Πράγματι, $\int_\alpha^\beta \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int_\alpha^\beta x(1+x)^{-3}dx = \int_\alpha^\beta x\left(\frac{(1+x)^{-2}}{-2}\right)' dx$ (και με ολοκλήρωση κατά μέρη) $= \left[\frac{-x(1+x)^{-2}}{2}\right]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (1+x)^{-2}dx =$

$= \frac{-\beta(1+\beta)^{-2}}{2} + \frac{\alpha(1+\alpha)^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{1}{(1+x)^2}dx$. Είναι όμως

$\int \frac{1}{(1+x)^2}dx = \int (1+x)^{-2}dx = \frac{(1+x)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{1+x}$. Τότε

$\int_\alpha^\beta \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha}$ και άρα $\int_\alpha^\beta \frac{x}{(1+x)^3}dx =$

$$= -\frac{\beta}{2(1+\beta)^2} - \frac{1}{2(1+\beta)} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)^2} + \frac{1}{2(1+\alpha)}.$$

20.23. Θεώρημα *(πρώτο θεώρημα αντικατάστασης).* Έστω $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, ώστε η φ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, θέτουμε $I = \varphi([\alpha,\beta])$ και έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\ \varphi'$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $I = \varphi([\alpha,\beta])$ είναι ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Θέτουμε $F: I \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{x} f$. (Παρατηρούμε εδώ ότι δεν γνωρίζουμε αν ισχύει η ανισότητα $\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta)$ ή η ανισότητα $\varphi(\beta) \leqslant \varphi(\alpha)$). Από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, εφ' όσον η f είναι συνεχής, έπεται άμεσα ότι $F' = f$. Τότε

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\ \varphi' = \int_\alpha^\beta (F'\circ\varphi)\ \varphi' = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)' = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Επίσης

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F' = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

χρησιμοποιώντας το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Η απόδειξη έπεται από την σύγκριση των δύο ισοτήτων.

20.24. Παρατήρηση. Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα αντικατάστασης με f = σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$.

20.25. Θεώρημα *(δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης).* Έστω $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, ώστε η φ' είναι συνεχής συνάρτηση με $\varphi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, θέτουμε $I = \varphi([\alpha,\beta])$, και έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.