Τότε

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\cdot(\varphi^{-1})'.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $I=\varphi([\alpha,\beta])$ είναι ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, και ότι η φ είναι γνήσια μονότονη στο $[\alpha,\beta]$. Θέτουμε $\psi\colon I\to[\alpha,\beta]$ με $\psi=\varphi^{-1}$. Από το θεώρημα 17.9 η ψ είναι διαφορίσιμη και η ψ' είναι συνεχής στο I. Παρατηρούμε από το θεώρημα 20.23 για την $f\cdot\psi'$ στην θέση της f, ότι

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\cdot\psi' = \int_\alpha^\beta \overset{[(f\cdot\psi')\circ\varphi]\cdot\varphi'}{(f\cdot\psi')\circ\varphi\cdot\varphi'} = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot(\psi'\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,(\psi\circ\varphi)' = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi,$$

εφ' όσον $\psi\circ\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση, και άρα $(\psi\circ\varphi)'=\mathbb{1}$.

20.26. Παρατήρηση. Από το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης 20.23 προκύπτει ότι για τον υπολογισμό του αορίστου ολοκληρώματος $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$ θέτουμε $u=\varphi(x)$ οπότε

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx=\int f(u)du. \tag{1}$$

Έτσι για παράδειγμα:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx=\int\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)'dx \quad (\text{με } u=\varphi(x)=1+x^2)$$
$$=\int\sqrt{u}du=\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}.$$

Σε πολλές περιπτώσεις όμως χρησιμοποιούμε τον τύπο (1) κατά αντίστροφη φορά, αρχίζοντας από το δεύτερο μέλος. Εδώ όμως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί.

Αρχίζοντας με το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ και υποθέτοντας ότι $u=\varphi(x)$ έχουμε να εργαστούμε με το ολοκλήρωμα $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$ που στο τελευταίο βήμα πρέπει να αντικαταστήσουμε την μεταβλητή x με u. Για να γίνει αυτό πρέπει η συνάρτηση $u=\varphi(x)$ να έχει αντίστροφη, έστω την $x=\psi(u)$. Προς τούτοις υποθέτουμε ότι η ψ είναι γνήσια μονότονη, διαφορίσιμη συνάρτηση με $\psi'(u)\neq 0$ για κάθε u στο διάστημα ορισμού της f. Τότε η φ ορίζεται, είναι διαφορίσιμη με $\varphi'(x)=\dfrac{1}{\psi'(u)}$, και άρα ο βασικός τύπος αντικατάστασης είναι

$$\int f(u)du=\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx \quad (\text{με } x=\psi(u)).$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int\sqrt[3]{(2u+1)^2}du$, θέτουμε $x=\psi(u)=2u+1$. Τότε $u=\varphi(\chi)=\psi^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$ και $\varphi'(x)=1/2$.