Μπάμπης Στεργίου

Μαθηματική Ομάδα

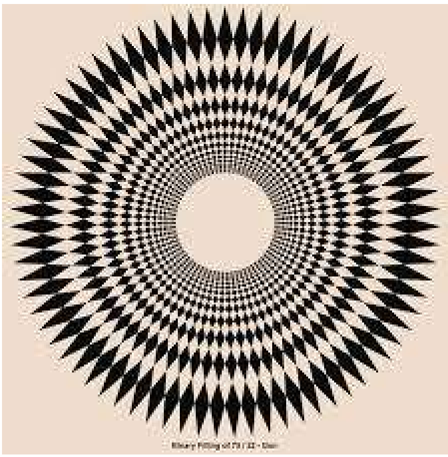
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

ΘΑΛΗΣ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Προσωρινό αρχείο

16/10/2016



Βιβλίο του Μαθητή

♠♠♠♠♠♠

2016

Αντί προλόγου

Φίλε μαθητή !

Πρώτα από όλα σε συγχαίρουμε για την αγάπη σου προς τα μαθηματικά και για την απόφασή σου να συμμετάσχεις στο διαγωνισμό ΘΑΛΗΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Οι σημειώσεις που κρατάς δεν είναι τίποτα παραπάνω από έναν πρόχειρο οδηγό, που θα σου επιτρέψει σε πολύ σύντομο διάστημα να κάνεις μια εκτίμηση για το πνεύμα και το επίπεδο των θεμάτων. Πρέπει όμως να σου πούμε από την αρχή ότι η συμμετοχή με αξιώσεις σε έναν διαγωνισμό μαθηματικών απαιτεί συστηματική και πολύμηνη προετοιμασία. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μερικών εβδομάδων δεν μπορεί να γίνει τίποτα περισσότερο από μια πρώτη επαφή με το πνεύμα του διαγωνισμού και μια στοιχειώδη υπενθύμιση των βασικών ασκήσεων που πρέπει να κατέχει κάποιος, ώστε να περάσει ευχάριστα και δημιουργικά τις τρεις ώρες του διαγωνισμού. Για τον λόγο αυτό κανένας μαθητής δεν πρέπει να νοιώσει απογοήτευση, αν τα θέματα του φανούν δύσκολα. Θα λέγαμε μάλιστα ότι αυτό πρέπει να είναι μια μοναδική ευκαιρία, ώστε ο μαθητής να ασχοληθεί πιο σοβαρά με τα μαθηματικά και να επιδίδεται στη λύση πιο σύνθετων ασκήσεων σε όλη τη διάρκεια της χρονιάς που θα ακολουθήσει. Μια πιο οργανωμένη ωστόσο και άρτια σχεδιασμένη συμμετοχή , μπορεί να στηριχθεί στη συνεχή μεθοδική καθημερινή ενασχόληση με το αντικείμενο, ήπιας μορφής αλλά και στη μελέτη ειδικών βιβλίων που είναι γραμμένα για το σκοπό αυτό και που αναφέρονται προς στο τέλος του τρίτου μέρους των σημειώσεων αυτών.

Οι παρούσες σημειώσεις μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικές, όταν έχουν την καθοδήγηση του μαθηματικού σου , που θα σου υπενθυμίσει γρήγορα τη βασική θεωρία κάθε κεφαλαίου και θα σου επιλέξει κατάλληλα παραδείγματα από τα πολλά που περιέχονται εδώ. Όπως και να έχουν όμως τα πράγματα, η επιτυχία είναι αποκλειστικά δική σου υπόθεση. Ήδη η επιλογή σου να πάρεις μέρος στο διαγωνισμό είναι το πρώτο σημαντικό βήμα , οπότε από κάθε άποψη μπορείς να νοιώθεις ικανοποιημένος.

Σου ευχόμαστε ολόψυχα καλή επιτυχία και καλή συνέχεια μέχρι τον Αρχιμήδη και τη Βαλκανιάδα Νέων !

♥ ■ ▲ ♥ ■ ▲ ♥ ■ ▲ ♥ ■

*****Αφιερώνεται στους συναδέλφους μαθηματικούς και τους μαθητές τους που συμμετέχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς !!!**

Μπάμπης

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ
ΕΜΕ
Β΄ Γυμνασίου

Κατανομή μαθημάτων ταχύρυθμης προετοιμασίας για ΘΑΛΗ

Α. Σχεδιασμός των μαθημάτων

*** *Τα μαθήματα έχουν διάρκεια 100 λεπτών, χωρίς διακοπή .Τα παλιά θέματα ΘΑΛΗ θα γίνονται εμβόλιμα στην παρουσίαση της κατάλληλης για τη λύση τους θεωρίας .*

Μάθημα 1^{ο}

- Οι αριθμοί – Πράξεις με φυσικούς – Πράξεις με κλάσματα – Πράξεις με δεκαδικούς – Απλοποίηση κλασμάτων - Σύγκριση κλασμάτων – Αριθμητικές παραστάσεις και προτεραιότητα των πράξεων .
- Δυνάμεις και ιδιότητες
- Θέματα ΘΑΛΗ :

Μάθημα 2^{ο}

- Προβλήματα τεσσάρων πράξεων – Προβλήματα με ποσοστά - Προβλήματα με ανάλογα ποσά – Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων .
- Θέματα ΘΑΛΗ :

Μάθημα 3^{ο}

- Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης – Άρτιοι και περιττοί αριθμοί – Πράξεις με άρτιους και περιττούς - Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα – ΕΚΠ και ΜΚΔ – Πρώτοι αριθμοί και σχετικά πρώτοι αριθμοί – Κριτήρια διαιρετότητας με 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , 25 και αριθμών που είναι γινόμενο πρώτων μεταξύ τους αριθμών.

♦ Θέματα ΘΑΛΗ :

Μάθημα 4ο

♦ Βασικές πράξεις με τμήματα και γωνίες – Η ορθή η οξεία και η αμβλεία γωνία – Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες Παράλληλες και τέμνουσες - Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες της μεσοκαθέτου – Ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου -Συμμετρία στα βασικά σχήματα.

♦ Θέματα ΘΑΛΗ :

Μάθημα 5ο

♦ Τρίγωνα και ιδιότητες (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) - Παραλληλόγραμμα και ιδιότητες – Ορθογώνιο και ιδιότητες – Ρόμβος - Τετράγωνο

♦ Θέματα ΘΑΛΗ :

Μάθημα 6ο

♦ Περίμετρος και εμβαδά σχημάτων (τρίγωνο- ορθογώνιο – παραλληλόγραμμο-τραπέζιο-κύκλος)

♦ Θέματα ΘΑΛΗ :

Β. Λυμένα παραδείγματα

1. Ιδιότητες των δυνάμεων και διάταξη !

Δίνονται οι αριθμοί: $A = 2^{41}, B = 8^{13}, \Gamma = 4^{21}$ και $\Delta = 32^{8}$.

(α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.

(β) Να εκφράσετε το άθροισμα $A + B + \Gamma$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΘΑΛΗΣ 2002

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων παίρνουμε :

$$A = 2^{41},\ B = 8^{13} = (2^3)^{13} = 2^{39},\ \Gamma = 4^{21} = (2^2)^{21} = 2^{42},\ \Delta = 32^8 = (2^5)^8 = 2^{40}$$

Επομένως :

$$B < \Delta < A < \Gamma$$

(β) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στο πρώτο ερώτημα είναι :

$$A + B + \Gamma + \Delta = 2^{41} + 2^{39} + 2^{42} + 2^{40} = 2^{39}(2^2 + 1 + 2^3 + 2) = 2^{39}.15 = 2^{39}.3.5$$

$$A + B + \Gamma + \Delta = 2^{41} + 2^{39} + 2^{42} + 2^{40} = 2^{39}(2^2 + 1 + 2^3 + 2) = 2^{39}.15 = 2^{39}.3.5$$

2. Προτεραιότητα των πράξεων !

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = 2\cdot 50 - 40 : 10 + 5\cdot(100 - 4\cdot 20)^2 - 92$

ΘΑΛΗΣ 2002

Λύση

Ακολουθούμε την σειρά προτεραιότητας εκτέλεσης των πράξεων. Προηγούνται οι παρενθέσεις και οι δυνάμεις , έπονται οι πολλαπλασιασμοί με τις διαιρέσεις και τελειώνουμε με τις προσθέσεις ή τις αφαιρέσεις.

$$K = 2\cdot 50 - 40 : 10 + 5\cdot(100 - 4\cdot 20)^2 - 92$$

$$= 2\cdot 50 - 40 : 10 + 5\cdot(100 - 80)^2 - 92$$

$$=2\cdot 50-40:10+5\cdot 20^2-92$$
$$=2\cdot 50-40:10+5\cdot 400-92$$
$$=100-4+2000-92$$
$$=100+2000-4-92$$
$$=2100-96$$
$$=2004$$

3. Διάταξη και ιδιότητες των ανισοτήτων

Να αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{9999}{10000}<\frac{1}{100}$

Λύση

Θέτουμε $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{9999}{10000}$. Παρατηρούμε ότι :

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\ ,\quad \frac{3}{4}<\frac{4}{5}\ ,\ \dots\ ,\quad \frac{9999}{10000}<\frac{10000}{10001}$$

Επομένως :

$$A<\frac{2}{3}\frac{4}{5}\dots\frac{10000}{10001}=\frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{6}{5}\dots\frac{10000}{9999}\frac{1}{10001}=\frac{1}{A}\frac{1}{10001}$$

Πολλαπλασιάζοντας στη σχέση αυτή και τα δύο μέλη με τον θετικό αριθμό A παίρνουμε :

$$A^2<\frac{1}{10001}<\frac{1}{10000}=\frac{1}{100^2}$$

Από την οποία προκύπτει ότι $A<\frac{1}{100}$

3. Πολλαπλάσια και Διαιρετότητα

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους x - 1, x, x + 1 που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο x + 1 είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο x - 1 είναι πολλαπλάσιο του 3.

ΘΑΛΗΣ 2015

Λύση

- ♦ Επειδή ο αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του 10, και ο αριθμός $x-10$ θα είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 10.
- ♦ Επειδή ο αριθμός $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3, και ο αριθμός $x-10=(x-1)-9$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3.
- ♦ Επειδή ο αριθμός $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11, και ο αριθμός $x-10=(x+1)-11$ θα είναι πολλαπλάσιο του 11.

Αλλά οι αριθμοί 3, 10 και 11 είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο, οπότε ο αριθμός $x-10$ θα είναι πολλαπλάσιο του $3\cdot 10\cdot 11=330$. Έτσι, αφού $0<x<1000$, θα έχουμε τις περιπτώσεις:

- $x-10=0$, οπότε οι ζητούμενοι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι $9,10,11$.
- $x-10=330$, οπότε οι ζητούμενοι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι $339,340,341$.
- $x-10=660$, οπότε οι ζητούμενοι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι $669,670,671$.

Εύκολα βλέπουμε ότι όλες οι παραπάνω λύσεις είναι δεκτές.

Άλλος τρόπος

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο διαιρετότητας με το 11.Για να είναι ο αριθμός $x+1=\overline{ab1}$ πολλαπλάσιο του 11 θα πρέπει τελικά $1-b+a=0$, δηλαδή $a=b-1$.

Υποψήφιοι λοιπόν για τον x είναι οι αριθμοί :

010 , 120,230, 340 , 450 , 560 , 670 , 780 , 890

Αν λάβουμε υπόψη και τον περιορισμό για τον $x-1$ που απαιτεί αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 3 αμέσως καταλήγουμε στους αριθμούς 10,340,670.

Άλλος τρόπος

Επειδή ο x είναι πολλαπλάσιο του 10 το ψηφίο των μονάδων του θα είναι 0 και αφού είναι μικρότερος του 1000, θα υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

α. Αν ο x είναι μονοψήφιος , τότε $x=0$ που δεν ικανοποιεί όμως τις άλλες απαιτήσεις.

β. Αν ο x είναι διψήφιος ,τότε $x=10,20,30,...,90$ από τις οποίες μόνο η $x=10$ ικανοποιεί τις άλλες απαιτήσεις.

γ. Αν ο x είναι τριψήφιος , τότε αφού το ψηφίο των μονάδων του $x+1$ θα είναι το 1 , για να είναι αυτό πολλαπλάσιο του 11 θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί μόνο με

$$11,21,31,41,51,61,71,81.$$

Τότε προκύπτουν οι αριθμοί $121,231,341,451,561,671,781,891$ της μορφής $x+1$.

Έτσι θα είναι $x-1=119,229,339,449,559,669,779,889$. Από αυτούς διαιρούνται με το 3 (αρκεί το άθροισμα ψηφίων τους διαιρείται με το 3) , οι $339,669$ που έχουν τη μορφή $x-1$. Επομένως $x=340,670$.

Τελικά οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι : 9,10,11 , 339,340,341 , 669,670,671.

Άλλος τρόπος

Η τριάδα 9, 10,11 είναι μια τριάδα αριθμών με τις δοσμένες ιδιότητες , που πηγάζει από την τιμή $x=10$. Είναι όμως $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$.Ακόμα είναι :

- 9+330=339, 10+330=340, 11+330=341
- 9+660=669, 10+660=670,11+660=671

5. Υπολογισμός παράστασης !

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$

ΘΑΛΗΣ 2012

Λύση

Κάνουμε τις πράξεις όπου αυτές γίνονται τηρώντας τις προτεραιότητες :

$$A=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\left(\frac{18}{1}-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{\frac{3}{1}+\frac{6}{11}}\right)=$$

$$\left(\frac{18\cdot5}{1\cdot5}-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{\frac{3\cdot11}{1\cdot11}+\frac{6}{11}}\right)=\left(\frac{90}{5}-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{\frac{33}{11}+\frac{6}{11}}\right)=$$

$$\frac{88}{5}:\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\frac{\frac{5}{11}}{\frac{39}{11}}=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5\cdot 11}{39\cdot 11}=\frac{88}{44}-1=2-1=1$$

6. Κι άλλη παράσταση !!!

Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων $12,30$ και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης : $B=\dfrac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$.

ΘΑΛΗΣ 2012

Λύση

Είναι

$$12=2^2\cdot 3 \quad , \; 30=2\cdot 3\cdot 5 \;\; , \quad 54=2\cdot 3^3$$

οπότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών $12,30,54$ είναι το γινόμενο μόνο των κοινών παραγόντων, δηλαδή ο αριθμός $2\cdot 3=6$.

Επειδή $6=1\cdot 6=2\cdot 3$ οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι αριθμοί $1,2,3,6$ και από αυτούς πρώτοι είναι μόνο οι $2,3$. Επομένως $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

α) Για $\kappa=2$ είναι :

$$B=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}=\frac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-2}{2}}{2}=\frac{2-1}{\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}:\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{2}{3}:\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 1}=\frac{8}{3}$$

β) Για $\kappa=3$ όμοια βρίσκουμε :

$$B=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}=\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-3}{2}}{2}=\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{0}{2}}{2}$$

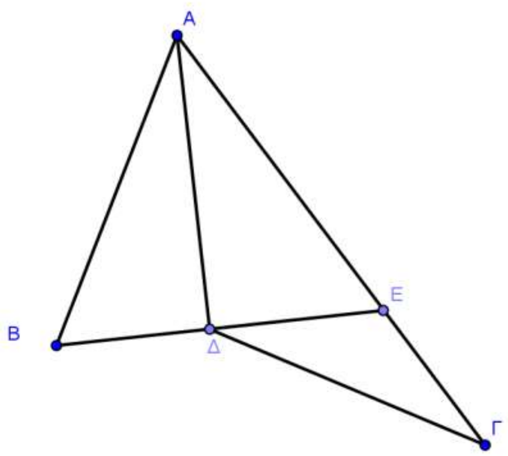
Επειδή ο διαιρέτης είναι ίσος με 0, η διαίρεση είναι αδύνατη. Επομένως η παράσταση δεν ορίζεται για $\kappa = 3$.

7. Ισόπλευρο τρίγωνο και εύρεση γωνίας

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^o$ και $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

ΘΑΛΗΣ 2012

Λύση



Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 60^0$, οπότε τελικά είναι ισόπλευρο. Αφού όμως είναι ισοσκελές, η διχοτόμος $A\Delta$ είναι και ύψος και διάμεσος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\widehat{AE\Delta} = 60^0$, οπότε:

$$\widehat{\Delta E\Gamma} = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

Ακόμη είναι :

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}AB - AB = \frac{AB}{2} = \frac{BE}{2} = \Delta E,$$

και έτσι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\widehat{E\Delta\Gamma} = \widehat{E\Gamma\Delta} = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0.$$

8. Θα μας βγει το ...λάδι . Αγαπημένα προβλήματα !

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι $2,5$ ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

ΘΑΛΗΣ 2012

Λύση

(α) Για να καλύψει τα έξοδα του θα πρέπει να έχει έσοδα όσα έχει έξοδα, δηλαδή $407+1050=1457$ ευρώ.

Αν δεν είχε κρατήσεις , θα κέρδιζε στο ένα κιλό λάδι $2,5$ ευρώ. Με τις κρατήσεις χάνει το

$6\%\cdot 2,5=\frac{6}{100}\cdot 2,5=\frac{15}{100}=0,15$ ευρώ, οπότε του μένουν καθαρά $2,5-0,15=2,35$ ευρώ στο ένα κιλό λάδι.

Αφού πρέπει να πουλήσει λάδι αξίας 1457 ευρώ και το ένα κιλό κοστίζει $2,35$ θα πρέπει να πουλήσει συνολικά $\frac{1457}{2,35}=620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει ως αμοιβή $8\%\cdot 800=\frac{8}{100}\cdot 800=\frac{6400}{100}=64$ κιλά λάδι,

οπότε στον ελαιοπαραγωγό , μετά την πώληση για να καλύψει τα έξοδα του , θα μείνουν $800-620-64=800-684=116$ κιλά λάδι.

9. Αναλογίες και εύρεση αριθμών :

Τρεις αριθμοί α,β,γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς $3,9,11$ αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56.
Να βρεθούν οι αριθμοί α,β και γ.

ΘΑΛΗΣ 2011

Λύση

Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $\frac{a}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\lambda$, οπότε $a=3\lambda$, $\beta=9\lambda$, $\gamma=11\lambda$

Ακόμη είναι :

$$\gamma-a=56\Leftrightarrow 11\lambda-3\lambda=56\Leftrightarrow 8\lambda=56\Leftrightarrow \lambda=7$$

Έτσι , οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : $a=21,\beta=63,\gamma=77$

(Η λύση έγινε από τη συνάδελφο Μυρτώ Λιάπη)

10. Ιδιότητες των τριγώνων και γωνίες !

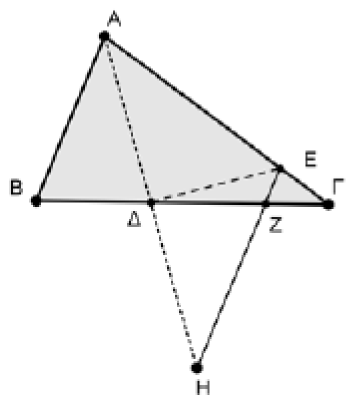
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι , ώστε $A\Delta = \Delta H$. Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

α. Να αποδείξετε ότι : $\widehat{A\Delta E} = 90^o$.

β. Να βρείτε τη γωνία $\widehat{E\Delta Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^o$.

ΘΑΛΗΣ 2011

Λύση



α) Είναι $\widehat{EH\Delta} = \widehat{BA\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΗ, ΑΒ με τέμνουσα την ΑΗ.

Όμως $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta AE}$, διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος . Άρα $\widehat{\Delta AE} = \widehat{\Delta HE}$ και έτσι το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΗ. Επομένως η διάμεσος $E\Delta$ θα είναι και ύψος, δηλαδή $\widehat{A\Delta E} = 90^o$.

β) Είναι επίσης με βάση το σχήμα :

$$\widehat{\Delta E\Gamma} = 180^0 - \widehat{\Delta EA} = \widehat{\Delta AE} + \widehat{A\Delta E} + \widehat{\Delta EA} - \widehat{\Delta EA} = \frac{\hat{A}}{2} + 90^0 \quad (1)$$

Επομένως είναι :

$$\widehat{E\Delta\Gamma} = 180^0 - \widehat{\Delta E\Gamma} - \hat{\Gamma} = 180^0 - \frac{\hat{A}}{2} - 90^0 - \hat{\Gamma} = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}) = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{\Gamma}) = 10^0$$

11.Εμβαδόν τραπεζίου και ύψος

Του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta // B\Gamma$) δίνονται:

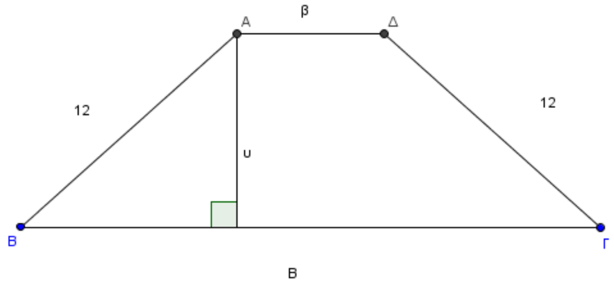
(α) $AB = \Gamma\Delta = 12$ μέτρα (β) Η περίμετρός του 54 μέτρα (γ) Το εμβαδό του $E = 120$ τ.μ.

Να βρείτε το ύψος υ του τραπεζίου .

ΘΑΛΗΣ 2000

Λύση

Ονομάζουμε Β , β τις βάσεις του τραπεζίου,
δηλαδή $B = B\Gamma, \beta = A\Delta$.



Το τραπέζιο έχει περίμετρο
$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 54$ μέτρα , οπότε
$12 + B + 12 + \beta = 54$

Έχουμε σύμφωνα με το πρόβλημα :
$B + \beta + 12 + 12 = 54$ ή $B + \beta + 24 = 54$ ή $B + \beta = 54 - 24$ ή $B + \beta = 30$ μέτρα

Το τραπέζιο έχει επομένως εμβαδόν

$$E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2} = \frac{30\upsilon}{2} = 15\upsilon = 120 \text{ τ.μ.}$$

Άρα , τελικά παίρνουμε $15\upsilon = 120$, οπότε $\upsilon = 120 : 15 = 8$ μέτρα.

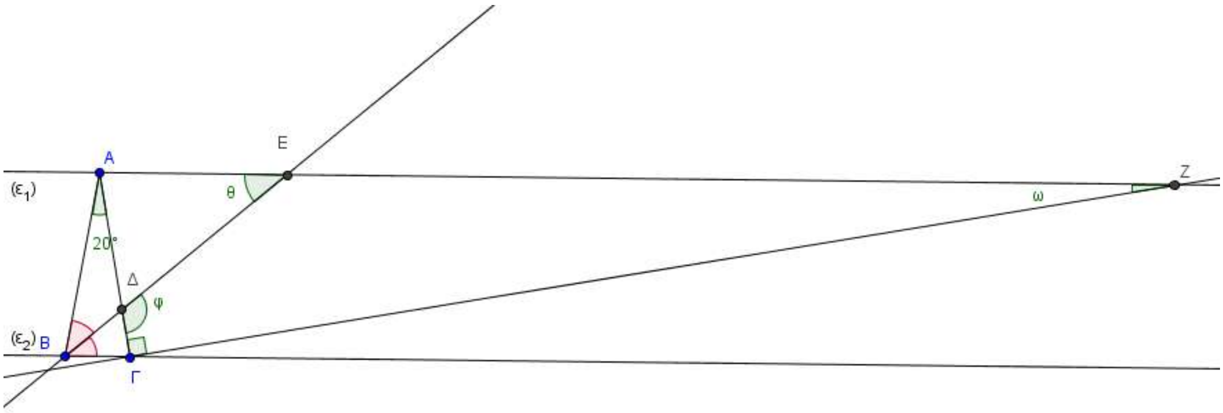
(Η λύση είναι από τον συνάδελφο Τάκη Χρονόπουλο)

12. Παράλληλες , τέμνουσες και τρίγωνα

Στο σχήμα δίνονται:

(α) $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ (β) $AB = A\Gamma$ και $\widehat{BA\Gamma} = 20^o$

(γ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ και (δ) $\Gamma Z \perp A\Gamma$.



Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = \widehat{\Gamma\Delta E}$, $\theta = \widehat{AE\Delta}$ και ω.

Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες BE και ΓZ δεν είναι παράλληλες.

ΘΑΛΗΣ 2000

Λύση

Είναι $\hat{A} = 20^o$ και $AB = A\Gamma$. Επομένως:

- $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 80^o$, $\widehat{AB\Gamma} = 80^o \Rightarrow \widehat{AB\Delta} = 40^o \Rightarrow \widehat{A\Delta B} = 120^o = \phi$
- $\widehat{A\Gamma B} = 80^o \Rightarrow \widehat{\Delta AE} = 80^o$ (1) , $\phi = 120^o \Rightarrow \widehat{A\Delta E} = 60^o$, (2)

Από τις σχέσεις (1) , (2) παίρνουμε : $\theta = 180 - 80 - 60 = 40^o$. Τέλος είναι $\omega = 180 - 90 - 80 = 10^o$

Επειδή $\omega \neq \theta$, οι ευθείες $BE, \Gamma Z$, δεν είναι παράλληλες.

13. Παράσταση και σύγκριση αριθμών

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$ και $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$.

Να βρεθούν οι A, B και να συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}, \frac{22B}{A}$.

ΘΑΛΗΣ 2000

Λύση

Έχουμε διαδοχικά :

- $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 = 25 - 6 : 8 + 1 = 25 - 2 + 1 = 24$
- $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1) = (25 - 16) : (8 + 1) = 9 : 9 = 1$

$$\frac{A}{20B} = \frac{24}{20 \cdot 1} = \frac{24}{20} = \frac{24:2}{20:2} = \frac{12}{10} = \frac{12:2}{10:2} = \frac{6}{5}$$

- $\frac{22B}{A} = \frac{22 \cdot 1}{24} = \frac{22}{24} = \frac{22:2}{24:2} = \frac{11}{12}$

α΄τρόπος

$\frac{11}{12} < \frac{12}{12} = 1 = \frac{5}{5} < \frac{6}{5}$. Άρα $\frac{11}{12} < \frac{6}{5}$, οπότε $\frac{22B}{A} < \frac{A}{20B}$

β΄τρόπος

Είναι

$$\frac{6}{5}=\frac{6\cdot 12}{5\cdot 12}=\frac{72}{60} \quad \text{και} \quad \frac{11}{12}=\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{55}{60}$$

Έχουμε επομένως $\frac{72}{60}>\frac{55}{60}$, οπότε $\frac{6}{5}>\frac{11}{12}$ και έτσι $\frac{A}{20B}>\frac{22B}{A}$

14. Παράσταση με πολλούς όρους

Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...+\frac{2001}{2000}$ και $\mathrm{B}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2000}$.

Να βρείτε τον αριθμό $A-B$

ΘΑΛΗΣ 2000

Λύση

Από μια αφαίρεση που ο μειωτέος και ο αφαιρετέος έχουν πολλούς όρους, μπορούμε να επιλέξουμε έναν όρο από το μειωτέο , έναν από τον αφαιρετέο και να δημιουργήσουμε ένα άθροισμα από πολλές απλές αφαιρέσεις. Με άλλα λόγια ισχύει η ιδιότητα :

$$(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)$$

Έχουμε επομένως :

$$A-B=(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...+\frac{2001}{2000})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2000})=$$

$$\frac{2-1}{1}+\frac{3-1}{2}+\frac{4-1}{3}+...+\frac{2001-1}{2000}=1+1+1+1....+1=2000$$

15. Παράσταση με πολλά κλάσματα

Αν $a\neq 0$ και $a\neq -1$ να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$A=\frac{1}{a^{-1995}+1}+\frac{1}{a^{-1994}+1}+\cdots+\frac{1}{a^{0}+1}+\cdots+\frac{1}{a^{1994}+1}+\frac{1}{a^{1995}+1}$$

ΘΑΛΗΣ 2000

Λύση

Αν ομαδοποιήσουμε τους προσθετέους παίρνουμε:

$$A=\left(\frac{1}{a^{-1995}+1}+\frac{1}{a^{1995}+1}\right)+\left(\frac{1}{a^{-1994}+1}+\frac{1}{a^{1994}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a^{-1}+1}+\frac{1}{a^{1}+1}\right)+\frac{1}{a^{0}+1}=$$

$$\left(\frac{a^{1995}}{a^{1995}+1}+\frac{1}{a^{1995}+1}\right)+\left(\frac{a^{1994}}{a^{1994}+1}+\frac{1}{a^{1994}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}\right)+\frac{1}{2}=$$

$$\frac{a^{1995}+1}{a^{1995}+1}+\frac{a^{1994}+1}{a^{1994}+1}+\cdots+\frac{a^{1994}+1}{a^{1994}+1}+\frac{1}{2}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1995}+\frac{1}{2}=\frac{3991}{2}$$

15.Πρόβλημα ! Σιγά τα ..ωά !

Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

ΘΑΛΗΣ 1995

Λύση

Για να πετύχουμε το μέγιστο αριθμό καλαθιών με τους περιορισμούς του προβλήματος, θα πρέπει να βάζουμε όσο το δυνατόν λιγότερα αυγά σε κάθε καλάθι.

Έτσι στο πρώτο καλάθι, βάζουμε 1 αυγό, στο δεύτερο 2 . στο τρίτο 3 κλπ, ... , στο n - οστό βάζουμε n αυγά . Θέλουμε να είναι $1+2+3+...+n=200$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow 200=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow 400=n(n+1)$$

Παρατηρούμε ότι ο 400 δεν γράφεται σαν γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών, όμως προσεγγίζουμε την λύση της εξίσωσης αυτής αν βάλλουμε $n=19$. Τότε $19.20=380$. Αυτό σημαίνει ότι σε 19 καλάθια θα βάλουμε τα αυγά με τον τρόπο που περιγράψαμε ($1+2+3+...+19=190$) αλλά θα μας περισσέψουν ακόμα 10 αυγά, τα οποία δεν μπορούμε με κανέναν τρόπο να τα τοποθετήσουμε σε καλάθια, γιατί θα υπάρχει κάποιο άλλο που θα έχει τον ίδιο αριθμό αυγών. Έτσι, τα τοποθετούμε π.χ στο τελευταίο καλάθι και συνεπώς ο μέγιστος αριθμός καλαθιών είναι 19.

16. Δυνάμεις και σύγκριση αριθμών !

Ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος;

α) $A=(-1995)^{1996}$ και $B=(-1996)^{1995}$

β) $A=1-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}\right)$ και $B=0,0100001$.

γ) $A=-\frac{5555553}{5555557}$ και $B=-\frac{6666665}{6666669}$.

ΘΑΛΗΣ 1995

Λύση

(α) Ο αριθμός A είναι θετικός (είναι σε άρτιο εκθέτη) και ο B είναι αρνητικός (είναι σε περιττό εκθέτη με βάση αρνητική). Άρα $A>B$.

(β) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\ ,\ \ \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Άρα

$$A=1-[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)]=\ 1-(1-\frac{1}{100})=1-1+\frac{1}{100}=0,01<B$$

(γ) Έχουμε :

$$A=-\frac{5555555-2}{5555555+2}=-\frac{5.1111111-2}{5.1111111+2}=-\frac{5x-2}{5x+2}$$, όπου θέσαμε $x=1111111$

Επίσης είναι $B=-\frac{6x-1}{6x+3}$ (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο)

Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς A,B θα πάρουμε τη διαφορά τους:

$$A-B=-\frac{5x-2}{5x+2}+\frac{6x-1}{6x+3}=\ldots=\frac{4x+4}{(6x+3)(5x+2)}>0$$

δηλαδή είναι $A>B$.

Άλλος τρόπος

Παρατηρούμε ότι αν φτιάξουμε στους αριθμητές τους παρονομαστές και " σπάσουμε" τα κλάσματα σε δύο , τότε :

$$\frac{5x-2}{5x+2}=1-\frac{4}{5x+2} \quad \text{και} \quad \frac{6x-1}{6x+3}=1-\frac{4}{6x+3}$$

Όμως $5x+2<6x+3$, οπότε $1-\dfrac{4}{5x+2}<1-\dfrac{4}{6x+3}$, δηλαδή $-A<-B$ ή $A>B$

17. Κύκλοι, τρίγωνα και εμβαδά

Να χαράξετε κύκλο $(K,3cm)$. Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο $(\Lambda,3cm)$.

Η διάκεντρος $K\Lambda$ τέμνει τον K στο A και τον Λ στο B, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες $K\Gamma$, $\Lambda\Delta$ κάθετες στην $K\Lambda$ και προς το αυτό μέρος της $K\Lambda$.

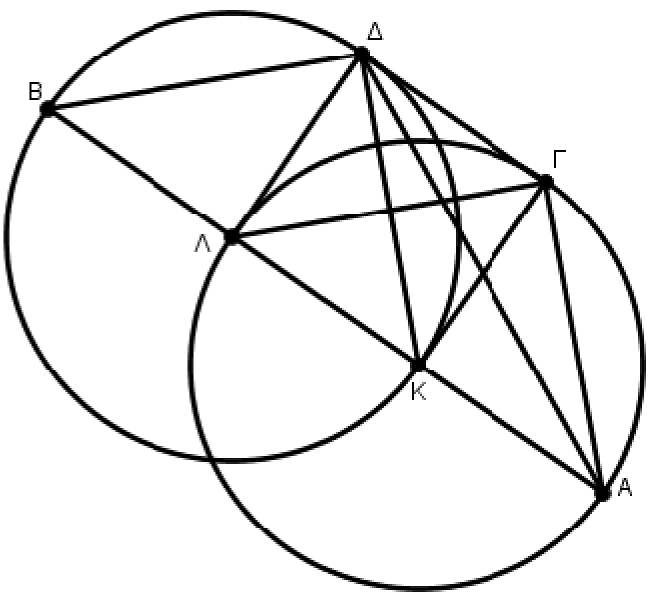
α) Τι είδους είναι τα σχήματα $K\Lambda\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Lambda$, $A\Delta B$, $AK\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Delta B$;

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.

ΘΑΛΗΣ 1995

Λύση

Ας βασιστούμε στο παρακάτω σχήμα :



♦ Το $K\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τετράγωνο αφού είναι παραλληλόγραμμο διότι $K\Lambda // = \Delta\Gamma$, έχει μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Το εμβαδόν είναι $E=9cm^2$

♦ Το $A\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο , αφού $<A\Gamma\Lambda=90^0$ μια και είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο , ενώ από την άλλη τα τόξα $A\Gamma,\Gamma\Lambda$ είναι ίσα , αφού είναι ίσες οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες .

Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε $\Gamma\Lambda = \sqrt{18}$ και έτσι το εμβαδόν είναι :

$$E = \frac{\sqrt{18}.\sqrt{18}}{2} = 9cm^2$$

- Το $A\Delta B$ είναι αμβλυγώνιο τρίγωνο διότι $< B = 45^0 < BA\Delta < 45^0$. Το εμβαδόν του είναι

$$E = \frac{AB.\Delta\Lambda}{2} = \frac{27}{2}cm^2$$

- Το $AK\Delta\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο , αφού $AK // = \Gamma\Delta$ και $E = AK \cdot \Delta\Lambda = 9cm^2$

- Το $A\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με εμβαδόν $E = \dfrac{(AB + \Gamma\Delta).\Delta\Lambda}{2} = \dfrac{(9+3)\cdot 3}{2} = 18cm^2$

17.Απλοποίηση παράστασης με πράξεις

Έστω οι αριθμοί a,b με $\frac{1}{2}a + 2,5b + 1,5a - \frac{1}{2}b = -6$. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{114 - 3(a-b) - 2(a-2b) - 5 + 3[5a - (-b+1)]}{-2(2a-b) - 4(3b-1) - 2(-2a-5b)}$$

ΘΑΛΗΣ 1995

Λύση

Θα απλοποιήσουμε πρώτα την αρχική δοσμένη παράσταση. Έχουμε διαδοχικά:

$\frac{1}{2}a + 2,5b + 1,5a - \frac{1}{2}b = -6$ ή $0,5a + 2,5b + 1,5a - 0,5b = -6$ ή $0,5a + 1,5a + 2,5b - 0,5b = -6$ ή

$2a + 2b = -6$ ή $2(a+b) = -6$ ή $a + b = -6:2$ ή $a + b = -3$

Διαφορετικά μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής :

$$2a + 2b = -6 \Leftrightarrow \frac{2a}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow a + b = -3$$

Έχουμε επομένως :

$$A = \frac{114 - 3(a-b) - 2(a-2b) - 5 + 3[5a - (-b+1)]}{-2(2a-b) - 4(3b-1) - 2(-2a-5b)} \text{ ή } A = \frac{114 - 3(a-b) - 2(a-2b) - 5 + 3(5a+b-1)}{-4a + 2b - 12b + 4 + 4a + 10b}$$

$$A=\frac{114-3a+3b-2a+4b-5+15a+3b-3}{-4a+4a+2b-12b+10b+4} \quad \text{ή} \quad A=\frac{-3a-2a+15a+3b+4b+3b+114-5-3}{2b+10b-12b+4}$$

$$A=\frac{-5a+15a+10b+114-8}{12b-12b+4} \text{ ή } A=\frac{10a+10b+106}{4} \text{ ή } A=\frac{10(a+b)+106}{4} \text{ ή } A=\frac{10(-3)+106}{4}$$

$$A=\frac{-30+106}{4} \text{ ή } A=\frac{76}{4} \text{ ή } A=19$$

Είναι βέβαια προφανές ότι καλύτερα να εργαζόμαστε με συνεχείς ισότητες .

18. Πρόβλημα με ακέραιους και διαιρέτες

Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς , που το γινόμενό τους ήταν 20. Να βρεθούν οι διαφορετικοί αυτοί ακέραιοι.

ΘΑΛΗΣ 1995

Λύση

Αναλύοντας το 20 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε οτι $20=1\cdot2\cdot2\cdot5$. Άρα πρέπει να επιλέξουμε 5 μεταξύ των αριθμών $1,-1,2,-2,5,-5$. Ο αριθμός που δεν θα επιλέξουμε είναι ένας εκ των $5,-5$ γιατί η απόλυτη τιμή του γινομένου τους είναι μεγαλύτερη του 25. Παίρνοντας λοιπόν τους υπόλοιπους 4 βλέπουμε ότι έχουν γινόμενο ίσο με 4. Άρα ο αριθμός που μας λείπει είναι ο 5. Άρα οι διαφορετικοί ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι $1,-1,2,-2,5$.

Σχόλιο

Ας δώσουμε μια πιο αναλυτική λύση που δείχνει γιατί απορρίπτονται οι αριθμοί $\pm4, \pm10, \pm20$:

Οι διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί $\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20$

♦ Έστω πως ο ένας αριθμός είναι το 20 . Αφού $20=1\cdot20$ ο μόνος άλλος δυνατός ακέραιος είναι το 1, απορρίπτεται γιατί αναζητούμε 5 συνολικά.

Ομοίως απορρίπτεται η περίπτωση ο ένας αριθμός να είναι το -20 .

♦ Έστω πως ο ένας αριθμός είναι το 10 . Αφού $20=2\cdot10=1\cdot2\cdot10=-1\cdot(-2)\cdot10$, οι μόνοι άλλοι δυνατοί αριθμοί είναι οι $-1,-2$ και $1,2$ οι οποίοι απορρίπτονται .

Ομοίως απορρίπτεται η περίπτωση ο ένας αριθμός να είναι το -10 .

♦ Έστω πως ο ένας αριθμός είναι το 4 . Αφού $20 = 5 \cdot 4 = 1 \cdot 5 \cdot 4 = -1 \cdot (-5) \cdot 4$,

οι μόνοι άλλοι δυνατοί αριθμοί είναι οι $-1, -5$ και $1, 5$ οι οποίοι απορρίπτονται γιατί ψάχνουμε πεντάδες κι όχι τριάδες.

♦ Ομοίως απορρίπτεται η περίπτωση ο ένας αριθμός να είναι το -4 .

*** Λύσεις περισσότερων θεμάτων θα βρείτε στο τελευταίο μέρος αυτού του αρχείου.

Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΑΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μπάμπης Στεργίου

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

9.1 Στο διπλανό πολλαπλασιασμό έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ψηφία από το 1 έως το 9. Να συμπληρώσετε αυτόν τον πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} \boxed{2}\,\boxed{}\,\boxed{} \\ \times\ \boxed{}\,\boxed{8} \\ \hline \boxed{5}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{} \end{array}$$

(Ευκλείδης – 2002)

9.2 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2$.

(Θαλής – 2004)

9.3 α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$B = \frac{3}{8}\left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \quad \text{και}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9}\right).$$

(Ευκλείδης – 2010)

9.4 Να υπολογίσετε την παράσταση
$A = \left[(-1)^{10} + (-1)^{11}\right] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10} - 20$.

(Ευκλείδης – 2002)

9.5 Όταν ένα δοχείο είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από όταν είναι κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα χωράει το δοχείο αυτό, όταν είναι γεμάτο;

(Θαλής – 1999)

9.6 Δίνονται οι παραστάσεις:

- $A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{2001}{2000}$,
- $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2000}$.

Να βρείτε τον αριθμό $A - B$.

(Θαλής – 2001)

9.7 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999},$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \ldots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίστε τον αριθμό $\frac{\alpha + \beta}{2}$, δηλαδή το μέσο όρο των αριθμών α και β.

(Θαλής – 2000)

9.8 Να γράψετε την παράσταση:

$$A = 3 \cdot 2^{18} \cdot [1 - (-1)^3] -$$
$$-2^6 \cdot (3^2 - 1)(3^3 - 11)(3^4 - 17)$$

ως δύναμη με βάση το 2.

(Ευκλείδης – 2004)

9.9 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 \quad \text{και}$$
$$B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1).$$

α) Να βρείτε τις παραστάσεις Α, Β.
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$\dfrac{A}{20B}$ και $\dfrac{23B}{A}$.

(Θαλής – 2001)

9.10 α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A=\frac{1}{8^2}\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \text{ και}$$

$$B=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}$$

β) Αν $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

(Ευκλείδης – 2011)

9.11 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=(-2)^{1000}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{500}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{998}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{499} \text{ και}$$

$$B=2^{\nu}\cdot 3^{\nu+1},$$

όπου ν είναι άρτιος φυσικός αριθμός. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $3A^{\nu}$ και B.

(Θαλής – 2000)

9.12 Αν α, β, γ είναι φυσικοί αριθμοί, ώστε $\alpha+\beta+\gamma=20$ και $3\alpha+2\beta+3\gamma=67$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=(2\alpha+\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta+4\gamma).$$

(Ευκλείδης – 1999)

9.13 Σ' ένα σχολικό διαγωνισμό χορού συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρια - κορίτσια). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών του σχολείου. Τι ποσοστό των μαθητών του σχολείου παίρνει μέρος στο χορό;

(Θαλής – 1998)

9.14 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A=1998^2-1997^2+1996^2+\ldots+2^2-1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής – 1999)

9.15 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{222223\cdot 444441\cdot 222220+222216}{222222^2}.$$

(Θαλής – 1999)

9.16 Να βρείτε τον αριθμό x, αν γνωρίζουμε ότι:

$$2^{1997}-2^{1996}-1+$$
$$+\left[\left((2^{80}:2^{78}):2^2\right)x-1-2^2\right](x+3^2)=$$
$$=2^{1995}+2^{1994}+\ldots+2^2+2+1.$$

(Ευκλείδης – 1998)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

9.17 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1, 6 και έχουν άθροισμα 140^o.

α) Να βρείτε τις γωνίες του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το ύψος και η διχοτόμος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ που αντιστοιχούν στην πλευρά ΒΓ.

(Θαλής – 2010)

9.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma$) με $\hat{A}=36^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

(Ευκλείδης – 2011)

9.19 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΒΓ // ΑΔ και:

i) $AB=\Gamma\Delta=12$ m.

ii) Η περίμετρος είναι 54 m.

iii) Το εμβαδόν είναι $E=120\text{ m}^2$.

Να βρεθεί το ύψος υ του τραπεζίου.

(Θαλής – 2001)

9.20 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB=2A\Delta$ και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΜ προς το μέρος της ΓΔ. Αν Ε είναι το μέσο του ΒΜ, να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{E}\Gamma$.

(Ευκλείδης – 1999)

9.21 Το σημείο M_1 είναι μέσο του ΑΒ, το M_2 είναι μέσο του AM_1, το M_3 είναι μέσο του AM_2 κλπ. Αν το M_{10} είναι μέσο του AM_9 και $AB=3\cdot 2^{11}$, να βρείτε το AM_{10}.

(Ευκλείδης – 1999)

9.22 Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 25%, σε τι ποσοστό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο;

(Ευκλείδης – 2010)

Γ. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α που είναι περιττοί, μεγαλύτεροι από 39, μικρότεροι από το 50 και διαιρούμενοι με 4 δίνουν υπόλοιπο 1.

(Θαλής – 2010)

9.24 Δίνονται οι αριθμοί:
$x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$, $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

β) Να βρείτε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x, y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής – 2011)

9.25 Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους $A = \overline{\alpha\beta\gamma}$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta}$.

(ii) Ο $\beta + \gamma$ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης:

$$3x + 12 < 5x - 1.$$

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

(Ευκλείδης – 2011)

9.26 Γράφουμε στη σειρά τους αριθμούς από το 1990 έως και το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος.

(Θαλής – 1998)

9.27 Το άθροισμα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού είναι ίσο με 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος αριθμός μικρότερος από τον αρχικό κατά 297. Ποιος μπορεί να είναι ο τριψήφιος αυτός αριθμός;

(Ευκλείδης – 2010)

9.28 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x, y αν γνωρίζουμε ότι $x^2(y + 2) = 4375$.

(Ευκλείδης – 1999)

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Υποδείξεις – Λύσεις

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

9.1 Αφού το γινόμενο είναι $\overline{5\delta\varepsilon\zeta}$, πρέπει $\alpha\cdot 2\le 5$, οπότε $\alpha=1$ ή $\alpha=2$. Το 2 έχει χρησιμοποιηθεί, οπότε $\alpha=1$.

$$\begin{array}{r} 2\ \beta\ \gamma \\ \times\ \alpha\ 8 \\ \hline 5\ \delta\ \varepsilon\ \zeta \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ \beta\ \gamma \\ \times\ 1\ 8 \\ \hline 5\ \delta\ \varepsilon\ \zeta \end{array}$$

- Είναι $\overline{5\delta\varepsilon\zeta}\ge 5300$, αφού $\delta\ge 3$ (τα ψηφία 1, 2 έχουν χρησιμοποιηθεί).
- Η διαίρεση 5300 : 18 δίνει πηλίκο 294, οπότε $\beta=9$.

$$\begin{array}{r|l} 5300 & 18 \\ \cline{2-2} 170 & 294 \\ 080 & \\ 8 & \end{array}$$

- Με $\beta=9$, πρέπει:
  $\gamma\in\{3,\ 4,\ 6,\ 7\}$.
  Με απλή δοκιμή οι τιμές $\gamma=4$, $\gamma=6$ απορρίπτονται, διότι π.χ.:
  $$8\cdot 4=32,\quad 8\cdot 6=48$$
  και οι τιμές 2, 8 έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα $\gamma=3$ ή $\gamma=7$. Τελικά $\gamma=7$ (με δοκιμές) και έτσι $\delta=3$, $\varepsilon=4$, $\zeta=6$. Ο ζητούμενος πολλαπλασιασμός είναι ο:
  $$297\times 18=5346.$$

9.2 Είναι:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=2415-4\cdot 100+1-2\cdot 9+2=\\ &=2415-400+1-18+2=\\ &=2015-15=2000. \end{aligned}$$

9.3 α) Αν γράψουμε για ευκολία:

$$2008=\alpha,$$

τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=(\alpha+2)-(\alpha+1)\alpha+(\alpha+2)\alpha=\\ &=\alpha+2-\alpha^2-\alpha+\alpha^2+2\alpha=\\ &=2\alpha+2=2\cdot 2008+2=4016+2=\\ &=4018. \end{aligned}$$

β) Θα υπολογίσουμε τις παραστάσεις Β και Γ:

- $$\mathrm{B}=\frac{3}{8}\left(4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{8}\left(4-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=$$
  $$=\frac{3}{8}\cdot\frac{4\cdot 12-3\cdot 3-2\cdot 4}{12}=\frac{3}{8}\cdot\frac{31}{12}=\frac{3\cdot 31}{8\cdot 3\cdot 4}=$$
  $$=\frac{31}{32}.$$
- $$\Gamma=\frac{11-2}{22}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{20}{9}\right)=\frac{9}{22}\cdot\frac{21}{9}=\frac{21}{22}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\mathrm{B}=\frac{32-1}{32}=1-\frac{1}{32},\quad \Gamma=\frac{22-1}{22}=1-\frac{1}{22}.$$

Επειδή $22<32$, είναι $\frac{1}{22}>\frac{1}{32}$, οπότε:

$$\mathrm{B}>\Gamma.$$

Σχόλιο

Είναι

$$B-\Gamma=\frac{31}{32}-\frac{21}{22}=\frac{682-672}{32\cdot 22}=\frac{10}{22\cdot 32}>0,$$

οπότε $B>\Gamma$.

9.4 Είναι:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=\big(+1+(-1)\big)\cdot(16-9)+5^{12-10}-20=\\ &=0+5^2-20=25-20=5. \end{aligned}$$

9.5 Μας βοηθάει το διπλανό διάγραμμα:

30%	
40%	20lit
30%	30%

Όταν το δοχείο είναι κατά 70% γεμάτο, περιέχει 20lit περισσότερο, από ό-ταν είναι κατά 30% γεμάτο. Άρα το 40% του δοχείου χωράει 20lit, οπότε όλο το δοχείο χωράει:

$$20:\frac{40}{100}=20\cdot\frac{100}{40}=50\ \text{lit}.$$

Μπορούμε βέβαια να εργαστούμε και με αναγωγή στη μονάδα:

- Το $\frac{1}{10}$ χωράει $20:40$ λίτρα,
- Το 100% χωράει $100\cdot\frac{20}{40}=50$ lit.

Άλλος τρόπος (με εξίσωση)

Αν το δοχείο χωράει x λίτρα, τότε:

$$\frac{70}{100}x-\frac{30}{100}x=20 \Leftrightarrow \frac{40}{100}x=20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x=200 \Leftrightarrow x=50 \text{ λίτρα.}$$

9.6 Είναι:

$$A-B=(2-1)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{2001}{2000}-\frac{1}{2000}\right)=$$

$$=\underbrace{1+1+1+1+...+1}_{2000-\text{όροι}}=2000.$$

9.7 Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha+\beta=(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{1}{1999}+\frac{3996}{3998}\right)=$$

$$=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{1999}+\frac{1998}{1999}\right)=$$

$$=2+\underbrace{1+1+...+1}_{1998-\text{όροι}}=2+1998=2000.$$

Άρα $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2000}{2}=1000$.

9.8 Είναι:

$$A=3\cdot 2^{18}[1-(-1)]-$$

$$-2^6\cdot(9-1)(27-11)(81-17)=$$

$$=3\cdot 2^{18}(1+1)-2^6\cdot 8\cdot 16\cdot 64=$$

$$=3\cdot 2^{18}\cdot 2-2^6\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^6=3\cdot 2^{19}-2^{19}=$$

$$=2^{19}(3-1)=2\cdot 2^{19}=2^{20}.$$

9.9 α) Είναι:

- $A=25-16:8+1=25-2+1=24$,
- $B=(25-16):(8+1)=9:9=1$.

β) Έχουμε:

- $\frac{A}{20B}=\frac{24}{20\cdot 1}=\frac{24}{20}>1$,
- $\frac{23B}{A}=\frac{23\cdot 1}{24}=\frac{23}{24}<1$.

Άρα $\frac{23B}{A}<\frac{A}{20B}$.

9.10 α) Είναι:

- $A=\frac{1}{64}\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

  $=\frac{1}{64}\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{9}{64}$.

- $B=\frac{9-1}{27}:\frac{10-2\cdot 3}{27}\cdot\frac{9}{2^7}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{2^7}=$

  $=\frac{8\cdot 9}{4\cdot 2^7}=\frac{2\cdot 9}{2^7}=\frac{9}{2^6}=\frac{9}{64}$.

Άρα είναι $A=B$.

β) $\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=$

$$=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}=$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1-3-4}{6}=\frac{-6}{6}=-1.$$

9.11 Θα υπολογίσουμε την παράσταση Α. Είναι:

$$A=(-2)^{1000}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{500}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{998}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{499}=$$

$$=-2^{1000}\cdot\frac{3^{500}}{2^{500}}\cdot\frac{1}{2^{998}}\cdot\frac{2^{499}}{3^{499}}=$$

$$=-\frac{2^{1000}\cdot 2^{499}\cdot 2^{-500}\cdot 2^{-998}}{3^{-500}\cdot 3^{499}}=$$

$$=-\frac{2^{1000+499-500-998}}{3^{-500+499}}=-\frac{2}{3^{-1}}=-2\cdot 3=-6.$$

Είναι επομένως:

- $3A^{\nu}=3(-6)^{\nu}=3\cdot 6^{\nu}$,
- $B=2^{\nu}\cdot 3^{\nu+1}=2^{\nu}\cdot 3^{\nu}\cdot 3=(2\cdot 3)^{\nu}\cdot 3=$

  $=3\cdot 6^{\nu}$.

Άρα $3A^{\nu}=B$.

9.12 Παρατηρούμε ότι:

- $2\alpha+\beta+2\gamma=3\alpha+2\beta+3\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)=$

  $=67-20=47$.

- $4\alpha+3\beta+4\gamma=3\alpha+2\beta+3\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)=$

  $=67+20=87$.

Άρα $A=47\cdot 87=4089$.

9.13 Έστω x, y ο συνολικός αριθμός των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα. Στο διαγωνισμό συμμετέχουν:

- Τα $\frac{8}{13}$ των αγοριών, δηλαδή $\frac{8x}{13}$ αγόρια.
- Τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών, δηλαδή $\frac{2y}{3}$ κορίτσια.

Συνολικά πήραν μέρος:

$$A=\frac{8x}{13}+\frac{2y}{3}=\frac{24x+26y}{39} \text{ παιδιά.}$$

- Επειδή στο χορό πήρε μέρος ο ίδιος αριθμός αγοριών – κοριτσιών, είναι:

  $$\frac{8x}{13}=\frac{2y}{3} \text{ ή } 24x=26y \Leftrightarrow 12x=13y$$

  Έτσι

  $$A=\frac{24x+26y}{39}=\frac{24x+24x}{39}=\frac{48x}{39}=$$

$$=\frac{3\cdot 16x}{3\cdot 13}=\frac{16x}{13}.$$

- Ο συνολικός αριθμός των παιδιών του σχολείου είναι:

$$B=x+y=x+\frac{6y}{6}=x+\frac{12}{13}x=\frac{25x}{13}$$

διότι:

$$24x=26y\Leftrightarrow 12x=13y\Leftrightarrow y=\frac{12x}{13}.$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{16x}{13}}{\frac{25x}{13}}=\frac{16}{25}=\frac{4\cdot 16}{4\cdot 25}=\frac{64}{100}=64\%.$$

9.14 Επειδή $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, παίρνουμε:

$$1998^2-1997^2=$$
$$=(1998+1997)(1998-1997)=$$
$$=1998+1997.$$

Άρα:

$$A=(1998+1997)+(1996+1995)+\ldots+$$
$$+(2+1)=1+2+3+\ldots+1997+1998=$$
$$=(1+1998)+(2+1997)+\ldots+(999+1000)=$$
$$=\underbrace{1999+1999+\ldots+1999}_{999-\text{όροι}}=$$
$$=999\cdot 1999=\pi o\lambda 1999.$$

9.15 Έστω $222222=\alpha$. Τότε:

$$A=\frac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2)+(\alpha-6)}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{(2\alpha^2-3\alpha+2\alpha-3)(\alpha-2)+\alpha-6}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{(2\alpha^2-\alpha-3)(\alpha-2)+\alpha-6}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{2\alpha^3-4\alpha^2-\alpha^2+2\alpha-3\alpha+6+\alpha-6}{\alpha^2}=$$
$$=\frac{2\alpha^3-5\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2(2\alpha-5)}{\alpha^2}=2\alpha-5=$$
$$=2\cdot 222222-5=444444-5=444439.$$

9.16 Ας υπολογίσουμε πρώτα το β′ μέλος. Έστω:

$$\alpha=2^{1995}+2^{1994}+\ldots+2^2+2+1 \quad (1).$$

Είναι τότε:

$$2\alpha=2^{1996}+2^{1995}+\ldots+2^3+2^2+2 \quad (2).$$

Αφαιρούμε από τη (2) την (1):

$$2\alpha-\alpha=2^{1996}-1\Leftrightarrow \alpha=2^{1996}-1$$

Έτσι η εξίσωση γράφεται:

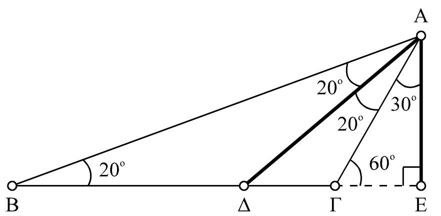
$$2^{1997}-2^{1996}-1+\left[(2^2:2^2)x-1-4\right](x+9)=$$
$$=2^{1996}-1\Leftrightarrow$$
$$2^{1996}(2-1)-1+(x-5)(x+9)=2^{1996}-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+9)=0\Leftrightarrow x=5 \quad \text{ή} \quad x=9.$$

Β′ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

9.17 α) Έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1}=\frac{\hat{\Gamma}}{6}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{1+6}=\frac{140^\circ}{7}=20^\circ.$$

Άρα $\hat{B}=20^\circ$ και $\hat{\Gamma}=6\cdot 20^\circ=120^\circ$. Επομένως $\hat{A}=40^\circ$.

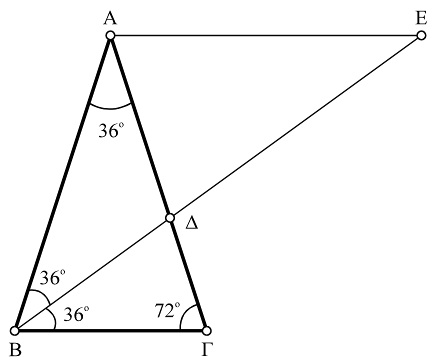


β) Αφού $\hat{A}=40^\circ$, είναι:

$$\Delta\hat{A}B=\Delta\hat{A}\Gamma=20^\circ$$

Είναι όμως $\Gamma\hat{A}E=30^\circ$, οπότε $\Delta\hat{A}E=50^\circ$.

9.18 Επειδή $\hat{A}=36^\circ$, θα είναι:



$$\hat{B}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=\frac{144^\circ}{2}=72^\circ.$$

Άρα:

$$E\hat{B}A=E\hat{B}\Gamma=\frac{72^\circ}{2}=36^\circ$$

- Είναι $\Delta\hat{B}A=\Delta\hat{A}B=36^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ισοσκελές.
- Είναι $\Delta\hat{\Gamma}B=72^\circ$ και $\Gamma\hat{B}\Delta=36^\circ$, οπότε:

$$B\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=$$
$$=180^\circ-108^\circ=72^\circ.$$

Άρα $B\hat{\Delta}\Gamma=B\hat{\Gamma}\Delta=72^\circ$, οπότε το $\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$ είναι ισοσκελές.
- Επειδή ΑΕ // ΒΓ, είναι:

$$A\hat{E}B = E\hat{B}\Gamma = 36^o = A\hat{B}E,$$

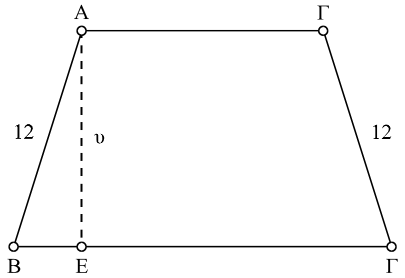
οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

- Στο τρίγωνο ΑΕΔ είναι:

$$E\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B = 72^o.$$

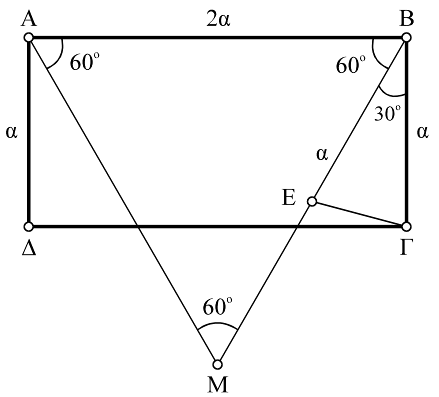
Επίσης $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}\Gamma = 72^o$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

9.19 Έστω $AE = \upsilon$ το ύψος του τραπεζίου. Έχουμε:



- $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 54$ ή
$12 + (B\Gamma + A\Delta) + 12 = 54$ ή
$B\Gamma + A\Delta = 54 - 24$ ή $A\Delta + B\Gamma = 30$.
- $E = 120$ ή $\dfrac{A\Delta + B\Gamma}{2}\cdot\upsilon = 120$ ή
$\dfrac{30}{2}\cdot\upsilon = 120$ ή $15\cdot\upsilon = 120$ ή
$\upsilon = 120:15$ ή $\upsilon = 8\,m$.

9.20 Αφού $AB = 2A\Delta = 2\alpha$ και το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισόπλευρο, είναι:

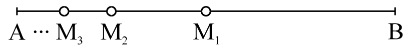


$$BE = \frac{BM}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha = B\Gamma.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές και αφού $E\hat{B}\Gamma = 30^o$, είναι:

$$B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}E = \frac{180^o - E\hat{B}\Gamma}{2} = $$
$$= \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o.$$

9.21 Από την υπόθεση έχουμε:



$$AM_{10} = \frac{1}{2}AM_9 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AM_8\right) = \frac{1}{2^3}AM_7 =$$
$$= \frac{1}{2^4}AM_6 = \ldots = \frac{1}{2^8}AM_2 = \frac{1}{2^9}AM_1 =$$
$$= \frac{1}{2^{10}}AB = \frac{1}{2^{10}}\cdot 3\cdot 2^{11} = 3\cdot 2^{11-10} = 3\cdot 2 = 6.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στο τυχαίο βήμα $\dfrac{1}{2^\mu}AM_\rho$ είναι $\mu + \rho = 10$.

9.22 Έστω x το πλάτος και 2x το μήκος του. Η νέα πλευρά είναι:

$$x + \frac{25}{100}x = x + \frac{1}{4}x = \frac{5x}{4}.$$

Έστω ότι η μείωση είναι α%. Τότε το νέο μήκος είναι:

$$2x - \frac{\alpha}{100}2x = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)2x = \frac{(100-\alpha)x}{50}.$$

Το εμβαδόν δε μεταβάλλεται, οπότε:

$$x\cdot 2x = \frac{5x}{4}\cdot\frac{(100-\alpha)x}{50} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{x^2(100-\alpha)}{40} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 100 - \alpha = 80 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 100 - 80 \Leftrightarrow \alpha = 20.$$

Άρα το μήκος πρέπει να μειωθεί κατά 20%.

Γ' ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.23 Είναι $\alpha = 4\lambda + 1$, $39 < \alpha < 50$, οπότε το α είναι σίγουρα περιττός. Έτσι:

$$39 < 4\lambda + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\lambda < 49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{19}{2} < \lambda < \frac{49}{4} \Leftrightarrow 9 + \frac{1}{2} < \lambda < 12 + \frac{1}{4}.$$

Αλλά $\lambda \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda = 10$ ή 11 ή 12, οπότε $\alpha = 41$, ή $\alpha = 45$ ή $\alpha = 49$.

9.24 α) Είναι:

- $x = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 =$

  $= 9 - 8 + 32 = 33$.
- $y = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99$.

β) Προφανώς $A = \text{ΜΚΔ}(33, 99) = 33$.

9.25 Έχουμε:

- $A - B = 27 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\alpha +$
  $+ 10\gamma + \beta) = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 9(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3$.
- $3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 5x - 3x > 12 + 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}$.

  Άρα $x = 7$, οπότε $\beta + \gamma = 7$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\beta - \gamma = 3$, δηλαδή:

$$\beta = 3 + \gamma,$$

οπότε:

$$\beta + \gamma = 7 \text{ ή } 3 + \gamma + \gamma = 7 \text{ ή}$$
$$2\gamma = 4 \text{ ή } \gamma = 2.$$

Άρα $\gamma = 2$ και $\beta = 3 + \gamma = 3 + 2 = 5$.

Ο α έχει τη μορφή $\overline{\alpha 52}$ και το άθροισμα των ψηφίων του είναι $\alpha + 7$. Επειδή ο Α διαιρείται με το 3, πρέπει ο $\alpha + 7$ να διαιρείται με το 3, επομένως:

$\alpha = 2$ (οπότε $\alpha + 7 = 9$) ή
$\alpha = 5$ (οπότε $\alpha + 7 = 12$) ή
$\alpha = 8$ (οπότε $\alpha + 7 = 15$.

Έτσι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 252, 552, 852.

9.26 Παρατηρούμε ότι στον αριθμό που προκύπτει:
$\alpha = 19901991 \ldots 19961997$

το άθροισμα των ψηφίων είναι:

$$S = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + (0 + 1 + 2 + \ldots + 7) =$$
$$= 8 + 72 + 72 + 28 = 36 + 144 = 180.$$

Όμως $1 + 8 + 0 = 9$, που σημαίνει ότι ο 180, άρα και ο αριθμός α, διαιρείται με το 9 (και με ο 3). Άρα ο Α είναι σύνθετος.

9.27 Έστω $x = \overline{\alpha\beta\gamma}$ ο ζητούμενος αριθμός. Τότε:

- $\alpha + \beta + \gamma = 10$.
- $\overline{\alpha\beta\gamma} - \overline{\gamma\beta\alpha} = 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) -$
  $-(100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297 \Leftrightarrow 99\alpha - 99\gamma =$
  $= 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3$.

  Άρα:

$$(\alpha, \gamma) = \{(3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3),$$
$$(7, 4), (8, 5), (9, 6)\}.$$

Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 10$, είναι:

$(\alpha, \gamma) = (3, 0)$ ή $(4, 1)$ ή $(5, 2)$ ή $(6, 3)$,

οπότε:

$$\overline{\alpha\beta\gamma} \in \{370, 451, 532, 613\}.$$

9.28 Είναι:

4375	5
875	5
175	5
35	5
7	7
1	

$$4375 = 5^4 \cdot 7,$$

δηλαδή:

- $x^2(y + 2) = (5^2)^2(5 + 2) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x^2 = (5^2)^2$ και $y + 2 = 5 + 2) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x^2 = 25$ και $y = 5)$.
- $x^2(y + 2) = 5^2(5^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 2) = 5^2(173 + 2)$ οπότε $(x^2 = 5^2$ και $y + 2 = 173 + 2) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x = 5$ και $y = 173)$.

- $x^2(y + 2) = 1^2(4373 + 2) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 4373)$

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΜΕ 1995-2015

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -1$ να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{\alpha^{-1995}+1} + \frac{1}{\alpha^{-1994}+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{0}+1} + \frac{1}{\alpha^{1}+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{1994}+1} + \frac{1}{\alpha^{1995}+1}$$

(Θαλής 1995)

2. Ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος;

α) $A = (-1995)^{1996}$, $\quad B = (-1996)^{1995}$.

β) $A = 1 - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}\right)$, $\quad B = 0{,}0100001$.

γ) $A = -\frac{5555553}{5555557}$, $\quad B = -\frac{6666665}{6666669}$.

(Θαλής 1995)

3. Έστω οι αριθμοί α, β με $\frac{1}{2}\alpha + 2{,}5\beta + 1{,}5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -6$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{114 - 3(\alpha-\beta) - 2(\alpha-2\beta) - 5 + 3[5\alpha - (-\beta+1)]}{-2(2\alpha-\beta) - 4(3\beta-1) - 2(-2\alpha-5\beta)}$

(Θαλής 1996)

4. Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = \frac{222223\cdot 444441\cdot 222220 + 222216}{222222^2}$ είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

(Θαλής 1998)

5. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$ είναι πολλαπλάσιο του 1999.

(Θαλής 1998)

6. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499} \text{ και } B = 2^{\nu} \cdot 3^{\nu+1} \quad \text{όπου ν-άρτιος φυσικός.}$$

Να συγκριθούν οι αριθμοί $3 \cdot A^{\nu}$ και B .

(Θαλής 1999)

7. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1999} \quad \text{και} \quad B = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \ldots + \frac{3994}{3996} + \frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{A+B}{2}$

(Θαλής 1999)

8. Δίνονται οι παραστάσεις $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$ και $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$. Να βρεθούν οι Α, Β και να συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}$, $\frac{22B}{A}$.

(Θαλής 2000)

9. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{2001}{2000} \quad \text{και} \quad B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό Α – Β.

(Θαλής 2000)

10. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (2^{10} : 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9 \cdot 3) + 5\cdot(2^3 + 3^2), \quad B = 5\cdot(2^3 - 1) + 8\cdot(3^3 - 20) - 8\cdot(5^2 - 15).$$

(Θαλής 2001)

11. Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%,ενώ το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του. Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

(Θαλής 2001)

12. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 2\cdot 50 - 40 : 10 + 5\cdot(100 - 4 \cdot 20)^2 - 92.$$

(Θαλής 2002)

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = 2^{41}$, $B = 8^{13}$, $\Gamma = 4^{21}$ και $\Delta = 32^8$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.

β) Να εκφράσετε το άθροισμα Α + Β + Γ + Δ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(Θαλής 2002)

14. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Α = 2415 - 4 \cdot 10^2 + 2003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2$.

(Θαλής 2003)

15. Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε το 2001 (από 1–1-2001 μέχρι 31–12-2001) κατά 20%. Στη συνέχεια το 2002 μειώθηκε κατά 10%, ενώ το 2003 αναμένεται αύξηση κατά 25%.

α) Να προσδιορίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό, της μεταβολής της τιμής του προϊόντος κατά την τριετία από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2003.

β) Αν η τιμή του προϊόντος ήταν 1,60 € την 1 -1-2001, ποια θα είναι η τιμή του την 31-12- 2003;

(Θαλής 2003)

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Α = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3$

(Θαλής 2004)

17. Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν, στις 30-10-2003, ήταν 32 δολάρια το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 δολάρια το βαρέλι.

(α) Πόσο τις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελιού σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;

(β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελιού μέχρι την 30-11-2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30- 10-2003;

(Θαλής 2004)

18. Να υπολογιστεί το 3,6% του αριθμού $Α = \dfrac{3 + \dfrac{4,2}{0,1}}{\left(\dfrac{1}{0,3} - \dfrac{7}{3}\right) \cdot 0,3125}$.

(Θαλής 2005)

19. Ο Γιώργος πήγε στο βιβλιοπωλείο έχοντας 20€. Στο μαγαζί υπάρχουν δύο είδη μολυβιών. Η εξάδα του πρώτου είδους κόστιζε 1,17€ ενώ η εξάδα του δεύτερου είδους κόστιζε 1,60€.

Πόσες εξάδες κάθε κατηγορίας πρέπει ν' αγοράσει ο Γιώργος , έτσι ώστε να πάρει τα λιγότερα ρέστα;

(Θαλής 2005)

20. Να υπολογίσετε την παράσταση: $Α = \{ 111 - [264 - (15 + \dfrac{54}{6}) \cdot |-5|] : 12 \} : 11 + 1$

(Θαλής 2006)

21. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

(Θαλής 2006)

22. Το 6% του αριθμού $α \neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$Κ = \frac{9α - 3β}{6α - β}.$$

(Θαλής 2006)

23. Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^{2} .$$

(Θαλής 2007)

24. Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

(Θαλής 2007)

25.Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες , ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

(Θαλής 2007)

26. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$.

(Θαλής 2008)

27. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5\,(4 + \alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 .$$

(Θαλής 2008)

28. Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5\alpha} .$$

(Θαλής 2009)

29.Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

(Θαλής 2009)

30. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α , του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής 2010)

31. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.

(Θαλής 2010)

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14}\right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1\right).$$

(Θαλής 2011)

33. Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης: $B = \dfrac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \dfrac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}$. [Είναι ίσως Θεωρία Αριθμών]

(Θαλής 2011)

34. Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

(Θαλής 2011)

35. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

(Θαλής 2012)

36. Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης: $B = \dfrac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}} : \dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$

(Θαλής 2012)

37. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

(Θαλής 2012)

38. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}$.

(Θαλής 2013)

39. Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν, ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

(Θαλής 2013)

40. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$.

(Θαλής 2014)

41. Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50% πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

(Θαλής 2014)

42. Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015},\frac{1007}{2019},\frac{1009}{2021},\frac{997}{2009},\frac{1011}{2023},\frac{999}{2011},\frac{1001}{2013},\frac{1005}{2017}$$

(Θαλής 2014)

43. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}\ ,\ \mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

(Θαλής 2015)

44. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος α=6 μέτρα και πλάτος β=4 μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

(Θαλής 2015)

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

45. Να χαράξετε κύκλο (Κ,3cm). Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο (Λ,3cm). Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον Κ στο Α και τον Λ στο Β, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες ΚΓ, ΛΔ κάθετες στην ΚΛ και προς το αυτό μέρος της ΚΛ.

α) Τι είδους είναι τα σχήματα ΚΛΔΓ, ΑΓΛ, ΑΔΒ, ΑΚΔΓ, ΑΓΔΒ;

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.

(Θαλής 1995)

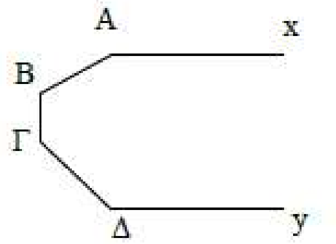
46. Στην ημιευθεία Οx, θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ ώστε (ΟΑ)=2m, (ΟΒ)=6m, (ΟΓ)=12m.
Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε τα (ΔΖ), (ΕΓ). Τι παρατηρείτε;

(Θαλής 1996)

47. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=10cm και ΓΔ=25cm και Μ τυχαίο σημείο της βάσης ΑΒ. Να βρεθεί η σχέση του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΜ με το μέρος του τραπεζίου που περισσεύει.

(Θαλής 1997)

48. Στο σχήμα είναι Αx//Δy. Να υπολογιστεί το άθροισμα των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.



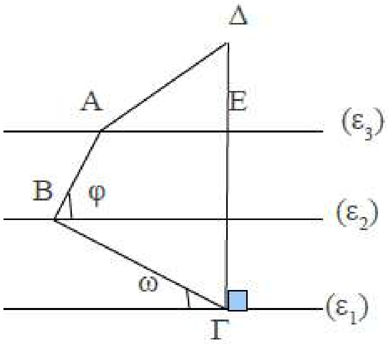
(Θαλής 1998)

49. Πάνω σε μια ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ. Έστω Μ είναι το μέσον του ΑΒ και Ν είναι το μέσον του ΒΓ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΜΝ, όταν:

α) ΑΒ = 8cm, ΒΓ = 10cm,

β) ΑΒ = 10cm, ΑΓ = 18cm.



50. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι:

i) $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)//(\varepsilon_3)$ **ii)** ΓΔ $\perp$ (ε_1)

iii) ΑΕ = ΕΔ iv) $\omega = 30^o$, $\varphi = 50^o$

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .

(Θαλής 1999)

51. Του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) δίνονται:

(α) ΑΒ = ΓΔ = 12 μέτρα **(β)** Η περίμετρός του 54 μέτρα

(γ) Το εμβαδό του Ε = 120 τ.μ.

Να βρείτε το ύψος υ του τραπεζίου .

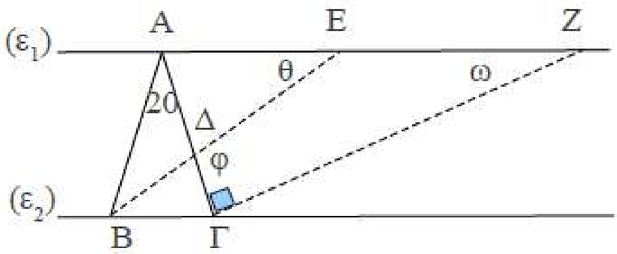
(Θαλής 2000)

52. Στο σχήμα δίνονται:

(α) (ε_1) // (ε_2)

(β) ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 20^o$

(γ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$



(δ) ΓΖ $\perp$ ΑΓ.

Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = \Gamma\hat{\Delta}E$, $\theta = A\hat{E}\Delta$ και ω.

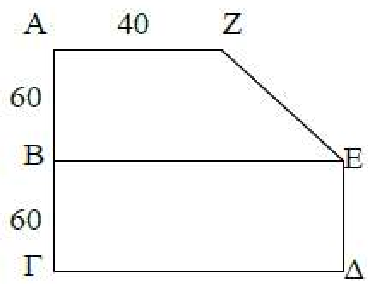
Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες ΒΕ και ΓΖ δεν είναι παράλληλες.

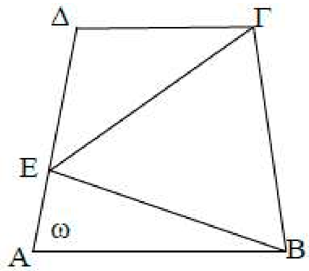
(Θαλής 2000)

53. Ο αγρός ΑΒΓΔΕΖ στο σχήμα αποτελείται από το τραπέζιο ΑΒΕΖ με $\hat{A} = 90^o$ και το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΑΒ = ΒΓ = 60m και ΑΖ = 40m. Το εμβαδό του αγρού είναι 10200 m^2.

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.

(Θαλής 2001)



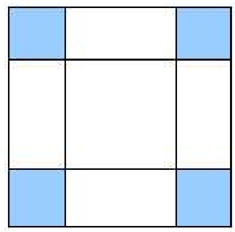


54. Στο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ ισοσκελή με ΒΑ = ΒΕ και ΓΔ = ΔΕ.

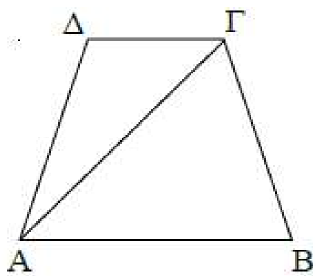
Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta = \omega$.

(Θαλής 2001)

55. Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1.
Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;



(Θαλής 2002)

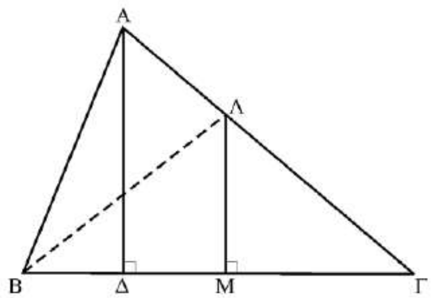


56. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) του σχήματος δίνονται $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{B}$.

(Θαλής 2003)



57. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ στο μέσον της Μ. Επιπλέον

δίνονται: ΜΓ = 5cm, $M\hat{\Lambda}\Gamma = 45^o$ $A\hat{B}\Lambda = 30^o$ και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ίσο με $35cm^2$.
Να βρείτε:

(α) Τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και του τριγώνου ΑΒΓ.

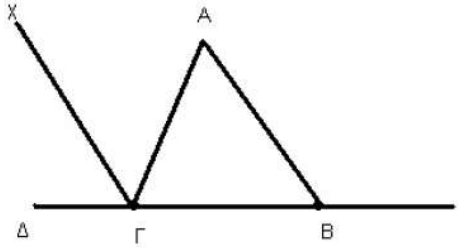
(β) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Θαλής 2004)

58. Έστω $x\hat{O}y$ μια γωνία 70^o, ΟΑ μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Οx και ΟΒ μια ημιευθεία που είναι κάθετη επί της Οy. Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}y$ και $B\hat{O}x$.

(Θαλής 2005)

59. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

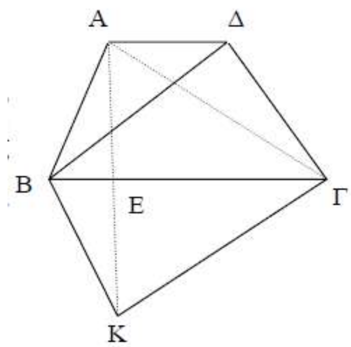


(Θαλής 2006)

60. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 300 cm^2 και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και

(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



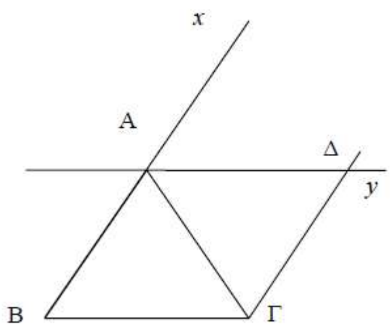
(Θαλής 2007)

61. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Αy είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$. Δίνεται ακόμη ότι: $B\hat{A}\Gamma = 62^o$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

(Θαλής 2008)



62. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $I\hat{\Delta}\Gamma = 70^o$ και $I\hat{E}\Gamma = 130^o$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $B\hat{I}\Delta$ και $E\hat{I}\Gamma$.

(Θαλής 2010)

63. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^o και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

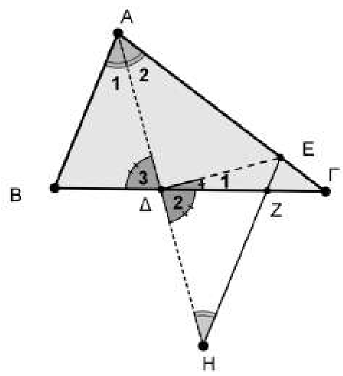
(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ .

(Θαλής 2009)

64. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ .

Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ , έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ.

Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.



α. Να αποδείξετε ότι : $A\hat{\Delta}E = 90^o$.

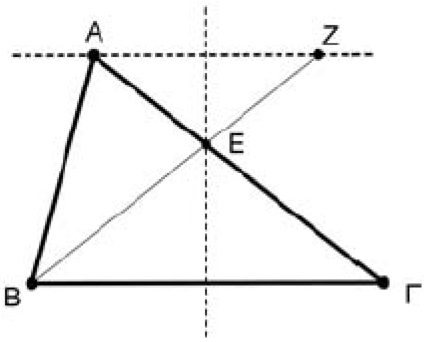
β. Να βρείτε τη γωνία $E\hat{\Delta}Z$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^o$.

(Θαλής 2011)

65. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α= 60^oκαι ΑΓ = $\frac{3}{2}$ΑΒ . Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

(Θαλής 2012)

66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Γ. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία (ε), που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



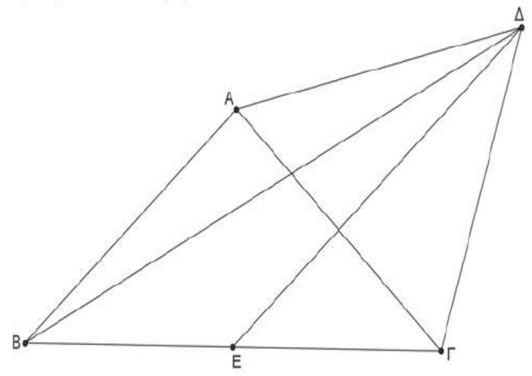
(α) $AZ = AB$, **(β)** οι γωνίες $A\hat{E}B = \hat{B}$.

(Θαλής 2013)

67. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με Α= 90^o και ΑΒ=ΑΓ . Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



(Θαλής 2014)

68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία ΒΑΓ=30^o. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

(Θαλής 2015)

Γ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

69. Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς, που το γινόμενό τους ήταν 20. Να βρεθούν οι διαφορετικοί αυτοί ακέραιοι.

(Θαλής 1996)

70. Γράφουμε συνεχόμενα τους αριθμούς από το 1990 έως το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος .

(Θαλής 1997)

71. Αν παρατάξουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σε τριάδες περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε τετράδες ή σε πεντάδες επίσης περισσεύουν 2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι είναι τριψήφιος με άθροισμα ψηφίων 5.

(Θαλής 2003)

72. Ένας τετραψήφιος αριθμός Κ έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός Κ.

(β) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός α και φυσικός αριθμός ν , τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$K = \alpha \cdot 10^{\nu}$, με $1 \leq \alpha \leq 10$.

(Θαλής 2004)

73. Για ποια ψηφία α και β διαιρείται δια του 45 ο αριθμός ,του οποίου η παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι 6α12β;

(Θαλής 2005)

74. Έστω α θετικός ακέραιος , τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

(Θαλής 2009)

75. Έστω α , β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

(Θαλής 2010)

76. Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

(Θαλής 2013)

77. Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x - 1$, x, $x + 1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Θαλής 2015)

Δ. ΜΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

78. Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών.
Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

(Θαλής 1995)

79. Ένα τετράγωνο λέγεται "μαγικό" όταν το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μια από τις δύο διαγώνιες.
Π.χ.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

εδώ έχουμε 2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = ... = 15.
Σε κάποιο μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί έσβησαν και έμειναν μόνο το 7 και το 13 όπως στο παρακάτω.

		7
13		

Να αποδειχτεί ότι απαραιτήτως σε κάποια θέση του μαγικού αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερά του.

(Θαλής 1996)

80. Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει 20 ποδοσφαιριστές, από τους οποίους ο μικρότερος είναι 18 χρονών και ο μεγαλύτερος 33. Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο ποδοσφαιριστές με την ίδια ηλικία.

(Θαλής 1997)

81. Στο σχολείο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός χορού, στον οποίο θα συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρι - κορίτσι). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ του συνολικού αριθμού των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των κοριτσιών.

Να προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στο χορό.

(Θαλής 1997)

82. Ένα δοχείο, όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

(Θαλής 1998)

83. Στις Δημοτικές εκλογές της πρώτης Κυριακής (13 Οκτωβρίου 2002) σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α, Β και Γ. Ονομάζουμε ν τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού ν και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα. Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού ν, ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού ν. Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

α) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος από την πρώτη Κυριακή, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Δ ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

(Θαλής 2002)

84. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

(Θαλής 2008)

Βιβλιογραφία :

Μπάμπης Στεργίου : Ολυμπιάδες Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου , Σαββάλας

Μπάμπης Στεργίου – Σιλουανός Μπραζιτίκος : Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Ι , Σαββάλας

Μπάμπης Στεργίου : Γεωμετρία για Διαγωνισμούς 1, Σαββάλας.

Ευχαριστίες :

Ευχαριστώ το συνάδελφο και φίλο Χρήστο Τσιφάκη για την βοήθειά του στον ηλεκτρονικό σχεδιασμό και στη δημιουργία του αρχείου των θεμάτων.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 1995- 2015

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΘΑΛΗΣ

Από τον κατάλογο των θεμάτων δίνουμε τη λύση σε ορισμένα επιλεγμένα θέματα . Ο κατάλογος με τις λύσεις θα συνεχιστεί και κάθε βοήθεια είναι ευπρόσδεκτη.
Ευχαριστώ το φίλο και εκλεκτό συνάδελφο Θανάση Μπεληγιάννη για τις λύσεις στα θέματα που ακολουθούν.

30. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α , του οποίου οι αριθμοί *x* και *y* είναι πολλαπλάσια.

(Θαλής 2010)

Λύση

(α) Είναι $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33$

και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2 = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99$.

(β) Αρκεί να βρούμε τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών x , y . Επειδή $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι είναι $A = 33$.

31. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.

(Θαλής 2010)

Λύση

(α) Επειδή θεωρούμε ότι τα $120+80=200$ ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδεντρο είναι $2600:200=13$ κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδεντρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120\cdot 13=1560$ κιλά λάδι. Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560\cdot\frac{10}{100}=156$ κιλά λάδι.

(β) Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδεντρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $\frac{150}{100}\cdot x=\frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80\cdot x+120\cdot\frac{3x}{2}=2600\Rightarrow 80\cdot x+180\cdot x=2600\Rightarrow 260\cdot x=2600\Rightarrow x=10 \text{ κιλά.}$$

Επομένως τα ελαιόδεντρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3\cdot 10}{2}=15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120\cdot 15=1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800\cdot\frac{10}{100}=180$ κιλά λάδι.

32.Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right).$$

(Θαλής 2011)

Λύση

Είναι

$$A=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)=$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0\ .$$

33. Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης: $B=\dfrac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\dfrac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}$.

(Θαλής 2011)

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο **ν** είναι πρώτος φυσικός αριθμός , συμπεραίνουμε ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι : $\nu = 2$ ή $\nu = 5$.

Για $\nu = 2$ έχουμε : $B = \dfrac{2}{2-\frac{1}{5}} : \dfrac{2-\frac{2}{2}}{9} = \dfrac{2}{\frac{9}{5}} : \dfrac{2-1}{9} = \dfrac{10}{9} : \dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9} \cdot \dfrac{9}{1} = 10$.

Για $\nu = 5$ έχουμε: $B = \dfrac{2}{5-\frac{1}{5}} : \dfrac{5-\frac{5}{2}}{9} = \dfrac{2}{\frac{24}{5}} : \dfrac{\frac{5}{2}}{9} = \dfrac{10}{24} : \dfrac{5}{18} = \dfrac{10}{24} \cdot \dfrac{18}{5} = \dfrac{180}{120} = \dfrac{3}{2}$.

34. Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

(Θαλής 2011)

Λύση

34. Επειδή οι αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 έχουμε ότι $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{9} = \frac{\gamma}{11} = \lambda$, οπότε είναι $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 9\lambda$ και $\gamma = 11\lambda$. Για τη διαφορά των α και γ έχουμε $\gamma - \alpha = 56 \Rightarrow 11\lambda - 3\lambda = 56 \Rightarrow 8\lambda = 56 \Rightarrow \lambda = 7$.

Άρα είναι $\alpha = 3 \cdot 7 = 21$, $\beta = 9 \cdot 7 = 63$ και $\gamma = 11 \cdot 7 = 77$.

47. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=10cm και ΓΔ=25cm και Μ τυχαίο σημείο της βάσης ΑΒ. Να βρεθεί η σχέση του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΜ με το μέρος του τραπεζίου που περισσεύει.

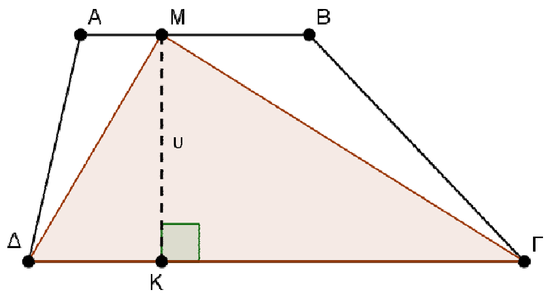
(Θαλής 1997)

Λύση

47. Έχουμε $(\Gamma M \Delta) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot \upsilon$ (1) και

$(AM\Delta) + (BM\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot \upsilon + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot \upsilon =$

$= \frac{1}{2} \cdot (AM + MB) \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \upsilon$ (2).



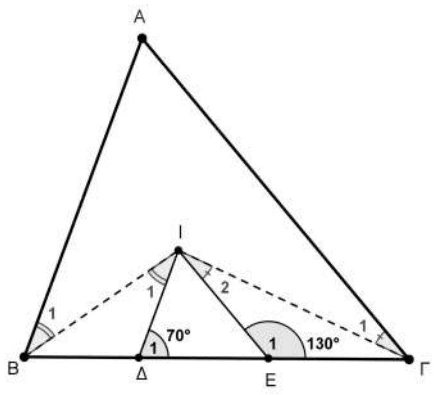
Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη κι έχουμε :

$$\frac{(\Gamma M \Delta)}{(AM\Delta) + (BM\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot \upsilon}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \upsilon} = \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} .$$

62. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $I\hat{\Delta}\Gamma = 70^o$ και $I\hat{E}\Gamma = 130^o$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $B\hat{I}\Delta$ και $E\hat{I}\Gamma$.



(Θαλής 2010)

Λύση

62. (α) Εφόσον είναι ΙΔ || ΑΒ , θα ισχύει : $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 70^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΙΔ , ΑΒ τεμνομένων από την ΔΒ. Επειδή είναι ΙΕ || ΑΓ , οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{E}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΙΕ , ΑΓ τεμνομένων από την ΕΓ. Άρα $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{E}_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ .$$

(β) Επειδή η ΙΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B}_1 = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$. Άρα επειδή ΙΔ || ΑΒ , ισχύει $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 = 35^\circ$ (ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΙΔ , ΑΒ τεμνομένων από την ΙΒ) . Επίσης αφού η ΙΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, είναι $\hat{\Gamma}_1 = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$. Άρα η $\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^\circ$ (ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΙΕ , ΑΓ τεμνομένων από την ΙΓ) .

70. Γράφουμε συνεχόμενα τους αριθμούς από το 1990 έως το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος .

(Θαλής 1997)

Λύση

Ο αριθμός Α=19901991…19961997 για να είναι πρώτος πρέπει να έχει διαιρέτες **<u>μόνο</u>** τη μονάδα και τον εαυτό του. Όμως το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι 180 , άρα σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας του 3 και του 9 , ο Α διαιρείται και με το 3 και με το 9 . Άρα ο Α δεν είναι πρώτος.

80. Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει 20 ποδοσφαιριστές, από τους οποίους ο μικρότερος είναι 18 χρονών και ο μεγαλύτερος 33. Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο ποδοσφαιριστές με την ίδια ηλικία.

(Θαλής 1997)

Λύση

Ο αριθμός των δυνατών ηλικιών από 18 ετών μέχρι και 33 ετών είναι 16 , οπότε αρκούν 16 ποδοσφαιριστές για να καλύψουν όλες τις δυνατές ηλικίες . Οπότε αφού οι ποδοσφαιριστές της ομάδας είναι 20 , θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον ποδοσφαιριστές που θα έχουν την ίδια ηλικία.

81. Στο σχολείο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός χορού, στον οποίο θα συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρι - κορίτσι). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα $\frac{8}{13}$ του συνολικού αριθμού των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των κοριτσιών.

Να προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στο χορό.

(Θαλής 1997)

Λύση

Έστω **x** το πλήθος των αγοριών και **y** το πλήθος των κοριτσιών του σχολείου. Τα αγόρια που συμμετέχουν στο χορό είναι $\frac{8}{13}x$, ενώ τα κορίτσια που χορεύουν είναι $\frac{2}{3}y$. Το πλήθος των αγοριών που χορεύουν είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που χορεύουν , οπότε :

$$\frac{8}{13}x = \frac{2}{3}y \Rightarrow 26y = 24x \Rightarrow y = \frac{12}{13}x \ .$$

Το πλήθος των παιδιών του σχολείου είναι $x + y = x + \frac{12}{13}x = \frac{25}{13}x$, ενώ το πλήθος των παιδιών που χορεύουν είναι διπλάσιο από το πλήθος των αγοριών που χορεύουν , δηλαδή είναι $\frac{16}{13}x$. Επομένως το ποσοστό των μαθητών που συμμετέχουν στο διαγωνισμό χορού

είναι $$\frac{\frac{16}{13}x}{\frac{25}{13}x} = \frac{16}{25} = 0,64 = 64\% \ .$$