

45. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΑΓΕΖ ορθογώνιο.

Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΓΕΖ)}$.



Θαλής 1999

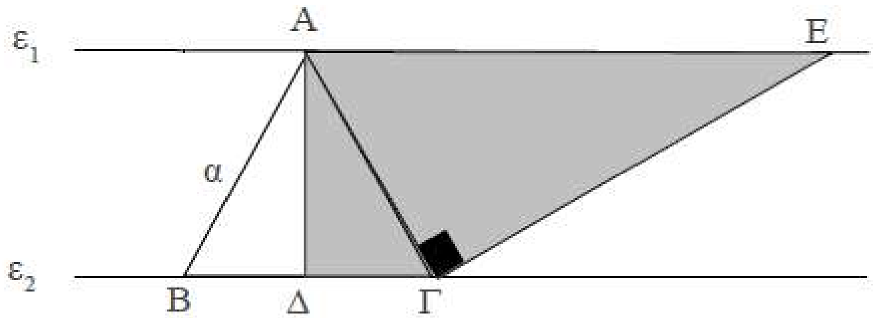
46. Στο σχήμα δίνονται

- $(ε_1)$ // $(ε_2)$
- το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α
- ΓΕ ⊥ ΑΓ και ΑΔ ⊥ ΒΓ
- ΑΕ = 2α.

Να βρείτε:

α) Το λόγο $\frac{ΓΕ}{ΑΔ}$.

β) Το εμβαδό του τραπεζίου ΑΔΓΕ.



Θαλής 2000

47. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ = λ, ΑΓ = λ+2, ΒΓ = 10 και ισχύει: $(λ + 2)^2 – λ^2 = 28$.

Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^o$.

Θαλής 2001

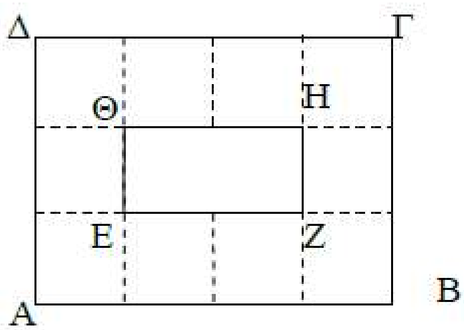
48. Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΓΔΕ, ΑΔΕ και ΑΓΕ.

Θαλής 2001

49. Στο σχήμα υπάρχουν 10 ίσα τετράγωνα μεταξύ των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.
Να υπολογίσετε την πλευρά των τετραγώνων, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται αριθμητικά με το άθροισμα των
περιμέτρων των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.

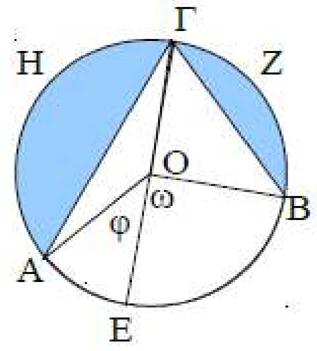


Θαλής 2002

50. Στο σχήμα η ΓΕ είναι διάμετρος του κύκλου (O, R), η γωνία $\Gamma\hat{O}B = \omega$ είναι τριπλάσια της γωνίας $A\hat{O}E = \varphi$ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (O,AEB) ισούται με $\frac{1}{3}\pi R^2$.

α) Να βρείτε τις γωνίες ω, φ.

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{E_{κ.τ.}(BZ\Gamma)}{E_{κ.τ.}(AH\Gamma)}$ των εμβαδών των κυκλικών τομέων ΒΖΓ και ΑΗΓ.

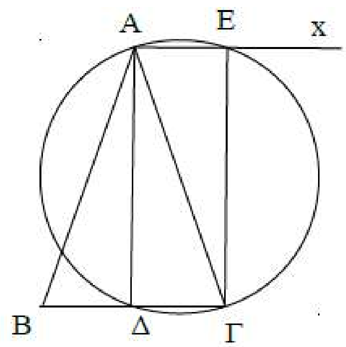


Θαλής 2002

51. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Με διάμετρο την πλευρά ΑΓ γράφουμε κύκλο που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ.
Φέρνουμε ακόμα την Αx ⊥ ΑΔ που τέμνει τον κύκλο στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να συγκρίνετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ προς το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΔΓΕ.

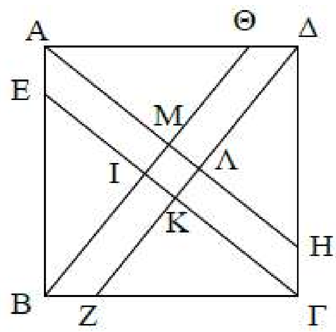


Θαλής 2003

52. Στο σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ΑΒ = 4α και ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = α. Το τετράπλευρο ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε:

1) Την ΑΗ ως συνάρτηση του α.

2) Το εμβαδό του τετραγώνου ΙΚΛΜ ως συνάρτηση του α.

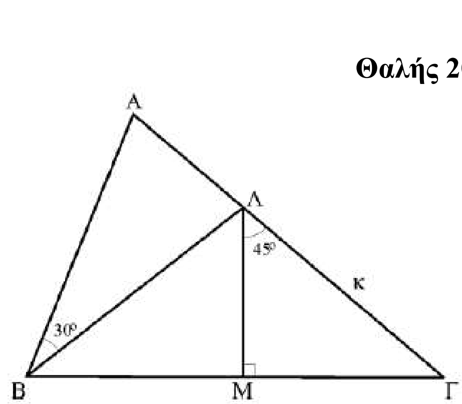


Θαλής 2003

53. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ είναι μέσον της πλευράς ΒΓ και η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει τη ΑΓ στο Λ. Επίσης δίνονται:

$M\hat{\Lambda}\Gamma = 45^o$, $A\hat{B}\Lambda = 30^o$, ΛΓ = κ. Να βρείτε :

(α) τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

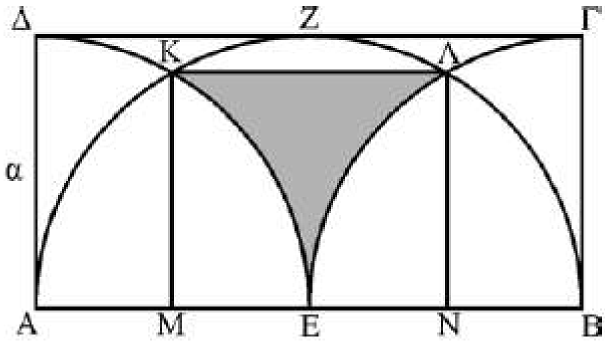


(β) τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ συναρτήσει του κ.

(γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Θαλής 2004

54. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΑΔ = 2α, τα μέσα Ε και Ζ των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και οι τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Ε και Β και ακτίνας α , που τέμνονται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ στα σημεία Κ και Λ.



Να βρείτε :

(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΕ

(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΝΜ,

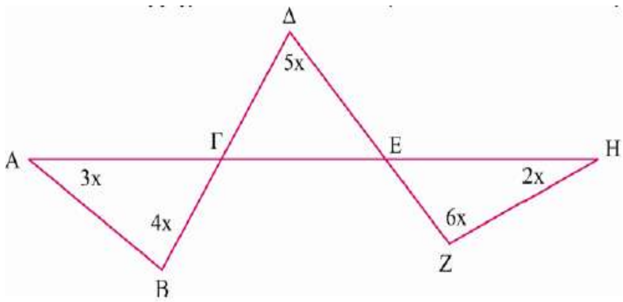
όπου Μ είναι το μέσον της ΑΕ και Ν το μέσον της ΕΒ

(γ) το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου τριγώνου ΕΚΛ.

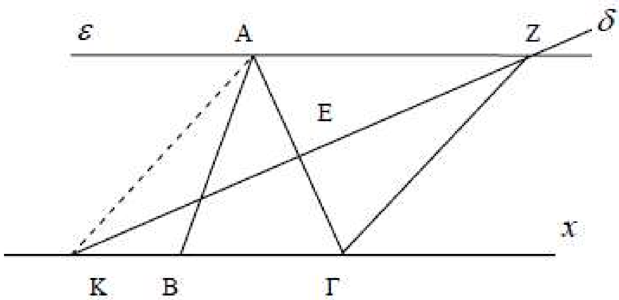
Θαλής 2004

55. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες και τις γωνίες Α , Β , Γ, Δ, Ε, Ζ , Η.

Θαλής 2006



56. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 40^o$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

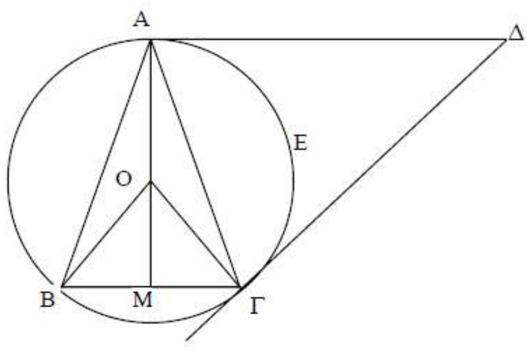


(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.

Θαλής 2007

57.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

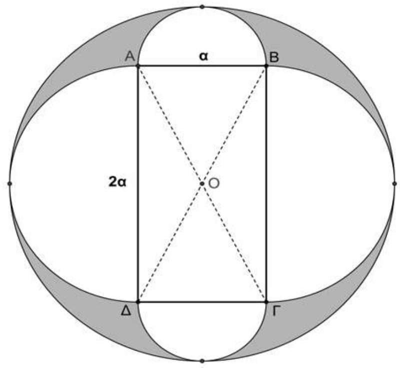
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

Θαλής 2007

58. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ =α , ΑΔ = 2α και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Θαλής 2008



59.Δίνονται δυο ευθείες (ε_1) , (ε_2) οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη προς την ευθεία (η) : $y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Οxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών (ε_1) , (ε_2) και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία (ε_2) τέμνει τον άξονα x΄x .

Θαλής 2009

60. Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1 , r_2 , r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1 , r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2 , r_3 . Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3\, r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Θαλής 2009

61. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^o$. Στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}$ φέρουμε ημιευθείες Αx και Αy κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα , που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B = 120^o$, $A\hat{E}\Delta = 60^o$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

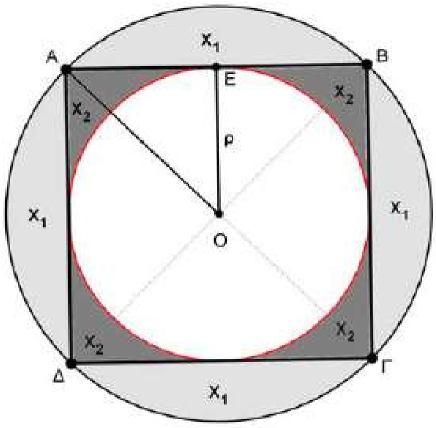
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Θαλής 2010

62. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου C(O,OA) που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου C (O, ρ) και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου Δ(Ο, ρ, ΟΑ) που ορίζεται από τους κύκλους C (O, ρ) και C(O,OA).

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

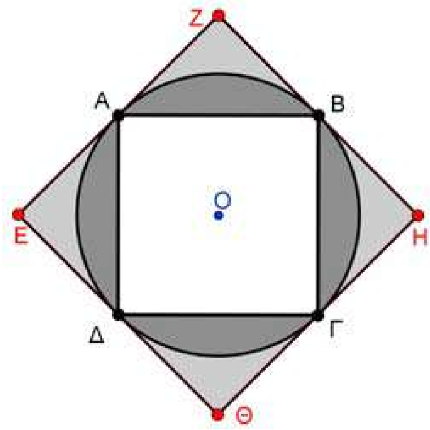
γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου C (O, x) που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο Δ(Ο, ρ, ΟΑ) σε δύο κυκλικούς δακτυλίους ίσου εμβαδού.

Θαλής 2010

63. Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O,\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O,\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(O,\rho)$.

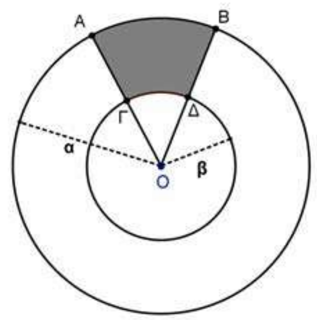


(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. *(Θεωρείστε ότι π=3,1415).*

Θαλής 2011

64. Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (Ο,α) και (Ο,β), 0 < β <α , να βρείτε τη γωνία $\omega = \hat{AOB}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2 \cdot \eta\mu^2\omega - \frac{3}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Θαλής 2012

65. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΔ = α cm και ΑΒ < ΑΔ . Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι ΕΓ = 2 · ΑΕ, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Θαλής 2012

66. Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα x΄x και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα ψ΄ψ και στην ευθεία (ε).

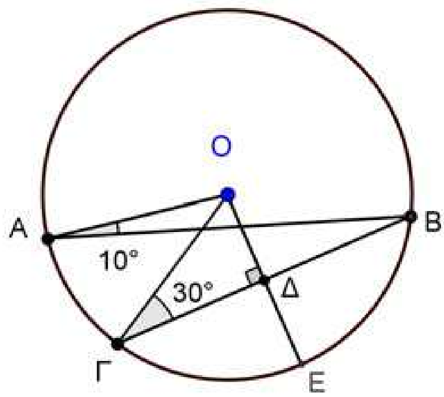
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Θαλής 2013

67. Σε κύκλο $c(O,R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α , Γ και Β τέτοια , ώστε οι γωνίες $\hat{OAB} = 10^0$ και $\hat{O\Gamma B} = 30^0$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Ε.



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας ΑΒΓ και το μέτρο του τόξου ΑΓ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Θαλής 2013

68. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΔ. Αν Ε(ΑΒΔ) και Ε(ΑΒΔΖ) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και του τετραπλεύρου ΑΒΔΖ αντίστοιχα , να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

Θαλής 2014

69. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \omega$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 36^{\mathrm{o}}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega = 36^{\mathrm{o}}$,

(β) ΑΜ = ΓΖ ,

(γ) ΒΛ = ΛΖ.

Θαλής 2015

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

70. Να βρείτε το μικρότερο θετικό πολλαπλάσιο του 2005, το οποίο διαιρούμενο δια του 2001 αφήνει υπόλοιπο 12.

Θαλής 2005

71. Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ρητός αριθμός του οποίου το 33% καθώς και το 15% είναι ακέραιος.

Θαλής 2005

72. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου Α = { 1 , 11 , 111 , 1111 , … , 111 …1 } όπου ο τελευταίος αριθμός έχει 1995 ψηφία και οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 7.

Θαλής 1995

73. Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει ακέραιος ν που να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu(\nu-1)+(\nu-1)(\nu+1)+\nu(\nu+1)+3\nu^5=3.000.000.$$

Θαλής 1996

74. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γραφεί ο αριθμός 105 ως άθροισμα τουλάχιστον δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων;

Θαλής 1998

75. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1999 δε διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 7.

Θαλής 1999

76. Ο θετικός ακέραιος α είναι άρτιος και όταν διαιρείται με το 7 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν είναι μεταξύ των αριθμών 512 και 521.

Θαλής 2000

77. Να βρείτε το μικρότερο θετικό πολλαπλάσιο του 2005, το οποίο διαιρούμενο δια του 2001 αφήνει υπόλοιπο 12.

Θαλής 2005

78. Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ρητός αριθμός του οποίου το 33% καθώς και το 15% είναι ακέραιος.

Θαλής 2005

79. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός 27p + 1 είναι σύνθετος.

Θαλής 2006

80.(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο Σ = {0, 1, 4, 5, 6, 9}.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής A = aaabb , όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Θαλής 2007

81. Το σημείο A(− λ + 2, 4λ − 1) , όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy, αντίστοιχα.

Θαλής 2008

82. Αν ισχύει $\dfrac{45^{\nu} \cdot 2^{2\nu}}{6^{\nu}} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^{\nu} - (-1)^{\nu+1} + 4 \cdot (-1)^{\nu+2}$$

Θαλής 2008

83. Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Θαλής 2009

84. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,

(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,

(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,

(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

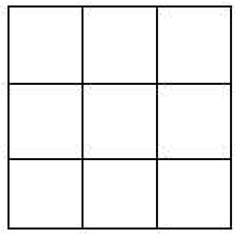
Θαλής 2010

85. Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού αυτού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \dfrac{28}{\nu}$ και $\beta = \dfrac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Θαλής 2015

Δ. Προβλήματα- Διακριτά μαθηματικά

86. Δύο μαθητές Α, Β χρησιμοποιούν ένα πίνακα 3x3, όπως στο σχήμα, για να παίξουν "τρίλιζα".



Καθένας γράφει σ' ένα τετραγωνάκι της επιλογής του ένα σταυρό ή έναν κύκλο.
(Και οι δύο έχουν δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και το σταυρό και τον κύκλο, όποιο θέλουν σε κάθε τους κίνηση ανεξάρτητα με τι χρησιμοποίησαν νωρίτερα.)
Θα νικήσει αυτός, ο οποίος πρώτος γράφει ένα σύμβολο που είναι το ίδιο στα τρία τετράγωνα μιας γραμμής ή μιας στήλης ή μιας διαγωνίου του πίνακα.
Για ποιον παίκτη υπάρχει σίγουρη στρατηγική να κερδίσει; Γιατί;

Θαλής 1995

87. Η Άννα έχει 48 σπίρτα και τα χώρισε σε 3 σωρούς. Μετά πήρε τόσα σπίρτα από τον πρώτο σωρό όσα υπήρχαν στον δεύτερο και τα έβαλε στον δεύτερο. Κατόπιν πήρε τόσα σπίρτα από τον δεύτερο σωρό όσα υπήρχαν στον τρίτο και τα έβαλε στον τρίτο. Τέλος πήρε τόσα σπίρτα από τον τρίτο σωρό όσα υπήρχαν στον πρώτο και τα έβαλε στον πρώτο. Τότε παρατήρησε ότι οι τρεις σωροί είχαν ίσο αριθμό σπίρτων.
Πόσα σπίρτα είχε αρχικά ο κάθε σωρός;

Θαλής 1997

88. Διαθέτουμε 1 κόκκινο, 2 μπλε και 3 πράσινους βώλους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε 6 τρύπες που βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και ισαπέχουν;

Θαλής 1998

89. Στο τέλος του Β' Παγκόσμιου Πολέμου σε ένα στρατόπεδο βρίσκονται 1997 αιχμάλωτοι: 998 Ιταλοί και 999 Γερμανοί. Ο διοικητής του στρατοπέδου αποφασίζει να απελευθερώσει σταδιακά τους κρατούμενους, εκτός από έναν τον οποίο θα κρατήσει για λίγο καιρό ακόμα στο στρατόπεδο. Η διαδικασία απόλυσης των κρατουμένων είναι η εξής:
Επιλέγονται τυχαία τρεις κρατούμενοι και φεύγουν οι δύο. Αν και οι τρεις είναι της ίδιας εθνικότητας, ο ένας από αυτούς επιστρέφει, ενώ αν είναι διαφορετικής εθνικότητας επιστρέφει αυτός που έχει διαφορετική εθνικότητα από τους άλλους δύο. Ποιας εθνικότητας θα είναι ο "άτυχος" κρατούμενος;

Θαλής 1997

90. Σε μια Βαλκανική συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες.
Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

Θαλής 2000

91. Είναι δυνατόν να υπάρχουν στο εσωτερικό ενός κυρτού τετραπλεύρου δύο διαφορετικά σημεία από το καθένα από τα οποία όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου να φαίνονται από ίσες γωνίες; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Θαλής 2005

Βιβλιογραφία :

Μπάμπης Στεργίου : Ολυμπιάδες Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου , Σαββάλας
Μπάμπης Στεργίου – Σιλουανός Μπραζιτίκος : Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Ι , Σαββάλας
Μπάμπης Στεργίου : Γεωμετρία για Διαγωνισμούς 1, Σαββάλας.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τον εκλεκτό συνάδελφο και φίλο Χρήστο Τσιφάκη για την βοήθειά του στη σύνταξη αυτού του αρχείου.