

Στις Πανελλήνιες εξετάσεις των Γενικών Λυκείων 2010, μια λύση του θέματος Γ3 οδηγεί στον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx \text{ με αντικατάσταση } u = x^2 + 1 \text{ όπου η συνάρτηση } \varphi(x) = x^2 + 1 \text{ δεν είναι 1-1 στο διάστημα } [-1, 1].$$

Είναι άραγε αναγκαία συνθήκη η $\varphi(x)$ να είναι 1-1, ώστε η λύση να είναι έγκυρη;

Η ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (Μελέτη περίπτωσης)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια συνάρτηση φ είναι ορισμένη και έχει συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\varphi([\alpha, \beta])$ τότε είναι έγκυρη η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

Απόδειξη

Το $\varphi([\alpha, \beta])$ είναι κλειστό διάστημα αφού η φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δεν είναι σταθερή.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\varphi([\alpha, \beta])$ θα ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \varphi([\alpha, \beta])$ - Η F υπάρχει επειδή η f είναι συνεχής στο $\varphi([\alpha, \beta])$ -

Η συνάρτηση $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και έτσι θα έχουμε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\varphi(x))]'\varphi'(x)dx = [F(\varphi(x))]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ όπου η φ είναι ορισμένη και έχει συνεχή

παράγωγο σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η f είναι συνεχής στο $\varphi([\alpha, \beta])$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

Εφαρμογή 1 (Θέμα Πανελληνίων 2010 Γ4)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

Λύση

$$\text{Έίναι } \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1)(x^2 + 1)' dx$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 + 1$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[-1, 1]$ με $\varphi([-1, 1]) = [1, 2]$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι συνεχής στο $\varphi([-1, 1]) = [1, 2]$ με $\varphi(-1) = 2$ και $\varphi(1) = 2$

$$\text{Επομένως ισχύει ότι } \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1)(x^2 + 1)' dx = \frac{1}{2} \int_2^2 \ln(x) dx = \frac{1}{2} 0 = 0$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Αναζητούμε συνάρτηση φ με συνεχή παράγωγο σε

ένα διάστημα $[\gamma, \delta]$ τέτοια ώστε $\varphi(\gamma) = \alpha$, $\varphi(\delta) = \beta$ και f συνεχής στο $\varphi([\gamma, \delta])$, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

Η πληροφορία ότι η φ είναι γνήσια μονότονη άρα 1-1, απλουστεύει τους υπολογισμούς μας, τόσο στην εύρεση των γ, δ και του $\varphi([\gamma, \delta])$ όσο και στην περίπτωση που χρειαστεί να λύσουμε ως προς την νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης

Εφαρμογή 2

Για τον υπολογισμό του $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$.

1ος Τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \eta\mu t$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, ενώ η φ έχει συνεχή παράγωγο στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Επειδή η φ είναι γνήσια αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ το $\varphi\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $\varphi\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Επομένως

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\eta\mu^2 x} (\eta\mu x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \dots = \frac{\pi + \sqrt{3}}{12}$$

2ος Τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \eta\mu t$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = 0$ και $\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ενώ η φ έχει συνεχή παράγωγο στο $\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Ακόμα ισχύει ότι $\varphi\left(\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = [0, 1]$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $\varphi\left(\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = [0, 1]$

Επομένως

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1-\eta\mu^2 x} (\eta\mu x)' dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \dots = \frac{\pi + \sqrt{3}}{12}$$

Σχόλιο.

Η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ίδια.

Οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι στον 1ο τρόπο λύσης όπου η φ είναι γνήσια μονότονη.

Μίλτος Παπαρηγοράκης
Χανιά
Μάιος 2010

Βιβλιογραφία:

Σπινάκ Μ. 1995 Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός ΠΕΚ
Thomas G- Finley R 1995 Απειροστικός Λογισμός ΠΕΚ
Καζαντζής Θ.Ν. 1994 Ολοκληρώματα, Μαθηματική Βιβλιοθήκη
Καζαντζής Θ.Ν. 1995 1000 Ασκήσεις Ολοκληρωμάτων, Μαθηματική Βιβλιοθήκη
Περιοδικό Ευκλείδης Β ΕΜΕ
Τζιρώνης Κ. Τζουβάρης Θ. 1996 Παράγωγοι Ολοκληρώματα, Σαββάλας