

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τ Ο Μ Ο Σ Α
Β Ι Β Λ Ι Α 1, 2, 3, 4

Αρχαίο κείμενο Ε.Σ.ΣΤΑΜΑΤΗ
Υπό
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
(Αθήνα, Αύγουστος 2016)

Πρόλογος

Γνώρισα τα Στοιχεία του Ευκλείδη από το μεγαλειώδες έργο του Ευάγγελου Σταμάτη. Αναζητώντας, από τα [ήδη παλιά] πανεπιστημιακά μου χρόνια, αρχαία ελληνική βιβλιογραφία σε μαθηματικά και φιλοσοφία απορούσα για την αδιάφορη στάση της σύγχρονης Ελληνικής Πολιτείας απέναντι σε τέτοια έργα.

Ο σκοπός αυτής της έκδοσης είναι να παρουσιάσει το αρχαίο σύγγραμμα των Στοιχείων σε ηλεκτρονική μορφή με καλαισθησία και τρόπο ώστε οι αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων να χίνουν όσο το δυνατόν πιο εμφανείς και κατανοητές από τον αναχνώστη. Εξακολουθώ να πιστεύω ότι τα Στοιχεία του Ευκλείδη [έστω και στη μορφή που διασώζονται σήμερα] αποτελούν το τελειότερο επιστημονικό σύγγραμμα και ότι η μελέτη αυτών έχει να προσφέρει πολλά στον οποιονδήποτε ερευνητή.

Ανάγκες καθαρότητας και ευκρίνειας, απαιτούμενες για την έκδοση των Στοιχείων όπως την είχα φανταστεί, με οδήγησαν στη δημιουργία μιας νέας ελληνικής γραμματοσειράς που ονόμασα “Chalkis”. Για την εμφάνιση γραμμάτων σχήματος στο κείμενο χρησιμοποίησα τη γραμματοσειρά “Lato”, ενώ για τη δημιουργία σχημάτων χρησιμοποίησα την εφαρμογή “Geogebra”. Την τελική ευθύνη επεξεργασίας και παραγωγής του συγκεκριμένου “pdf” ανέλαβε το “xetex”.

Κατά τη μεταφορά των Στοιχείων σε ηλεκτρονική μορφή, εντοπίστηκαν και διορθώθηκαν κάποια λάθη που οφείλονταν κατά κύριο λόγο σε προηγούμενη μεταφορά από οπτική αναχνώριση χαρακτήρων[ocr]. Για παράδειγμα ήταν “Α” αντί για “Δ”, ήταν “ή κύκλος” αντί για “ὁ κύκλος”. Ενδέχεται ορισμένα να έχουν διαφύγει αλλά αφενός πιστεύω ότι η ταυτοποίησή τους είναι εύκολη από κάποιον που ακολουθεί μια απόδειξη και αφετέρου ότι ελάχιστα μειώνεται η κατανόησή της.

Θέλω να πιστεύω ότι με τον τρόπο αυτό, συμβάλλω κατά το ελάχιστο στη διάδοση τής μελέτης των Στοιχείων, τα οποία θεωρώ απαραίτητα για την ανάπτυξη και καλλιέργεια μιας αυστηρά μαθηματικής σκέψης.

Αθήνα, Αύγουστος 2016
Νικόλαος Κεχρής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 1

Ὅροι

- α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
- β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλάτης.
- γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
- δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
- ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
- ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
- ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
- η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
- θ'. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾗσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
- ι'. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
- ια'. Ἀμβληῖα γωνία ἐστίν ἡ μείζων ὀρθῆς.
- ιβ'. Ὄξεϊα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
- ιγ'. Ὅρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.
- ιδ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιεχόμενον.
- ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
- ισ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
- ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστίν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
- ιη'. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφέρειας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.
- ιθ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστί τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

- κ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
- κα'. Ἐτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβληϊαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
- κβ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.
- κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Α ἰ τ ῆ μ α τ α

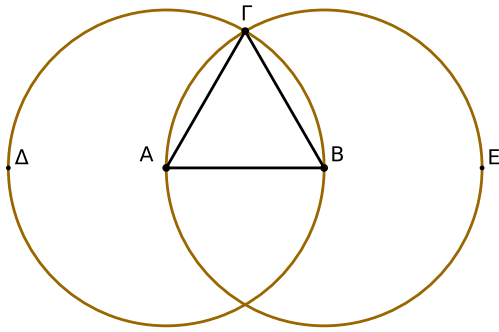
- α'. Ἡτῆσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν.
- δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κ ο ι ν α ῖ ἔ ν ν ο ι α ι

- α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
- β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
- γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.
- δ'. [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
- ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
- ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν].
- ζ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
- η'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστίν].
- θ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB . Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ $BΓΔ$, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BA κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΓΕ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΓΑ, ΓΒ$.

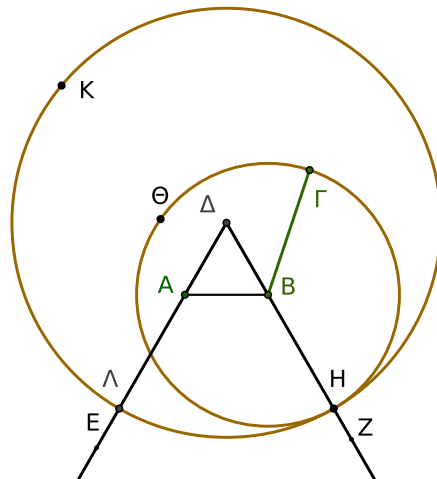
Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΒ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΒ$ · πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΑΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΒΑ$. ἔδειχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΑΒ$ ἴση· ἑκάτερα ἄρα τῶν $ΓΑ, ΓΒ$ τῇ $ΑΒ$ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $ΓΒ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς AB . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $BΓ$. δεῖ δὴ πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $BΓ$ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ΔΑΒ$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς $ΔΑ, ΔΒ$ εὐθεῖαι αἱ $ΑΕ, ΒΖ$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ $BΓ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΓΗΘ$, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ $Δ$ καὶ διαστήματι τῷ $ΔΗ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΗΚΛ$.



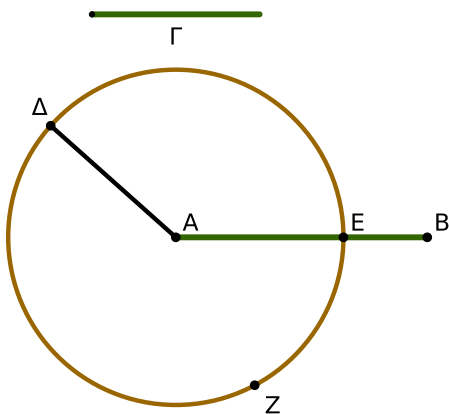
Ἐπεὶ οὖν τὸ **Β** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΗΘ**, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΗ**. πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Δ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΗΚΛ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΛ** τῇ **ΔΗ**, ὥν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΔΒ** ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΛ** λοιπῇ τῇ **ΒΗ** ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΗ** ἴση· ἐκάτερα ἄρα τῶν **ΑΛ**, **ΒΓ** τῇ **ΒΗ** ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ **ΑΛ** ἄρα τῇ **ΒΓ** ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ **Α** τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΒΓ** ἴση εὐθεῖα κέῖται ἡ **ΑΛ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

χ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ **ΑΒ**, **Γ**, ὥν μείζων ἔστω ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΒ** τῇ ἐλάσσονι τῇ **Γ** ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Κείσθω πρὸς τῷ **Α** σημείῳ τῇ **Γ** εὐθεῖα ἴση ἡ **ΑΔ**· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Α** διαστήματι δὲ τῷ **ΑΔ** κύκλος γεγράφη ὁ **ΔΕΖ**.

Καὶ ἐπεὶ τὸ **Α** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΔΕΖ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΔ**· ἀλλὰ καὶ ἡ **Γ** τῇ **ΑΔ** ἐστὶν ἴση. ἐκάτερα ἄρα τῶν **ΑΕ**, **Γ** τῇ **ΑΔ** ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΑΕ** τῇ **Γ** ἐστὶν ἴση.

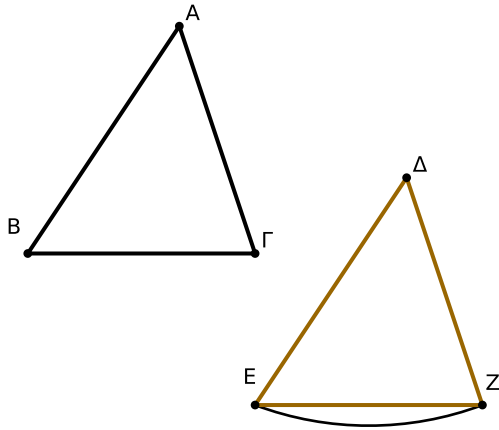
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΒ** τῇ ἐλάσσονι τῇ **Γ** ἴση ἀφήρηται ἡ **ΑΕ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκάτεραν ἐκάτερα καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκάτερα ἐκάτερα, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἐκάτεραν ἐκάτερα τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ** καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴσην.

λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρῳ, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἐπὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν **Α** σημείου ἐπὶ τὸ **Δ** σημεῖον τῆς δὲ **ΑΒ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΔΕ**, ἐφαρμόσει καὶ τὸ **Β** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ε** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς **ΑΒ** ἐπὶ τὴν **ΔΕ** ἐφαρμόσει καὶ ἡ **ΑΓ** εὐθεῖα ἐπὶ τὴν **ΔΖ** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**· ὥστε καὶ τὸ **Γ** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ζ** σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**.

ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ **Β** ἐπὶ τὸ **Ε** ἐφαρμόκει· ὥστε βάσις ἡ **ΒΓ** ἐπὶ βάσιν τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν **Β** ἐπὶ τὸ **Ε** ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ **Γ** ἐπὶ τὸ **Ζ** ἡ **ΒΓ** βάσις ἐπὶ τὴν **ΕΖ** οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

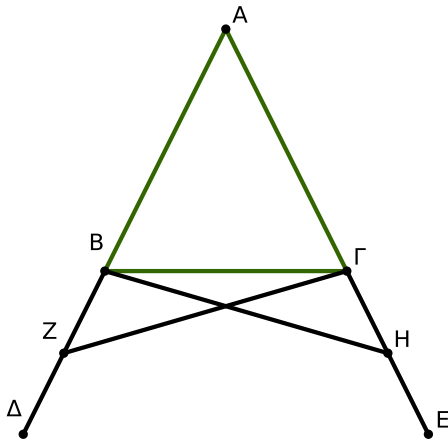
ἐφαρμόσει ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσις ἐπὶ τὴν **ΕΖ** καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκάτεραν ἑκατέρῳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρῳ, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ ἴσην ἔχον τὴν $\mathbf{AB}$ πλευρὰν τῇ $\mathbf{A\Gamma}$ πλευρᾷ, καὶ προσεκβληθῶσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A\Gamma}$ εὐθεῖαι αἱ $\mathbf{BD}$, $\mathbf{GE}$ · λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $\mathbf{\Gamma B\Delta}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma E}$.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $\mathbf{BD}$ τυχὸν σημεῖον τὸ $\mathbf{Z}$, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς $\mathbf{AE}$ τῇ ἐλάσσονι τῇ $\mathbf{AZ}$ ἴση ἡ $\mathbf{AH}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\mathbf{Z\Gamma}$, $\mathbf{HB}$ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $\mathbf{AZ}$ τῇ $\mathbf{AH}$ ἡ δὲ $\mathbf{AB}$ τῇ $\mathbf{A\Gamma}$, δύο δὴ αἱ $\mathbf{ZA}$, $\mathbf{A\Gamma}$ δυσὶ ταῖς $\mathbf{HA}$, $\mathbf{AB}$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ $\mathbf{ZAH}$ · βάσεις ἄρα ἡ $\mathbf{Z\Gamma}$ βάσει τῇ $\mathbf{HB}$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $\mathbf{AZ\Gamma}$ τρίγωνον τῷ $\mathbf{AHB}$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνί-

αις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma Z}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{ABH}$, ἡ δὲ ὑπὸ $\mathbf{AZ\Gamma}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{AHB}$. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ $\mathbf{AZ}$ ὅλη τῇ $\mathbf{AH}$ ἐστὶν ἴση, ὥν ἡ $\mathbf{AB}$ τῇ $\mathbf{A\Gamma}$ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ $\mathbf{BZ}$ λοιπῇ τῇ $\mathbf{GH}$ ἐστὶν ἴση.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $\mathbf{Z\Gamma}$ τῇ $\mathbf{HB}$ ἴση· δύο δὴ αἱ $\mathbf{BZ}$, $\mathbf{Z\Gamma}$ δυσὶ ταῖς $\mathbf{GH}$, $\mathbf{HB}$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{BZ\Gamma}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\mathbf{GHB}$ ἴση, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ $\mathbf{BG}$ · καὶ τὸ $\mathbf{BZ\Gamma}$ ἄρα τρίγωνον τῷ $\mathbf{GHB}$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·

ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $\mathbf{ZB\Gamma}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{H\Gamma B}$ ἡ δὲ ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma Z}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{\Gamma B H}$. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ $\mathbf{ABH}$ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma Z}$ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὥν ἡ ὑπὸ $\mathbf{\Gamma B H}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma Z}$ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ $\mathbf{AB\Gamma}$ τριγώνου.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\mathbf{ZB\Gamma}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{H\Gamma B}$ ἴση· καὶ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν. Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

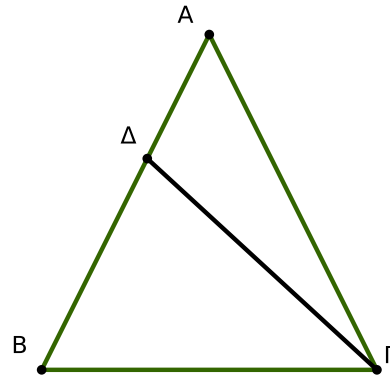
Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἦστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ $ABΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AB πλευρᾷ τῇ $ΑΓ$ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΑΓ$, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ AB , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάττω τῇ $ΑΓ$ ἴση ἡ $ΔB$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$.

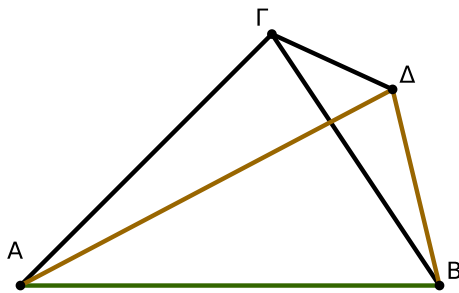
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΔB$ τῇ $ΑΓ$ κοινῇ δὲ ἡ $BΓ$, δύο δὴ αἱ $ΔB$, $BΓ$ δύο ταῖς $ΑΓ$, $ΓB$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΔBΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓB$ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ $ΔΓ$ βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΔBΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΓB$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται,

τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΑΓ$ · ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκάτερα ἑκάτερα οὐ συσταθήσονται πρὸς ἀλλήῃ καὶ ἀλλήῃ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς $ΑΓ$, $ΓB$ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΔ$, $ΔB$ ἴσαι ἑκάτερα ἑκάτερα συνεστάτῳσαν πρὸς ἀλλήῃ καὶ ἀλλήῃ σημείῳ τῷ τε $Γ$ καὶ $Δ$ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $ΓΑ$ τῇ $ΔΑ$ τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν αὐτῇ τὸ A , τὴν δὲ $ΓB$

τῇ $ΔB$ τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν αὐτῇ τὸ B , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΔ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ τῇ ὑπὸ

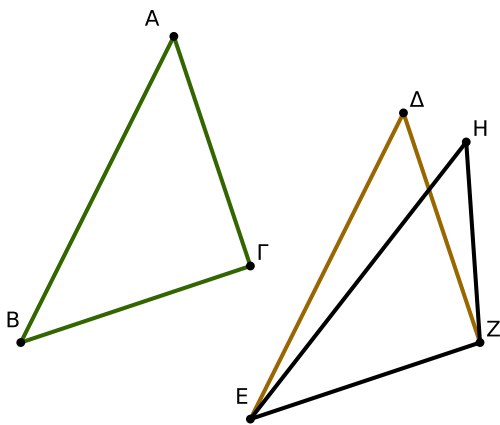
ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἢ ὑπὸ **ΑΔΓ** τῆς ὑπὸ **ΔΓΒ**· πολλῶν ἄρα ἢ ὑπὸ **ΓΔΒ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΔΓΒ**. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΒ** τῇ **ΔΒ**, ἴση ἐστὶ καὶ ᾠωνία ἢ ὑπὸ **ΓΔΒ** ᾠωνία τῇ ὑπὸ **ΔΓΒ**. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἢ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν ᾠωνίαν τῇ ᾠωνία ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**· ἐκέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ ᾠωνία ἢ ὑπὸ **ΒΑΓ** ᾠωνία τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστὶν ἴση.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἐπὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν **Β** σημείου ἐπὶ τὸ **Ε** σημεῖον τῆς δὲ **ΒΓ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει καὶ τὸ **Γ** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ζ** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**·

ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς **ΒΓ** ἐπὶ τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ **ΒΑ**, **ΓΑ** ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ**. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἢ **ΒΓ** ἐπὶ βάσιν τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει, αἱ δὲ **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευραὶ ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ** οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλήλῳουσιν ὡς αἱ

ΕΗ, **ΗΖ**, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς **ΒΓ** βάσεως ἐπὶ τὴν **ΕΖ** βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευραὶ ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ**. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ ᾠωνία ἢ ὑπὸ **ΒΑΓ** ἐπὶ ᾠωνίαν τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν ᾠωνίαν τῇ ᾠωνία ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

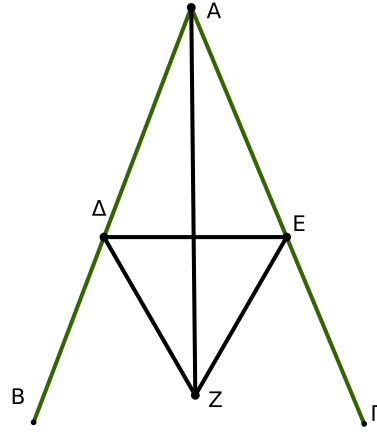
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ . δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ ἀφῆρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ , καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ . λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ , κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ , δύο δὲ αἱ ΔΑ , ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ , ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

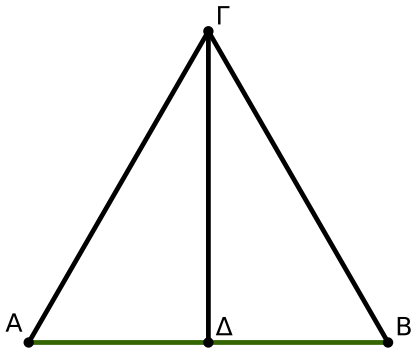
Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ . δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



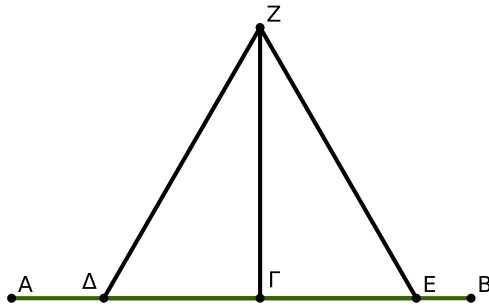
Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ , καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ , κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ , δύο δὲ αἱ ΑΓ , ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ , ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ . δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κείσθω τῇ $\Gamma\Delta$ ἴση ἡ $\GammaΕ$, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς $\DeltaΕ$ τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ $\DeltaΕΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Delta\Gamma$. λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ $\Delta\Gamma$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ $\GammaΕ$, κοινὴ δὲ ἡ $\GammaΖ$, δύο δὴ αἱ $\Delta\Gamma$, $\GammaΖ$ δυσὶ

ταῖς $ΕΓ$, $\GammaΖ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ $\DeltaΖ$ βάσει τῇ $ΖΕ$ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\GammaΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΓΖ$ ἴση ἐστίν· καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ $\Delta\GammaΖ$, $\GammaΕΖ$.

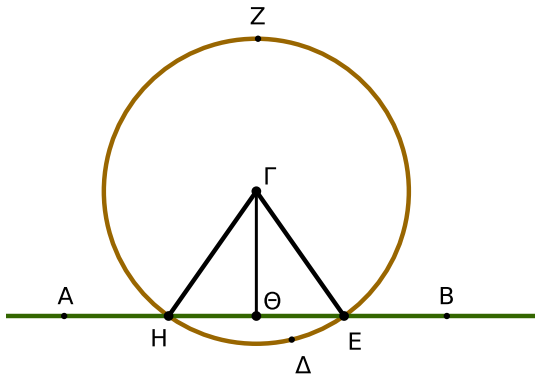
Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ $\GammaΖ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ . δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ $\Gamma\Delta$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΕΖΗ$, καὶ τετμήσθω ἡ $ΕΗ$ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\GammaΗ$, $\Gamma\Theta$, $\GammaΕ$ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἥκται ἡ $\Gamma\Theta$.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ , κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ , δύο δὲ αἱ ΗΘ , ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ , ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρω· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσιν ἐφεξῆς.

ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐ-

θεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν ἀπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἤκται ἡ ΓΘ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

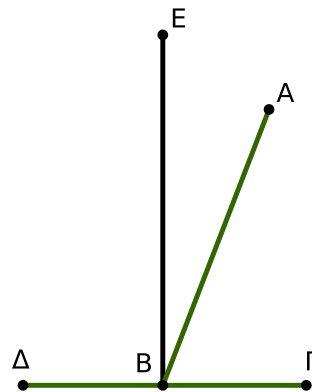
ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθείαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΔ · λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΔ γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ , δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ · αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ , ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ · αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ , ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΕ , ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν.

πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ , ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ · αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ , ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ , ΕΒΑ , ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν.



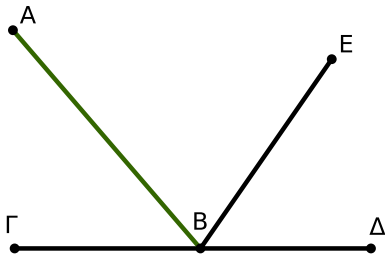
ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{ΒΕ}$, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοισ ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{ΒΕ}$, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ $\Delta\text{ΒΑ}$, ΑΒΓ ἴσαι εἰσὶν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{ΒΕ}$, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ $\Delta\text{ΒΑ}$, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλοισ αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ , ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ , ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ .



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἢ ΒΔ , ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ , ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν·

εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ , ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ , ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶν.

κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐ-

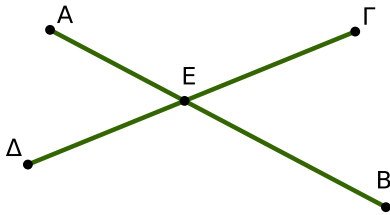
στιν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ .

Ἐὰν ἄρα πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλοισ αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΕ'.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $ΓΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΒ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΕΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ $ΑΕ$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $ΓΔ$ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$, αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $ΑΒ$ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$, αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

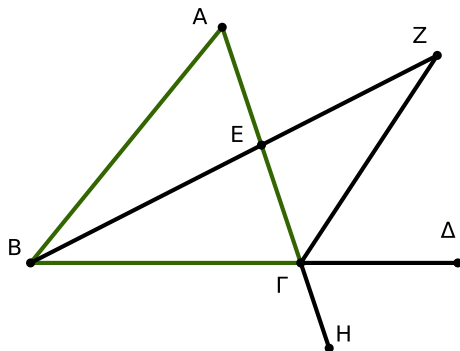
ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΕΑ$ λοιπὴ τῇ ὑπὸ $ΒΕΔ$ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΕΒ$, $ΔΕΑ$ ἴσαι εἰσίν.

Ἐάν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΣ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ $ΑΒΓ$, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ τὸ $Δ$ · λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΒΑΓ$ γωνιῶν.



Τετμήσθω ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $ΒΕ$ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ $ΒΕ$ ἴση ἡ $ΕΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ZΓ$, καὶ διήχθω ἡ $ΑΓ$ ἐπὶ τὸ H .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΕΓ$, ἡ δὲ $ΒΕ$ τῇ $ΕΖ$, δύο δὲ αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ δυσὶ ταῖς $ΓΕ$, $ΕΖ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΕΓ$ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν

γάρ· βάσις ἄρα ἡ $ΑΒ$ βάσει τῇ $ZΓ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ $ΖΕΓ$

τριγώνω ἔστιν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΕΓΖ**. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΕΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΕΓΖ**· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΕ**.

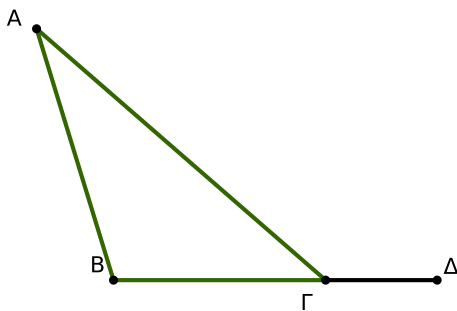
Ὅμοιως δὴ τῆς **ΒΓ** τετμημένης δίχα δευχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΗ**, τουτέστιν ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ**, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ **ΑΒΓ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**· λέγω, ὅτι τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΒΓ** ἐπὶ τὸ **Δ**. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΒΓ** ἐκτὸς ἔστι γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ**, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ **ΑΒΓ**. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** μείζονες εἰσιν.

ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ **ΓΑΒ**, **ΑΒΓ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

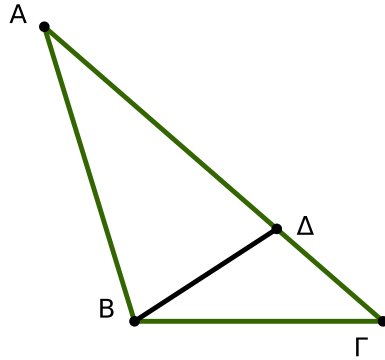
Παντός τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ μείζονα ἔχον τὴν $\mathbf{A\Gamma}$ πλευρὰν τῆς $\mathbf{AB}$ · λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma A}$.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$, κείσθω τῇ $\mathbf{AB}$ ἴση ἡ $\mathbf{A\Delta}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\mathbf{B\Delta}$. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\mathbf{B\Gamma\Delta}$ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{A\Delta B}$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ $\mathbf{\Delta\Gamma B}$.

Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ $\mathbf{A\Delta B}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{AB\Delta}$, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $\mathbf{AB}$ τῇ $\mathbf{A\Delta}$ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Delta}$ τῆς ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$.

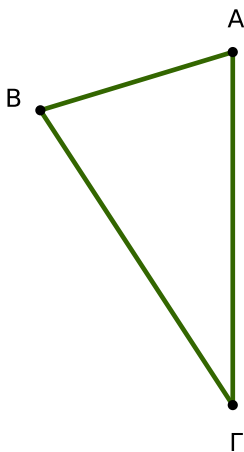
Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιθ'.

Παντός τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ γωνίαν τῆς ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma A}$ · λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ πλευρᾶς τῆς $\mathbf{AB}$ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῇ $\mathbf{AB}$ ἢ ἐλάσσων.

Ἰση μὲν οὖν οὐκ ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῇ $\mathbf{AB}$ · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$ · οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῇ $\mathbf{AB}$.

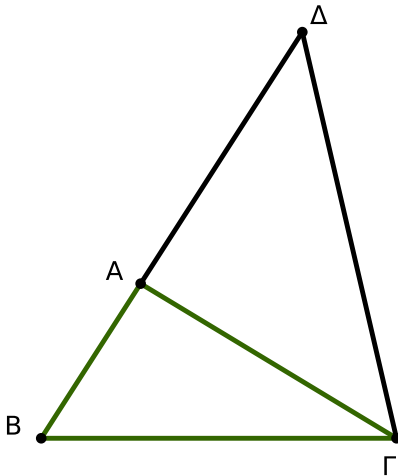
οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$ · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ τῆς ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma B}$ · οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Παντός τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ · λέγω, ὅτι τοῦ $\mathbf{AB\Gamma}$ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{B\Gamma}$, αἱ δὲ $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B\Gamma}$ τῆς $\mathbf{A\Gamma}$, αἱ δὲ $\mathbf{B\Gamma}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$.



Διήχθω γὰρ ἡ $\mathbf{BA}$ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ $\mathbf{A\Gamma}$ ἴση ἡ $\mathbf{A\Delta}$, καὶ ἐπέζεύχθω ἡ $\mathbf{B\Delta}$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{A\Delta}$ τῇ $\mathbf{A\Gamma}$, ἴση ἐστὶ καὶ ᾠνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{A\Delta\Gamma}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{A\Gamma\Delta}$ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma\Delta}$ τῆς ὑπὸ $\mathbf{A\Delta\Gamma}$.

καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ $\mathbf{B\Delta\Gamma}$ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ $\mathbf{B\Gamma\Delta}$ ᾠνίαν τῆς ὑπὸ $\mathbf{B\Delta\Gamma}$, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα ᾠνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ $\mathbf{B\Delta}$ ἄρα τῆς $\mathbf{B\Gamma}$ ἐστὶ μείζων.

ἴση δὲ ἡ $\mathbf{A\Delta}$ τῇ $\mathbf{A\Gamma}$ · μείζονες ἄρα αἱ $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{B\Gamma}$ · ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B\Gamma}$ τῆς $\mathbf{A\Gamma}$ μείζονες εἰσιν, αἱ δὲ $\mathbf{B\Gamma}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῆς $\mathbf{AB}$.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ ᾠνίαν περιέξουσιν.

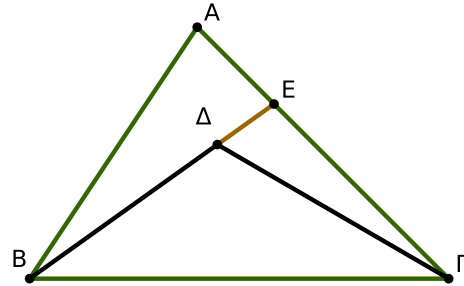
Τριγώνου γὰρ τοῦ $\mathbf{AB\Gamma}$ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς $\mathbf{B\Gamma}$ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ $\mathbf{B\Delta}$, $\mathbf{A\Gamma}$ · λέγω, ὅτι αἱ $\mathbf{B\Delta}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A\Gamma}$ ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ ᾠνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ $\mathbf{B\Delta\Gamma}$ τῆς ὑπὸ $\mathbf{BA\Gamma}$.

Διήχθω γὰρ ἡ $\mathbf{B\Delta}$ ἐπὶ τὸ $\mathbf{E}$. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, τοῦ $\mathbf{ABE}$ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AE}$ τῆς $\mathbf{BE}$ μείζονες εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ $\mathbf{E\Gamma}$ · αἱ ἄρα $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A\Gamma}$ τῶν $\mathbf{BE}$, $\mathbf{E\Gamma}$ μείζονες εἰσιν.

πάλιν, ἐπεὶ τοῦ $\mathbf{ΓE\Delta}$ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ $\mathbf{ΓE}$, $\mathbf{E\Delta}$ τῆς $\mathbf{Γ\Delta}$ μείζονες

εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ $\Delta\mathbf{B}$ · αἱ $\Gamma\mathbf{E}$, $\mathbf{EB}$ ἄρα τῶν $\Gamma\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{B}$ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν $\mathbf{BE}$, $\mathbf{E}\mathbf{\Gamma}$ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}$ · πολλῶν ἄρα αἱ $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}$ τῶν $\mathbf{BD}$, $\Delta\mathbf{\Gamma}$ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ $\Gamma\mathbf{A}\mathbf{E}$ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{BD}\mathbf{\Gamma}$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\Gamma\mathbf{E}\mathbf{A}$. διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ $\mathbf{ABE}$ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $\Gamma\mathbf{EB}$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\mathbf{BA}\mathbf{\Gamma}$. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ $\Gamma\mathbf{EB}$ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ $\mathbf{BD}\mathbf{\Gamma}$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ $\mathbf{BD}\mathbf{\Gamma}$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\mathbf{BA}\mathbf{\Gamma}$.

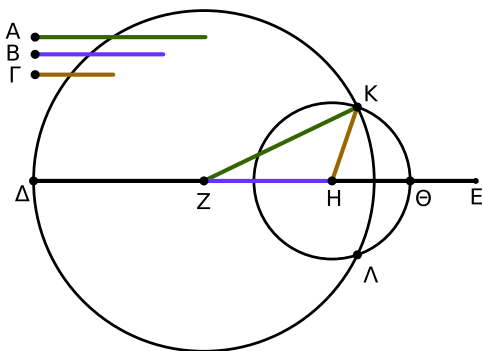


Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττωτες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ τῆς $\mathbf{\Gamma}$, αἱ δὲ $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Gamma}$ τῆς $\mathbf{B}$, καὶ ἔτι αἱ $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ τῆς $\mathbf{A}$ · δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ τρίγωνον συστήσασθαι.



Ἐκκείσθω τὶς εὐθεῖα ἡ $\Delta\mathbf{E}$ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἀπείρος δὲ κατὰ τὸ $\mathbf{E}$, καὶ κείσθω τῇ μὲν $\mathbf{A}$ ἴση ἡ $\Delta\mathbf{Z}$, τῇ δὲ $\mathbf{B}$ ἴση ἡ $\mathbf{ZH}$, τῇ δὲ $\mathbf{\Gamma}$ ἴση ἡ $\mathbf{H}\mathbf{\Theta}$ · καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $\mathbf{Z}$, διαστήματι δὲ τῷ $\mathbf{Z}\mathbf{\Delta}$ κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta\mathbf{K}\mathbf{\Lambda}$ ·

πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ $\mathbf{H}$, διαστήματι δὲ τῷ $\mathbf{H}\mathbf{\Theta}$ κύκλος γεγράφθω ὁ $\mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Theta}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\mathbf{KZ}$, $\mathbf{KH}$ · λήξω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ τρίγωνον συνέσταται τὸ $\mathbf{KZH}$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\mathbf{Z}$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta\mathbf{K}\mathbf{\Lambda}$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{Z}\mathbf{\Delta}$

τῇ ZK : ἀλλὰ ἡ $ZΔ$ τῇ A ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΛΚΘ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $HΘ$ τῇ HK : ἀλλὰ ἡ $HΘ$ τῇ $Γ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KH ἄρα τῇ $Γ$ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZH τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ KZ , ZH , HK τρισὶ ταῖς A , B , $Γ$ ἴσαι εἰσὶν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν KZ , ZH , HK , αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A , B , $Γ$, τρίγωνον συνέσταται τὸ KZH : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ'.

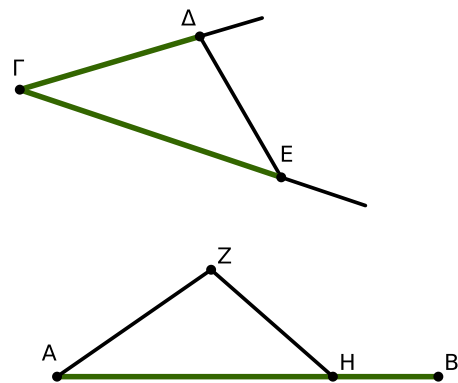
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $ΔΓΕ$: δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $ΓΔ$, $ΓΕ$ τυχόντα σημεῖα τὰ $Δ$, $Ε$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΕ$: καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΓΕ$, τρίγωνον συνεστάτω τὸ AZH , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $ΓΔ$ τῇ AZ , τὴν δὲ $ΓΕ$ τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν $ΔΕ$ τῇ ZH .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $ΔΓ$, $ΓΕ$ δύο ταῖς ZA , AH ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ $ΔΕ$ βάσει τῇ ZH ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΓΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZAΗ$ ἐστὶν ἴση.

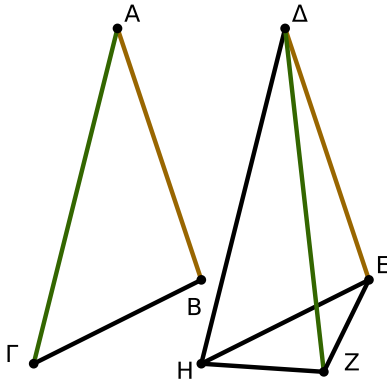
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ $ZAΗ$: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ , ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ , ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ , ἡ δὲ πρὸς τῷ A γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω ἡλέχω, ὅτι καὶ βάσις ἡ BΓ βάσεως τῆς EZ μείζων ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ BAΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ , καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ , ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΗ , ΖΗ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔΕ , ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ , δύο δὴ αἱ BA , ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ , ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ BΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση.

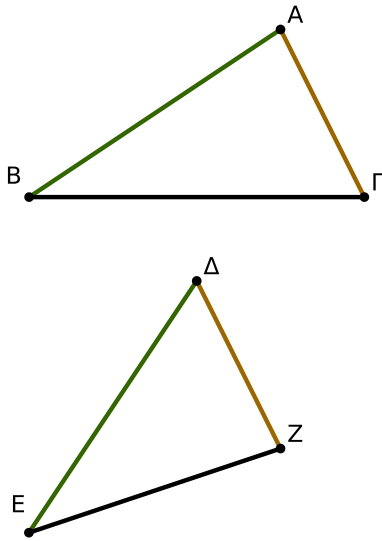
πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ · πολλῶν ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ . καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ , ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ . ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ BΓ · μείζων ἄρα καὶ ἡ BΓ τῆς ΕΖ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ , ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ , ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔΕ , τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ · βάσις δὲ ἡ BΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω ἡλέχω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἡ ἐλάσσων·

ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ**· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**·

οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσεως τῆς **ΕΖ**· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**.

ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**.

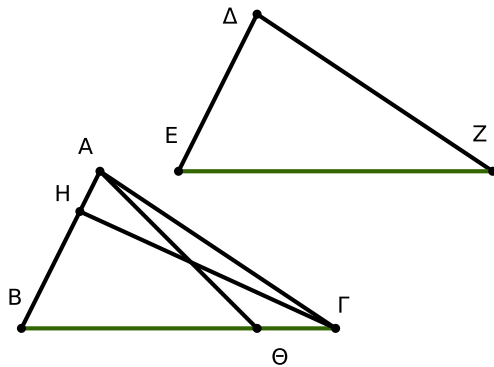
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκάτεραν ἐκάτερα, τὴν δὲ βασὶν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκάτερα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει [ἐκατέραν ἐκάτερα] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΔΕΖ**, **ΕΖΔ** ἴσας ἔχοντα ἐκατέραν ἐκάτερα, τὴν μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΕΖΔ**· ἐκέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**· λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἐκατέραν ἐκάτερα, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ **ΑΒ**, καὶ κείσθω τῇ **ΔΕ** ἴση ἡ **ΒΗ**, καὶ ἐπέζεύχθω ἡ **ΗΓ**.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BH τῇ ΔE , ἡ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ , δύο δὴ αἱ BH , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HBG γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ $H\Gamma$ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ HBG τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ HGB γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE . ἀλλὰ ἡ

ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ BGA ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BGH ἄρα τῇ ὑπὸ BGA ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE . ἴση ἄρα.

ἔστι δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ ἴση· δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστίν ἴση· βάσις ἄρα ἡ AG βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ AB τῇ ΔE · λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν AG τῇ ΔZ , ἡ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ $B\Gamma$, καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ BO , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AO . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BO τῇ EZ ἡ δὲ AB τῇ ΔE , δύο δὴ αἱ AB , BO δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ AO βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABO τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἃς αἱ ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BOA γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $E\Delta Z$ τῇ ὑπὸ BGA ἐστίν ἴση· τριγώνου δὲ τοῦ ABO ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ BOA ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ BGA · ὅπερ ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ · ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση. δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δύο ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ AG βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση.

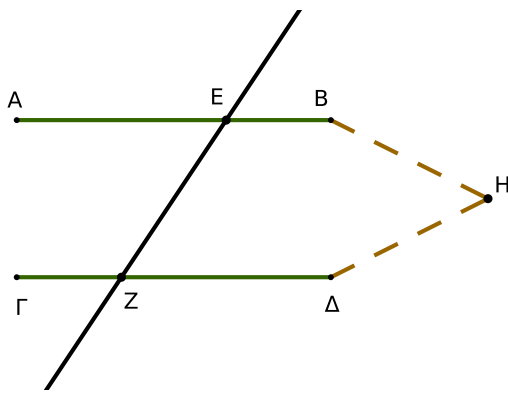
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $ΓΔ$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ , $EZΔ$ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$.



Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB , $ΓΔ$ συμπεσοῦνται ἥτοι ἐπὶ τὰ B , $Δ$ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ A , $Γ$. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B , $Δ$ μέρη κατὰ τὸ H .

τριγώνου δὲ τοῦ HEZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB , $ΔΓ$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ B , $Δ$ μέρη.

ὁμοίως δὲ δευχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ A , $Γ$ αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσιν παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΓΔ$.

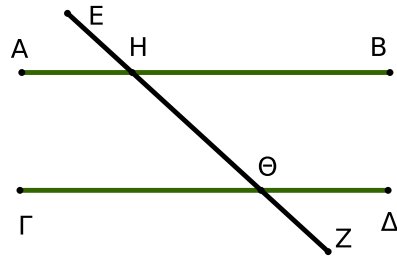
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $ΓΔ$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $HOΔ$ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHO , $HOΔ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΗΘ** ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλὰξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.



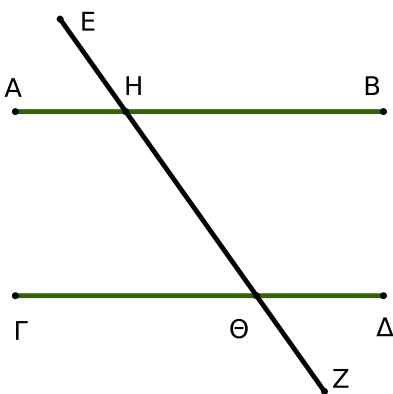
Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** ταῖς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλὰξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀληθῆναι ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπίπτει ἡ **ΕΖ**· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν.

ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ**· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** τῶν ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** μείζονες εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΓΔ** ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ

συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι·

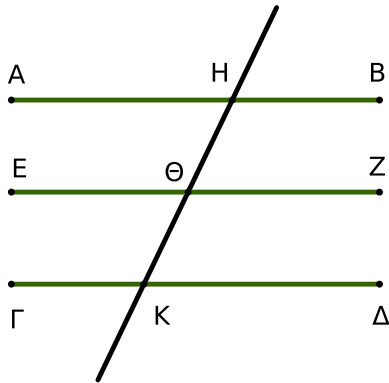
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΕΗΒ** ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστὶν ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΒ**, **ΒΗΘ** ταῖς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΕΗΒ**, **ΒΗΘ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ῥ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τῇ **ΕΖ** παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ** ἐστὶ παράλληλος.



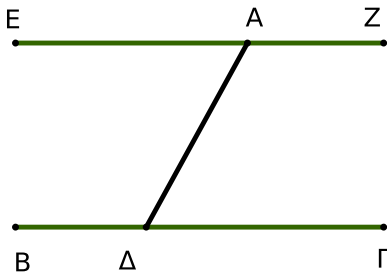
Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ **ΗΚ**. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΕΖ** εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ **ΗΚ**, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΖ**. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΕΖ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ **ΗΚ**, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΘΖ** τῇ ὑπὸ **ΗΚΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΖ** ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΚΔ** ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλὰξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $BΓ$. δεῖ δὴ διὰ τοῦ A σημείου τῇ $BΓ$ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



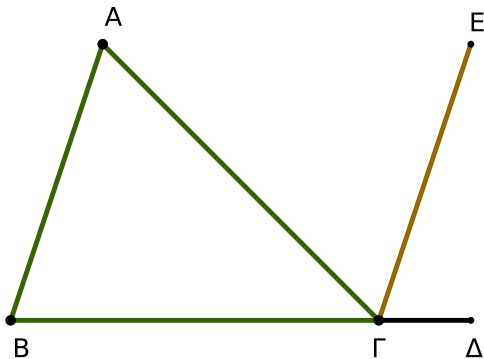
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $BΓ$ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AD καὶ συνεχστάτω πρὸς τῇ DA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ADΓ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ DAE καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ EA εὐθεῖα ἡ AZ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $BΓ$, EZ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ AD τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ EAD , $ADΓ$ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EAZ τῇ $BΓ$. Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ A τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $BΓ$ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ EAZ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ἡβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ $BΓ$ ἐπὶ τὸ Δ . λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ $ΓAB$, $ABΓ$, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $BΓA$, $ΓAB$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ $Γ$ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ παράλληλος ἡ $ΓΕ$. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΕ$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ $ΑΓ$, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $BAΓ$, $ΑΓΕ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΕ$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ $BΔ$, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $ΕΓΔ$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $ABΓ$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ὑπὸ $BAΓ$ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$

γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΒΓ**.

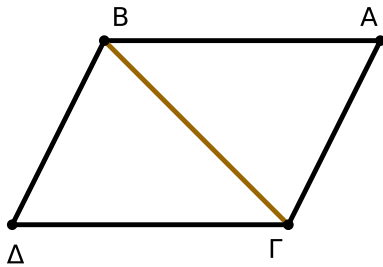
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** τρισὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ**, **ΓΑΒ** ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΓΒ**, **ΓΒΑ**, **ΓΑΒ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἢ γ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευχνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, καὶ ἐπιζευχνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**· λέγω, ὅτι καὶ αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΓ**. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ **ΒΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ** κοινὴ δὲ ἡ **ΒΓ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δύο ταῖς **ΒΓ**, **ΓΔ** ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση· βάσεις ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΒΔ** ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΒΓΔ** τριγώνῳ ἴ-

σον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΒΔ**.

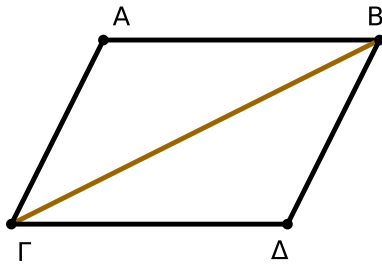
καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς **ΑΓ**, **ΒΔ** εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ **ΒΓ** τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευχνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡδ'.

Τῶν παραλληλοχράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἐστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ . λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλοχράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεΐα ἡ ΒΓ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ , ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ , ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ , ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ , ΒΓΔ ὁμοίας ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ , ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑ-

κατέρω καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει ἑκατέρω ἑκατέρω καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ , ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ , καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ .

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ , ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ , ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλοχράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

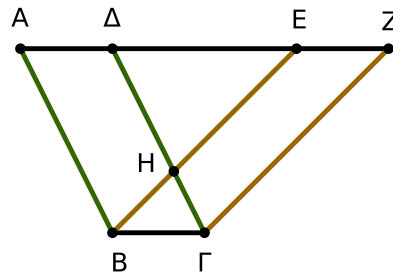
Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ , κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ , δύο δὲ αἱ ΑΒ , ΒΓ ὁμοίας ταῖς ΓΔ , ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρω καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΒΓΔ**, **ΕΒΓΖ** ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΖ**, **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τῷ **ΕΒΓΖ** παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ**, ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΒΓ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΒΓ** ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΕΖ** ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ **ΔΕ**· ὅλη ἄρα ἡ **ΑΕ** ὅλη τῇ **ΔΖ** ἐστὶν ἴση.



ἐστὶ δὲ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΓ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΕΑ**, **ΑΒ** δύο ταῖς **ΖΔ**, **ΔΓ** ἴσαι

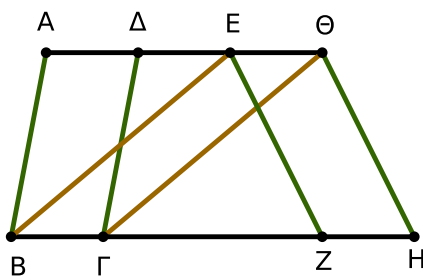
εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΖΔΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΑΒ** ἐστὶν ἴση ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσεις ἄρα ἡ **ΕΒ** βάσει τῇ **ΖΓ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΕΑΒ** τρίγωνον τῷ **ΔΖΓ** τριγώνῳ ἴσον ἐσται· κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ **ΔΗΕ**.

λοιπὸν ἄρα τὸ **ΑΒΗΔ** τραπέζιον λοιπῷ τῷ **ΕΗΓΖ** τραπέζιῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΗΒΓ** τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ **ΕΒΓΖ** παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν **ΒΓ**, **ΖΗ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΘ**, **ΒΗ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΖΗΘ**.



Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΓΘ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΖΗ**, ἀλλὰ ἡ **ΖΗ** τῇ **ΕΘ** ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ **ΒΓ** ἄρα τῇ **ΕΘ** ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ **ΕΒ**, **ΘΓ**. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι [καὶ αἱ **ΕΒ**, **ΘΓ** ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι].

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΒΓΘ**. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ **ΑΒΓΔ**· βάσιν

τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν **ΒΓ**, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς **ΒΓ**, **ΑΘ**.

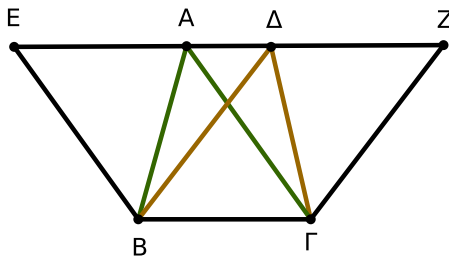
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΕΖΗΘ** τῷ αὐτῷ τῷ **ΕΒΓΘ** ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΖΗΘ** ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡζ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΒΓ** ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΔ**, **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΒΓ** τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω ἡ **ΑΔ** ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ **Ε**, **Ζ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Β** τῇ **ΓΑ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΒΕ**, διὰ δὲ τοῦ **Γ** τῇ **ΒΔ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΓΖ**. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν **ΕΒΓΑ**, **ΔΒΓΖ**· καὶ εἰσιν ἴσα·

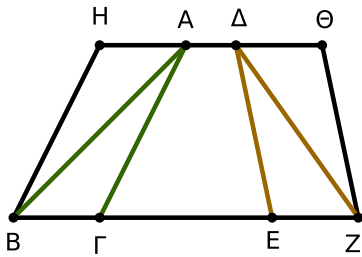
ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΓ**, **ΕΖ**· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν **ΕΒΓΑ** παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον· ἡ γὰρ **ΑΒ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ **ΔΒΓΖ** παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ **ΔΒΓ** τρίγωνον· ἡ γὰρ **ΔΓ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΒΓ** τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡη'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΖ**, **ΑΔ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $ΑΔ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ $Η, Θ$, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Β$ τῇ $ΓΑ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΒΗ$, διὰ δὲ τοῦ $Ζ$ τῇ $ΔΕ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΖΘ$.

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $ΗΒΓΑ$, $ΔΕΖΘ$ · καὶ ἴσον τὸ $ΗΒΓΑ$ τῷ $ΔΕΖΘ$ · ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΖ$, $ΗΘ$.

καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $ΗΒΓΑ$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον. ἡ γὰρ $ΑΒ$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ $ΔΕΖΘ$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $ΖΕΔ$ τρίγωνον· ἡ γὰρ $ΔΖ$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

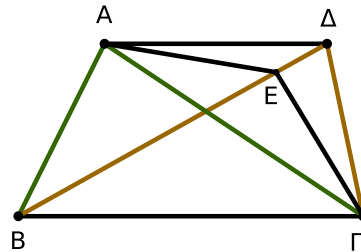
ληθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΒΓ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς $ΒΓ$ · λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΓ$.

Εἰ γὰρ μή, ἦχθω διὰ τοῦ $Α$ σημείου τῇ $ΒΓ$ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ $ΑΕ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΕΓ$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΕΒΓ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ $ΑΒΓ$ τῷ $ΔΒΓ$ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ $ΔΒΓ$ ἄρα τῷ $ΕΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ



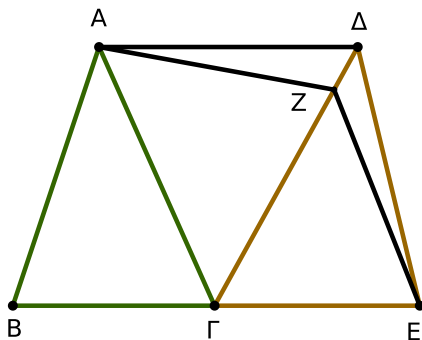
μείζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΒΓ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $ΑΔ$ · ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῇ $ΒΓ$ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $\mathbf{AB\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma\Delta\epsilon}$ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $\mathbf{B\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma\epsilon}$ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $\mathbf{A\Delta}$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $\mathbf{A\Delta}$ τῇ $\mathbf{BE}$.

Εἰ γὰρ μή, ἦχθω διὰ τοῦ $\mathbf{A}$ τῇ $\mathbf{BE}$ παράλληλος ἡ $\mathbf{AZ}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\mathbf{ZE}$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ τρίγωνον τῷ $\mathbf{Z\Gamma\epsilon}$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $\mathbf{B\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma\epsilon}$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $\mathbf{BE}$, $\mathbf{AZ}$.

ἀλλὰ τὸ $\mathbf{AB\Gamma}$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $\mathbf{\Delta\Gamma\epsilon}$ [τρίγωνῳ]· καὶ τὸ $\mathbf{\Delta\Gamma\epsilon}$ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ $\mathbf{Z\Gamma\epsilon}$ τριγώνῳ τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ $\mathbf{AZ}$ τῇ $\mathbf{BE}$.

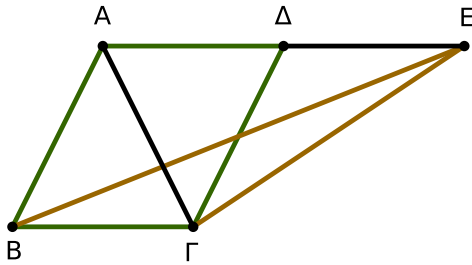
ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $\mathbf{A\Delta}$ · ἡ $\mathbf{A\Delta}$ ἄρα τῇ $\mathbf{BE}$ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ τριγώνῳ τῷ $\mathbf{EB\Gamma}$ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν $\mathbf{B\Gamma}$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς $\mathbf{B\Gamma}$, $\mathbf{AE}$ · λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ παραλληλόγραμμον τοῦ $\mathbf{BE\Gamma}$ τριγώνου.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ.

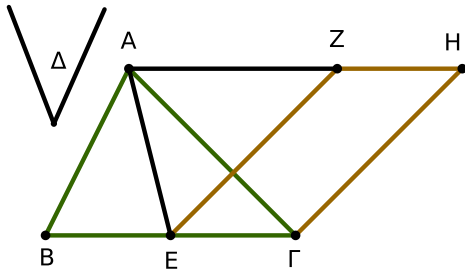
ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου.

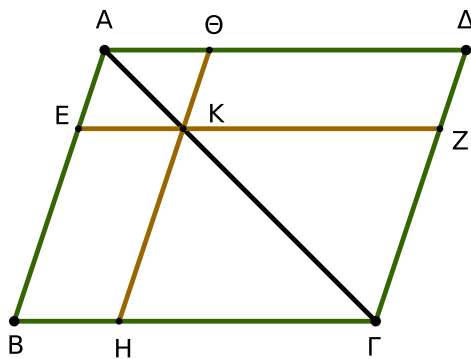
ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ'.

Παντὸς παραλληλοχράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλοχράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $ΑΓ$, περὶ δὲ τὴν $ΑΓ$ παραλληλόγραμμοι μὲν ἔστω τὰ $ΕΘ$, $ΖΗ$, τὰ δὲ λεχόμενα παραπληρώματα τὰ $ΒΚ$, $ΚΔ$ · λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΒΚ$ παραπλήρωμα τῷ $ΚΔ$ παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $ΑΓ$, ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΓΔ$ τριγώνῳ.

πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ $ΕΘ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ $ΑΚ$, ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΕΚ$ τρίγωνον τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΚΖΓ$ τρίγωνον τῷ $ΚΗΓ$ ἐστὶν ἴσον.

ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $ΑΕΚ$ τρίγωνον τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ $ΚΖΓ$ τῷ $ΚΗΓ$, τὸ $ΑΕΚ$ τρίγωνον μετὰ τοῦ $ΚΗΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ μετὰ

τοῦ $ΚΖΓ$ · ἐστὶ δὲ καὶ ὅλον τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον ὅλῳ τῷ $ΑΔΓ$ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΚ$ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ $ΚΔ$ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον.

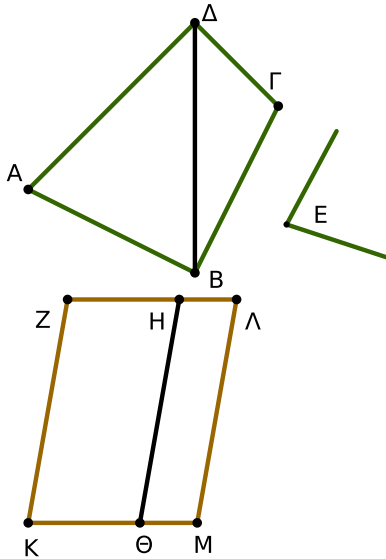
Παντὸς ἄρα παραλληλοχράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλοχράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ $Γ$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ $Δ$ · δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν $ΑΒ$ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ $Γ$ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἰσῇ τῇ $Δ$ γωνίᾳ.

τὴν $\mathbf{H\Theta}$ εὐθεΐαν τῷ $\mathbf{\Delta B\Gamma}$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $\mathbf{HM}$ ἐν τῇ ὑπὸ $\mathbf{H\Theta M}$ γωνίᾳ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ $\mathbf{E}$.



καὶ ἐπεὶ ἡ $\mathbf{E}$ γωνία ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ $\mathbf{\Theta KZ}$, $\mathbf{H\Theta M}$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $\mathbf{\Theta KZ}$ ἄρα τῇ ὑπὸ $\mathbf{H\Theta M}$ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\mathbf{K\Theta H}$.

αἱ ἄρα ὑπὸ $\mathbf{ZK\Theta}$, $\mathbf{K\Theta H}$ ταῖς ὑπὸ $\mathbf{K\Theta H}$, $\mathbf{H\Theta M}$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $\mathbf{ZK\Theta}$, $\mathbf{K\Theta H}$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ $\mathbf{K\Theta H}$, $\mathbf{H\Theta M}$ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

πρὸς δὴ τινὶ εὐθεΐᾳ τῇ $\mathbf{H\Theta}$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $\mathbf{\Theta}$ δύο εὐθεΐαι αἱ $\mathbf{K\Theta}$, $\mathbf{\Theta M}$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\mathbf{K\Theta}$ τῇ $\mathbf{\Theta M}$.

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς $\mathbf{KM}$, $\mathbf{ZH}$ εὐθεΐα ἐνέπεσεν ἡ $\mathbf{\Theta H}$, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\mathbf{M\Theta H}$, $\mathbf{\Theta HZ}$ ἴσαι ἀλλή-

λαις εἰσὶν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\mathbf{\Theta H\Lambda}$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $\mathbf{M\Theta H}$, $\mathbf{\Theta H\Lambda}$ ταῖς ὑπὸ $\mathbf{\Theta HZ}$, $\mathbf{\Theta H\Lambda}$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $\mathbf{M\Theta H}$, $\mathbf{\Theta H\Lambda}$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ $\mathbf{\Theta HZ}$, $\mathbf{\Theta H\Lambda}$ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\mathbf{ZH}$ τῇ $\mathbf{H\Lambda}$. καὶ ἐπεὶ ἡ $\mathbf{ZK}$ τῇ $\mathbf{\Theta H}$ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ $\mathbf{\Theta H}$ τῇ $\mathbf{M\Lambda}$, καὶ ἡ $\mathbf{KZ}$ ἄρα τῇ $\mathbf{M\Lambda}$ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευχνύουσιν αὐτὰς εὐθεΐαι αἱ $\mathbf{KM}$, $\mathbf{Z\Lambda}$ · καὶ αἱ $\mathbf{KM}$, $\mathbf{Z\Lambda}$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $\mathbf{KZ\Lambda M}$.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $\mathbf{AB\Delta}$ τρίγωνον τῷ $\mathbf{Z\Theta}$ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ $\mathbf{\Delta B\Gamma}$ τῷ $\mathbf{HM}$, ὅλον ἄρα τὸ $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ $\mathbf{KZ\Lambda M}$ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

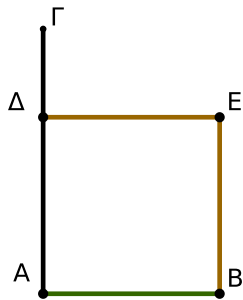
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ $\mathbf{KZ\Lambda M}$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $\mathbf{ZKM}$, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ $\mathbf{E}$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἦχθω τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ **Α** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΓ**, καὶ κείσθω τῇ **ΑΒ** ἴση ἡ **ΑΔ**· καὶ διὰ μὲν τοῦ **Δ** σημείου τῇ **ΑΒ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΔΕ**, διὰ δὲ τοῦ **Β** σημείου τῇ **ΑΔ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΒΕ**. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**·



ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, ἡ δὲ **ΑΔ** τῇ **ΒΕ**. ἀλλὰ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΔ** ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ **ΒΑ**, **ΑΔ**, **ΔΕ**, **ΕΒ** ἴσαι ἀλλήληαι εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ** παραλληλόγραμμον.

ἴλεω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΒ**, **ΔΕ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΑΔ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΔΕ** γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΔΕ**. τῶν δὲ παραλληλο-

γράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήληαι εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ **ΑΒΕ**, **ΒΕΔ** γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστὶν· καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΑΒ** εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ'.

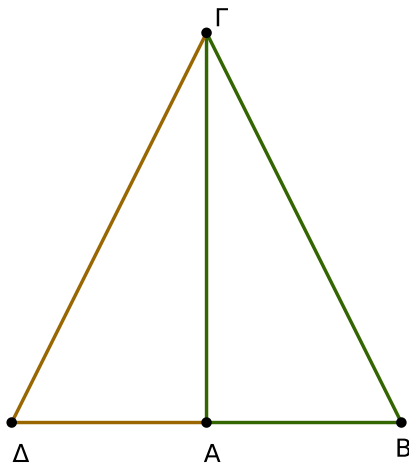
Ἐν τοῖς ὀρθογώνιοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ **ΑΒΓ** ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν· ἴλεω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τετραγώνοις.

μη'.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν.

Τριγώνου γάρ τοῦ $ABΓ$ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς $ΒΓ$ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία.



Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ $ΑΓ$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΑΔ$ καὶ κείσθω τῇ $ΒΑ$ ἴση ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΒ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΔΑ$, $ΑΓ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ τετραγώνοις.

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΔΑ$, $ΑΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$ · ὀρθὴ γάρ ἐστίν ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ · ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΔΓ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΔΓ$ τῇ $ΒΓ$ ἐστὶν ἴση·

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΒ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΑΓ$, δύο δὲ αἱ $ΔΑ$, $ΑΓ$ δύο ταῖς $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις ἡ $ΔΓ$ βάσει τῇ $ΒΓ$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΑΓ$ [ἐστίν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$ · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$.

Ἐὰν ἀρὰ τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 2

Ὅροι

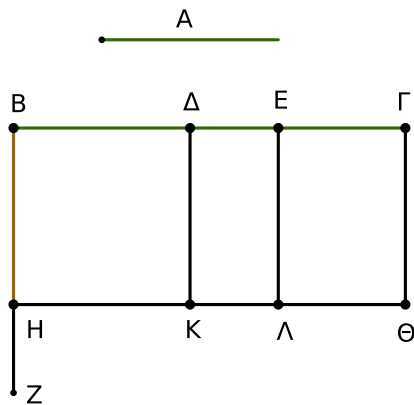
α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλοχράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλοχράμμων ἐν ὁποιοούν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνῶμων καλεῖσθω.

α'.

Ἐὰν ᾤσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσαδηποῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $A, B\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ $B\Gamma$, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν $A, B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A, \Delta E$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν $A, E\Gamma$.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ $B\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἡ BZ , καὶ κείσθω τῇ A ἴση ἡ BH , καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἦχθω ἡ $H\Theta$, διὰ δὲ τῶν Δ, E, Γ τῇ BH παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ $B\Theta$ τοῖς $BK, \Delta\Lambda, E\Theta$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $B\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $HB, B\Gamma$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A · τὸ δὲ BK τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Delta$ περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $HB, B\Delta$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A .

τὸ δὲ $\Delta\Lambda$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, \Delta E$ ἴση γὰρ ἡ ΔK , τουτέστιν ἡ BH , τῇ A .

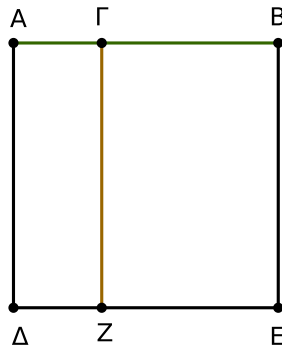
καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ $E\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, E\Gamma$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ $A, B\Delta$ καὶ τῷ ὑπὸ $A, \Delta E$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ $A, E\Gamma$.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσαδηποῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ **AB** τετμήσθω, ὥς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **AB**, **BF** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ **BA**, **AF** περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **AB** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **AB** τετραγώνον τὸ **ΑΔΕΒ**, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ **Γ** ὁποτέρου τῶν **AD**, **BE** παράλληλος ἡ **ΓΖ**.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ **AE** τοῖς **AZ**, **ΓΕ**. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν **AE** τὸ ἀπὸ τῆς **AB** τετραγώνον, τὸ δὲ **AZ** τὸ ὑπὸ τῶν **BA**, **AF** περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **DA**, **AF**, ἴση δὲ ἡ **AD** τῇ **AB**· τὸ δὲ **ΓΕ** τὸ ὑπὸ τῶν **AB**, **BF**· ἴση γὰρ ἡ **BE** τῇ **AB**. τὸ

ἄρα ὑπὸ τῶν **BA**, **AF** μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν **AB**, **BF** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **AB** τετραγώνῳ.

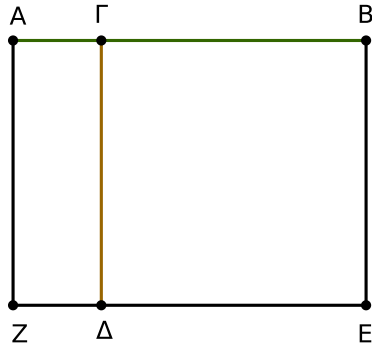
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ **AB** τετμήσθω, ὥς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **AB**, **BF** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν **AF**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **BF** τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον τὸ **ΓΔΕΒ**, καὶ διήχθω ἡ **ΕΔ** ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΓΔ**, **ΒΕ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΑΖ**.



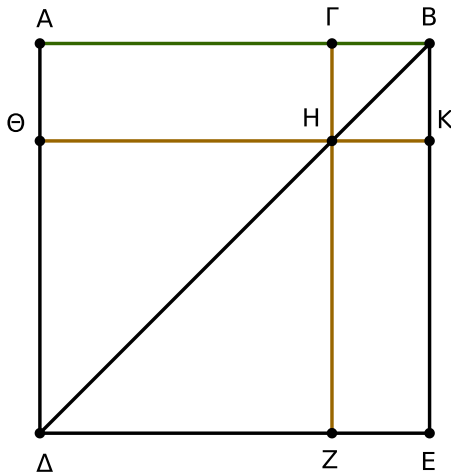
ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ **ΑΕ** τοῖς **ΑΔ**, **ΓΕ**· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν **ΑΕ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΕ**, ἴση δὲ ἡ **ΒΕ** τῇ **ΒΓ**· τὸ δὲ **ΑΔ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· ἴση γὰρ ἡ **ΔΓ** τῇ **ΓΒ**· τὸ δὲ **ΔΒ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον·

τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὥς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ**. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΔΕΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΔ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Γ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΕΒ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΓΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Η** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΔΕ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΘΚ**.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΓΖ** τῇ **ΑΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ **ΒΔ**, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΑΔΒ**.

ἀλλή' ἡ ὑπὸ **ΑΔΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ** ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΑ** τῇ **ΑΔ** ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** ἄρα ᾠωνιά τῇ ὑπὸ **ΗΒΓ** ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΓ** πλευρᾷ τῇ **ΓΗ** ἐστὶν ἴση·

ἀλλή' ἡ μὲν **ΓΒ** τῇ **ΗΚ** ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ **ΓΗ** τῇ **ΚΒ**· καὶ ἡ **ΗΚ** ἄρα τῇ **ΚΒ** ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΓΗΚΒ**. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ **ΓΗ** τῇ **ΒΚ** [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεΐα ἡ **ΓΒ**], αἱ ἄρα ὑπὸ **ΚΒΓ**, **ΗΓΒ** ᾠωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΚΒΓ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΗ**· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ **ΓΗΚ**, **ΗΚΒ** ὀρθαὶ εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΓΗΚΒ**· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΓΒ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΘΖ** τετράγωνόν ἐστίν· καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΘΗ**, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα **ΘΖ**, **ΚΓ** τετράγωνα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** εἰσιν.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τῷ **ΗΕ**, καὶ ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· ἴση γὰρ ἡ **ΗΓ** τῇ **ΓΒ**· καὶ τὸ **ΗΕ** ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ **ΑΓ**, **ΓΒ**· τὰ ἄρα **ΑΗ**, **ΗΕ** ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**.

ἔστι δὲ καὶ τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ** τετράγωνα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ**, **ΑΗ**, **ΗΕ** ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

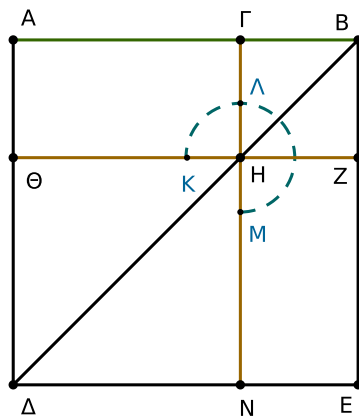
ἀλλὰ τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ**, **ΑΗ**, **ΗΕ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεΐα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράχωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὺς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράχωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὺς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράχωνον τὸ **ΑΔΕΒ**· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τῷ **ΗΕ**, κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΖ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΖ** ὅλῳ τῷ **ΓΕ** ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα **ΑΖ**, **ΓΕ** διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΖ**.

ἀλλὰ τὰ **ΑΖ**, **ΓΕ** ὁ **ΚΛΜ** ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** τετράχωνον· ὁ **ΚΛΜ** ἄρα γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΖ**. ἐστὶ δὲ τοῦ **ΑΖ** διπλάσιον καὶ τὸ δὺς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**· ἴση γὰρ ἡ **ΒΖ** τῇ **ΒΓ**· ὁ ἄρα **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** τετράχωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὺς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**.

κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΔΗ**, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράχωνον· ὁ ἄρα **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὰ **ΒΗ**, **ΗΔ** τετράχωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὺς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνῳ.

ἀλλὰ ὁ **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὰ **ΒΗ**, **ΗΔ** τετράχωνα ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ** καὶ τὸ **ΓΖ**, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράχωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράχωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὺς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου.

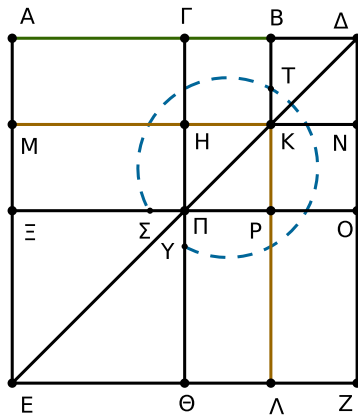
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράχωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὺς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὃπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ AB τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB , $B\Gamma$ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῇ AB εὐθεῖα] ἡ BD , καὶ κείσθω τῇ GB ἴση ἡ BD , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AD τετράγωνον τὸ $AEZD$, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ GB τῇ BD , ἀλλὰ ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BD τῇ KN , καὶ ἡ HK ἄρα τῇ KN ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΠΡ$ τῇ $ΡΟ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BD , ἡ δὲ HK τῇ KN , ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν $ΓΚ$ τῷ $ΚΔ$, τὸ δὲ HP τῷ PN .

ἀλλὰ τὸ $ΓΚ$ τῷ PN ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ $ΓΟ$ παραλληλοχράμμου καὶ τὸ $ΚΔ$ ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστὶν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ $ΔΚ$, $ΓΚ$, HP , PN ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλίσιά ἐστι τοῦ $ΓΚ$.

πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GB τῇ BD , ἀλλὰ ἡ μὲν BD τῇ BK , τουτέστι τῇ GH ἴση, ἡ δὲ GB τῇ HK , τουτέστι τῇ HP , ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ GH ἄρα τῇ HP ἴση ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν GH τῇ HP , ἡ δὲ $ΠΡ$ τῇ $ΡΟ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν AH τῷ MP , τὸ δὲ $ΠΛ$ τῷ PZ .

ἀλλὰ τὸ MP τῷ $ΠΛ$ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ $ΜΛ$ παραλληλοχράμμου καὶ τὸ AH ἄρα τῷ PZ ἴσον ἐστὶν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ AH , MP , $ΠΛ$, PZ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ AH ἐστὶ τετραπλίσια.

ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ $ΓΚ$, $ΚΔ$, HP , PN τοῦ $ΓΚ$ τετραπλίσια· τὰ ἄρα ὅκτω, ἃ περιέχει τὸν $ΣΤΥ$ γνῶμονα, τετραπλίσιά ἐστι τοῦ AK . καὶ ἐπεὶ τὸ AK τὸ ὑπὸ τῶν AB , BD ἐστὶν ἴση γὰρ ἡ BK τῇ BD · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BD τετραπλίσιόν ἐστι τοῦ AK .

ἔδείχθη δὲ τοῦ **AK** τετραπλάσιος καὶ ὁ **ΣΤΥ** γνῶμων· τὸ ἄρα τετράκισ ὑπὸ τῶν **AB**, **BD** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΣΤΥ** γνῶμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΞΘ**, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκισ ὑπὸ τῶν **AB**, **BD** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ **ΣΤΥ** γνῶμονι καὶ τῷ **ΞΘ**.

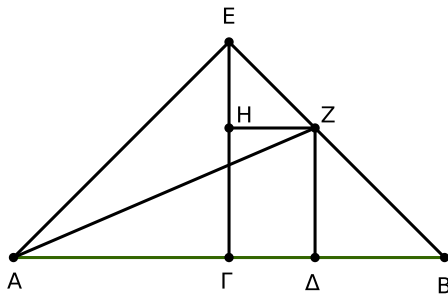
ἀλλὰ ὁ **ΣΤΥ** γνῶμων καὶ τὸ **ΞΘ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΕΖΔ** τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς **ΑΔ**· τὸ ἄρα τετράκισ ὑπὸ τῶν **AB**, **BD** μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΑΔ** τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ **BD** τῇ **ΒΓ**. τὸ ἄρα τετράκισ ὑπὸ τῶν **AB**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς **AB** καὶ **ΒΓ** ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκισ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσου ἐστὶ τῷ ἀπὸ τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **AB** τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Γ**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔB** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **AB** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΕ**, καὶ κείσθω ἴση ἑκάτερα τῶν **ΑΓ**, **ΓB**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΑ**, **ΕB**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Δ** τῇ **ΕΓ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΔΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Ζ** τῇ **AB** ἡ **ΖΗ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΖ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ**. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ **Γ**, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΕΑΓ**, **ΑΕΓ** μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καὶ εἰσιν ἴσαι ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΓΑΕ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ **ΓΕB**, **ΕBΓ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕB** ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς,

ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ**· ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ**·

λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΖΗ** ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** χωνία τῇ ὑπὸ **ΕΖΗ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΕΗ** τῇ **ΗΖ** ἐστὶν ἴση.

πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ **Β** χωνία ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΖΔΒ**· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΖΔ** ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Β** χωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΒ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΖΔ** πλευρᾷ τῇ **ΔΒ** ἐστὶν ἴση.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ **ΑΓ** τῷ ἀπὸ **ΓΕ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΕ** τετράχωνα διπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** τετράχωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** χωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΗ** τῇ **ΗΖ**, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΖ** τετράχωνα διπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΗΖ** τετραχώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΖ** τετραχώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετράχωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετράχωνον διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΗΖ** τῇ **ΓΔ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΖ** διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**.

ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΖ** τετράχωνα διπλάσιά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραχώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΖ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετράχωνον· ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΖ** χωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετράχωνον διπλάσιόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ**.

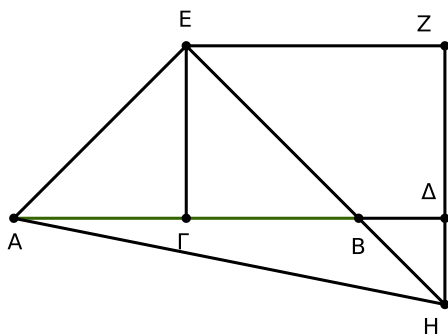
τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΖ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Δ** χωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΖ** διπλάσιά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραχώνων. ἴση δὲ ἡ **ΔΖ** τῇ **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** τετράχωνα διπλάσιά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραχώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράχωνα διπλάσιά ἐστὶ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραχώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ι'.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ**, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ **ΒΔ**. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΕ**, καὶ κείσθω ἴση ἑκάτερα τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**· καὶ διὰ μὲν τοῦ **Ε** τῇ **ΑΔ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΕΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Δ** τῇ **ΓΕ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΖΔ**.

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΕΓ**, **ΖΔ** εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ **ΕΖ**, αἱ ὑπὸ **ΓΕΖ**, **ΕΖΔ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΖΕΒ**, **ΕΖΔ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ' ἐ-

λάσσονων ἡ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα **ΕΒ**, **ΖΔ** ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** μέρη συμπεσοῦνται.

ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ **Η**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΗ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ**· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ **Γ**· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστὶν] ἑκάτερα τῶν ὑπὸ **ΕΑΓ**, **ΑΕΓ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ **ΓΕΒ**, **ΕΒΓ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ**. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΒΓ**, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΗ**. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΔΗ** ὀρθή· ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ **ΔΓΕ**· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΗ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΔΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΗ** ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΔ** πλευρᾷ τῇ **ΗΔ** ἐστὶν ἴση.

πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ **Ζ**· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ **Γ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΗ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΕΗ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΗΖ** πλευρᾷ τῇ **ΕΖ** ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΓΑ**], ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΓ**, **ΓΑ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΕΓ**, **ΓΑ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΑ** τετράγωνον διπλάσιόν

ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ZH** τῇ **EZ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ZH** τῷ ἀπὸ τῆς **ZE**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **HZ**, **ZE** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **EZ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **HZ**, **ZE** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **EH**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **EH** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **EZ**. ἴση δὲ ἡ **EZ** τῇ **ΓΔ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **EH** τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΗ** τετράγωνα διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.

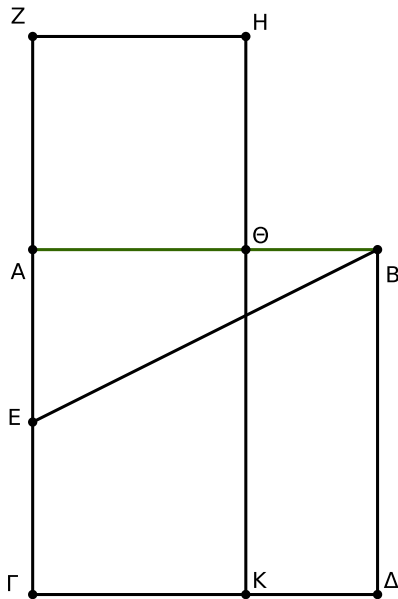
τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΗ** τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΗ** τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΗ** διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ**. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΗ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ** [τετράγωνα] διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ **ΔΗ** τῇ **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** [τετράγωνα] διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα διπλάσιόν ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ τὴν **ΑΒ** τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνον τὸ **ΑΒΔΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΑΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΕ**, καὶ διήχθω ἡ **ΓΑ** ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ κείσθω τῇ **ΒΕ** ἴση ἡ **ΕΖ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετραγώνον τὸ **ΖΘ**, καὶ διήχθω ἡ **ΗΘ** ἐπὶ τὸ **Κ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒ** τέτμηται κατὰ τὸ **Θ**, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΘ** τετραγώνῳ¹.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** τέτμηται δίχα κατὰ τὸ **Ε**, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ **ΖΑ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΒ**· τὸ

ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΕΒ**.

ἀλλὰ τῷ ἀπὸ **ΕΒ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΕ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Α** γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΕ**. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνῳ.

καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** τὸ **ΖΚ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΗ**· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τὸ **ΑΔ**· τὸ ἄρα **ΖΚ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΑΔ**. κοινὸν ἀρηρήσθω τὸ **ΑΚ**· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΖΘ** τῷ **ΘΔ** ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν **ΘΔ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΒΔ**· τὸ δὲ **ΖΘ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΘ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΘΑ** τετραγώνῳ.

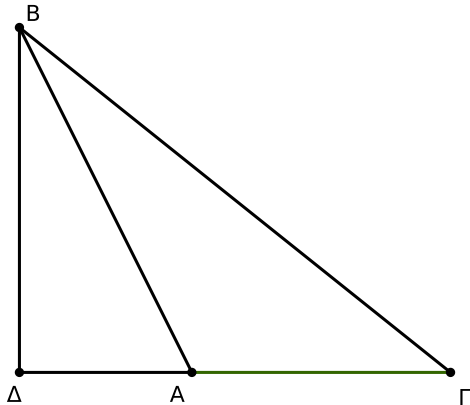
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** τέτμηται κατὰ τὸ **Θ** ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς **ΘΑ** τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

¹ Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς χρυσῆς τομῆς : $\varphi = \frac{AB}{AO} = \frac{AO}{OB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλεῖᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου ἐπὶ τὴν **ΓΑ** ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ **ΒΔ**. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΓΔ** τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Α** σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΔ**, **ΔΒ** ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ**, **ΔΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ].

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΓΔ**, **ΔΒ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Δ** γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχο-

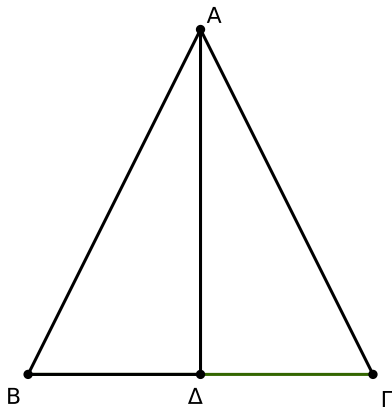
μένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΒ** τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλεῖᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἑλάττων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ **Β** γωνίαν, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπὶ τὴν **ΒΓ** κάθετος ἡ **ΑΔ**. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον ἑλάττων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΓΒ** τέτμηται, ὥς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Δ**, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΓ** τετραγώνῳ.

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΑ** τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ**, **ΔΑ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** τετραγώνοις.

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΒΔ**, **ΔΑ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Δ** γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς **ΑΓ** καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ**· ὥστε μόνον τὸ

ἀπὸ τῆς **ΑΓ** ἑλάττων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἑλάττων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 3

Ὅροι

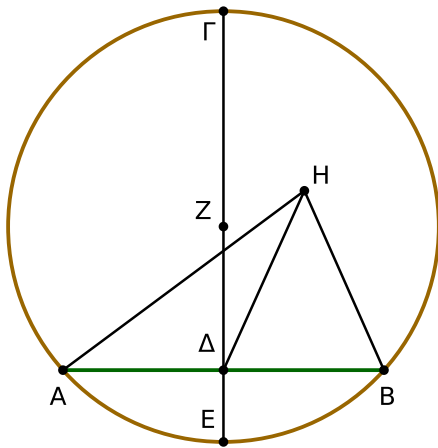
- α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.
- β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἣτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.
- γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἵτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.
- δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ᾖσιν. ε'. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.
- ς'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.
- ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.
- η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἢ ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.
- θ'. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσιν τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.
- ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.
- ια'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**. δεῖ δὴ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Δ** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ **ΔΓ** καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Ε**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΓΕ** δίχα κατὰ τὸ **Ζ**. λέγω, ὅτι τὸ **Ζ** κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** [κύκλου].



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HA , HD , HB . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ DB , κοινὴ δὲ ἡ DH , δύο δὴ αἱ AD , DH δύο ταῖς HD , DB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ HA βάσει τῇ HB ἐστὶν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· ἄρα ἡ ὑπὸ AHD ᾠωνία τῇ ὑπὸ HDB ἴση ἐστίν.

ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς ᾠωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων ᾠωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HDB . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZDB ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZDB τῇ ὑπὸ HDB , ἡ

μείζων τῇ ἐλάττω· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἐστὶ τοῦ ABG κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν τοῦ Z .

Πόρισμα : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι τις εὐθεῖαν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. — ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

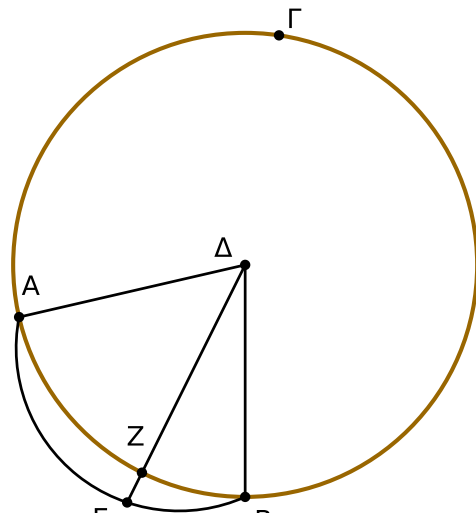
β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ABG , καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A , B · λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ AEB , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ABG κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔA , ΔB , καὶ διήχθω ἡ ΔZE .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB , ἴση ἄρα καὶ ᾠωνία ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE · καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔAE μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ AEB , μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB ᾠωνία τῆς ὑπὸ ΔAE . ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB τῆς ὑπὸ ΔBE . ὑπὸ



δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔB τῆς ΔE . ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ ΔZ . μείζων ἄρα ἡ ΔZ τῆς ΔE ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

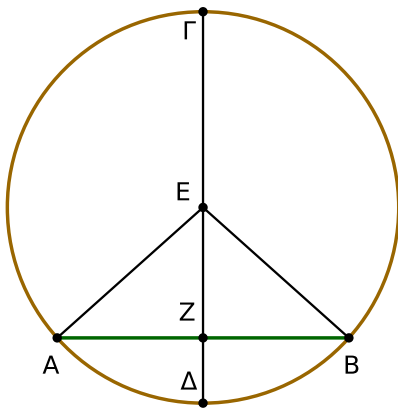
οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευχνυμένη εὐθεΐα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευχνυμένη εὐθεΐα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δείξαι.

8'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $\Gamma\Delta$ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Z σημεῖον· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA , EB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , κοινὴ δὲ ἡ ZE , δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσὶν]· καὶ βάσις ἡ EA βάσει τῇ EB ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ BZE ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεΐα ἐπ' εὐθεϊάν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ἑκάτερα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE , BZE ὀρθὴ ἐστίν. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὕσα τὴν AB μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαν δίχα τέμνους καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Ἀλλὰ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ τῇ ὑπὸ EBZ . ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AZE ὀρθὴ τῇ ὑπὸ BZE ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι EAZ , EBZ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν

EZ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ **AZ** τῇ **ZB**.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεΐαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεΐαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

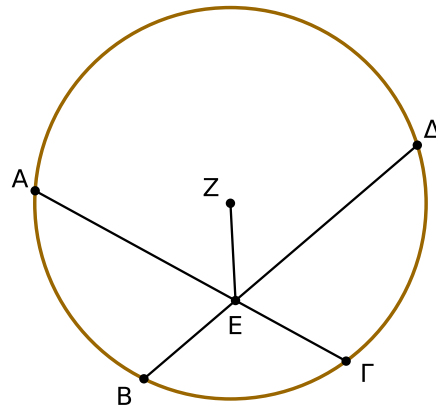
Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, τὴν δὲ **ΒΕ** τῇ **ΕΔ**· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΕ**.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΖΕ** εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΓ** δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ**.

πάλιν, ἐπεὶ εὐθεΐα τις ἡ **ΖΕ** εὐθεϊάν τινα τὴν **ΒΔ** δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΒ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ** ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ** τῇ ὑπὸ **ΖΕΒ** ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

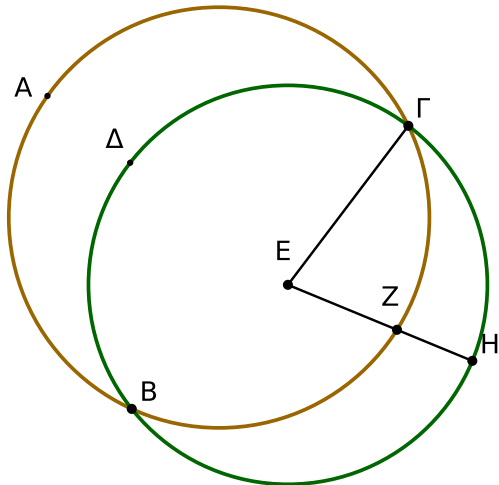
Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεΐαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ε'.

Ἐάν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΓΔΗ** τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ **Β**, **Γ** σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΓ**, καὶ διήχθω ἡ **ΕΖΗ**, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΕΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΔΗ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΕΗ**. ἐδείχθη δὲ ἡ **ΕΓ** καὶ τῇ **ΕΖ** ἴση· καὶ ἡ **ΕΖ** ἄρα τῇ **ΕΗ** ἐστὶν ἴση ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν **ΑΒΓ**, **ΓΔΗ** κύκλων.

Ἐάν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

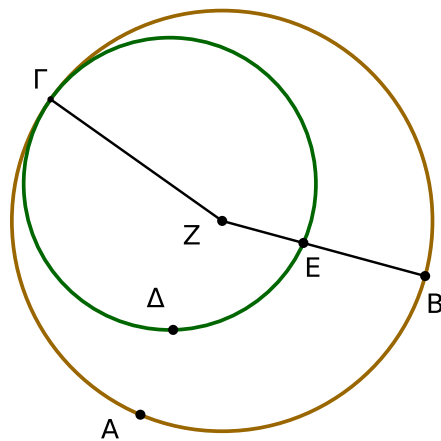
Σ'.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΓΔΕ** ἐφάπτεσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ **ΖΕΒ**. Ἐπεὶ οὖν τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΔΕ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΕ**. ἐδείχθη δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ** ἴση· καὶ ἡ **ΖΕ** ἄρα τῇ **ΖΒ** ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάττω τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν **ΑΒΓ**, **ΓΔΕ** κύκλων.

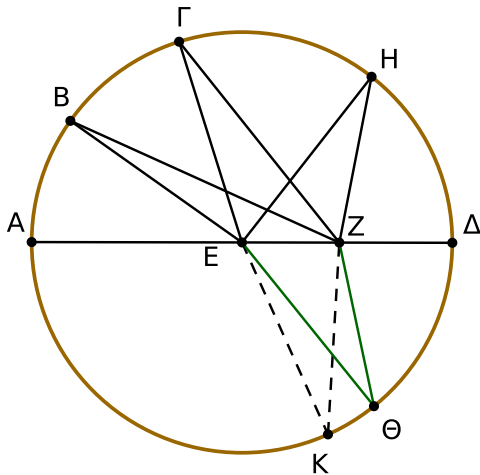


Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μέγιστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλάχιστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων αἰ ἢ ἔχχιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστιν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλάχιστης.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ **ΑΔ**, καὶ ἐπὶ τῆς **ΑΔ** εἰληφθῇ τι σημεῖον τὸ **Ζ**, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΗ**· λέγω, ὅτι μέγιστη μὲν ἔστιν ἡ **ΖΑ**, ἐλάχιστη δὲ ἡ **ΖΔ**, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν **ΖΒ** τῆς **ΖΓ** μείζων, ἡ δὲ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**.



Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΓΕ**, **ΗΕ**. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα **ΕΒ**, **ΕΖ** τῆς **ΒΖ** μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΒΕ** [αἱ ἄρα **ΒΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶ τῇ **ΑΖ**]· μείζων ἄρα ἡ **ΑΖ** τῆς **ΒΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΓΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΖΕ**, δύο δὴ αἱ **ΒΕ**, **ΕΖ** δυσὶ ταῖς **ΓΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ ᾠόνια ἡ ὑπὸ **ΒΕΖ** ᾠονίας τῆς ὑπὸ **ΓΕΖ** μείζων· βάσις ἄρα ἡ **ΒΖ** βάσεως τῆς **ΓΖ** μείζων ἔστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΖ** τῆς **ΖΗ** μείζων ἔστιν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ **ΗΖ**, **ΖΕ** τῆς **ΕΗ** μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ **ΕΗ** τῇ **ΕΔ**, αἱ ἄρα **ΗΖ**, **ΖΕ** τῆς **ΕΔ** μείζονές εἰσιν. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ **ΕΖ**· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΗΖ** λοιπῆς τῆς **ΖΔ** μείζων ἔστιν. μέγιστη μὲν ἄρα ἡ **ΖΑ**, ἐλάχιστη δὲ ἡ **ΖΔ**, μείζων δὲ ἡ μὲν **ΖΒ** τῆς **ΖΓ**, ἡ δὲ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς **ΖΔ** ἐλάχιστης.

συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ **ΕΖ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Ε** τῇ ὑπὸ **ΗΕΖ** ᾠονία ἴση ἡ ὑπὸ **ΖΕΘ**, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ **ΖΘ**. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ

HE τῇ **EO**, κοινὴ δὲ ἡ **EZ**, δύο δὲ αἱ **HE**, **EZ** δυσὶ ταῖς **OE**, **EZ** ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **HEZ** γωνία τῇ ὑπὸ **OEZ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ZH** βάσει τῇ **ZO** ἴση ἐστίν.

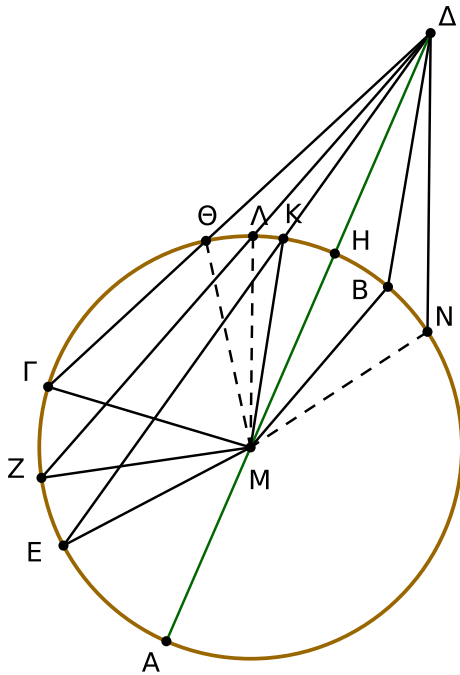
λέγω δὴ, ὅτι τῇ **ZH** ἄλλη ἴση οὐ προσπесеῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ **Z** σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ **ZK**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ZK** τῇ **ZH** ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ **ZO** τῇ **ZH** [ἴση ἐστίν], καὶ ἡ **ZK** ἄρα τῇ **ZO** ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγχιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ **Z** σημείου ἑτέρα τις προσπесеῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ **HZ**· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες, μέγιστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλάχιστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγχιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπесоῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλάχιστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγχιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάχιστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγχιον τῆς ἐλάχιστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπесоῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλάχιστης.

Ἐστω κύκλος ὁ **ABΓ**, καὶ τοῦ **ABΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτός τὸ **Δ**, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ **ΔΑ**, **ΔΕ**, **ΔΖ**, **ΔΓ**, ἔστω δὲ ἡ **ΔΑ** διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν **ΑΕΖΓ** κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΔΑ**, μείζων δὲ ἡ μὲν **ΔΕ** τῆς **ΔΖ** ἢ δὲ **ΔΖ** τῆς **ΔΓ**, τῶν δὲ πρὸς τὴν **ΘΛΚΗ** κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάχιστη μὲν ἐστὶν ἡ **ΔΗ** ἢ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς **ΑΗ**, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγχιον τῆς **ΔΗ** ἐλάχιστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν **ΔΚ** τῆς **ΔΛ**, ἡ δὲ **ΔΛ** τῆς **ΔΘ**.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ M · καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ME , MZ , MΓ , MK , ML , MO .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AM τῇ EM , κοινὴ προσκείσθω ἡ MD · ἡ ἄρα AD ἴση ἐστὶ ταῖς EM , MD . ἀλλ' αἱ EM , MD τῆς ED μείζονες εἰσιν· καὶ ἡ AD ἄρα τῆς ED μείζων ἐστίν.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ME τῇ MZ , κοινὴ δὲ ἡ MD , αἱ EM , MD ἄρα ταῖς ZM , MD ἴσαι εἰσιν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EMD γωνίας τῆς ὑπὸ ZMD μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ ED βάσεως τῆς ZD μείζων ἐστίν.

ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ZD τῆς ΓD μείζων ἐστίν· μέγιστη μὲν ἄρα ἡ DA , μείζων δὲ ἡ μὲν DE τῆς DZ , ἡ δὲ DZ τῆς DΓ . Καὶ ἐπεὶ αἱ MK , KD τῆς MD μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ MH

τῇ MK , λοιπὴ ἄρα ἡ KD λοιπῆς τῆς HD μείζων ἐστίν· ὥστε ἡ HD τῆς KD ἐλάττων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ MLD ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς MD δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ MK , KD , αἱ ἄρα MK , KD τῶν ML , LD ἐλάττονες εἰσιν· ἴση δὲ ἡ MK τῇ ML · λοιπὴ ἄρα ἡ DK λοιπῆς τῆς DL ἐλάττων ἐστίν.

ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ DL τῆς DO ἐλάττων ἐστίν· ἐλάχιστη μὲν ἄρα ἡ DH , ἐλάττων δὲ ἡ μὲν DK τῆς DL ἡ δὲ DL τῆς DO .

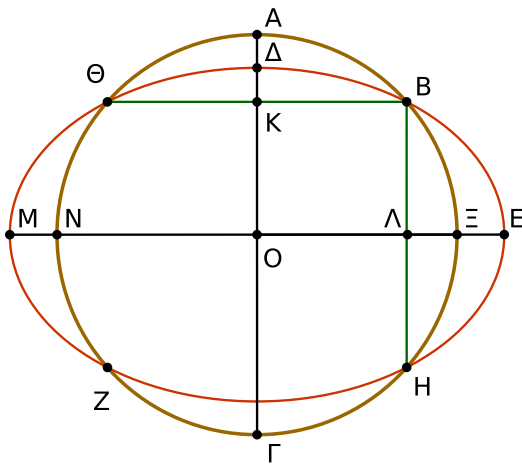
Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς DH ἐλάχιστης· συνεστάτω πρὸς τῇ MD εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ M τῇ ὑπὸ KMD γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ DMB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ DB . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ MK τῇ MB , κοινὴ δὲ ἡ MD , δύο δὲ αἱ KM , MD δύο ταῖς BM , MD ἴσαι εἰσιν ἑκάτερα ἑκατέρῳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KMD γωνία τῇ ὑπὸ BMD ἴση· βάσις ἄρα ἡ DK βάσει τῇ DB ἴση ἐστίν.

λέγω [δὴ], ὅτι τῇ DK εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ DN . ἐπεὶ οὖν ἡ DK τῇ DN ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ DK τῇ DB ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ DB ἄρα τῇ DN ἐστὶν ἴση, ἡ ἔχχιον τῆς DH ἐλάχιστης τῇ ἀπώτερον [ἐστὶν] ἴση· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ABΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς DH ἐλάχιστης προσπεσοῦνται.

ι'.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ΑΒΓ$ κύκλον τὸν $ΔΕΖ$ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο τὰ $Β, Η, Ζ, Θ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $ΒΘ, ΒΗ$ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ $Κ, Λ$ σημεία· καὶ ἀπὸ τῶν $Κ, Λ$ ταῖς $ΒΘ, ΒΗ$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ $ΚΓ, ΛΜ$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ $Α, Ε$ σημεία.



Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $ΑΒΓ$ εὐθεῖα τις ἡ $ΑΓ$ εὐθεῖάν τινα τὴν $ΒΘ$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου.

πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $ΑΒΓ$ εὐθεῖα τις ἡ $ΝΞ$ εὐθεῖάν τινα τὴν $ΒΗ$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $ΝΞ$ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς $ΑΓ$, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ $ΑΓ, ΝΞ$ εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ $Ο$ · τὸ $Ο$ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ $Ο$.

δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλων τῶν $ΑΒΓ, ΔΕΖ$ τὸ αὐτό ἐστὶ κέντρον τὸ $Ο$ · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

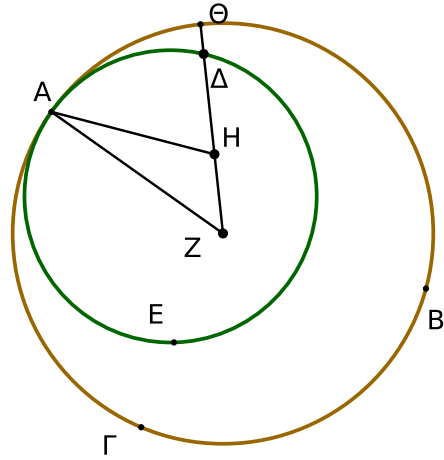
Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευχνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ΑΒΓ, ΑΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ $Α$ σημείον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ΑΒΓ$ κύκλου κέντρον τὸ $Ζ$, τοῦ δὲ $ΑΔΕ$ τὸ $Η$.

λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ $Η$ ἐπὶ τὸ $Ζ$ ἐπιζευχνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ $Α$ πεσεῖται. Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ $ΖΗΘ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΖ, ΑΗ$.

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HZ τῆς ZA , τουτέστι τῆς $ZΘ$, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ZH : λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ AH τῇ $HΔ$: καὶ ἡ $HΔ$ ἄρα τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται· κατὰ τὸ A ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

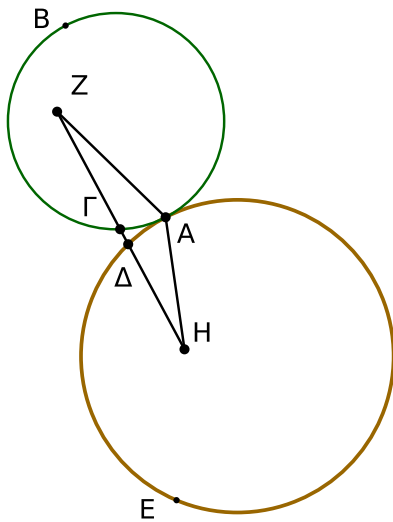
Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευχυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$, $AΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ABΓ$ κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $AΔΕ$ τὸ H : λήξω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ $ZΓΔΗ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ , AH . Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ $ZΓ$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AΔΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ HA τῇ $HΔ$.

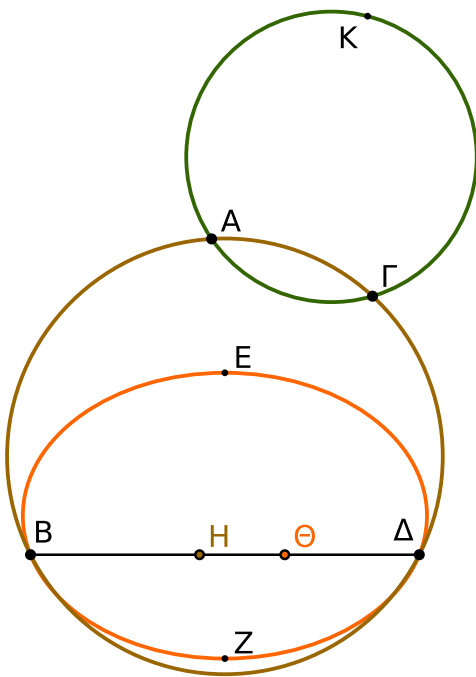
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ $ZΓ$ ἴση· αἱ ἄρα ZA , AH ταῖς $ZΓ$, $HΔ$ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA , AH μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευχυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευχυνμένη [εὐθεΐα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς εἴαν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλου τοῦ **ΕΒΖΔ** ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν τὰ **Δ**, **Β**. Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν **ΑΒΓΔ** κύκλου κέντρον τὸ **Η**, τοῦ δὲ **ΕΒΖΔ** τὸ **Θ**.



Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ **Η** ἐπὶ τὸ **Θ** ἐπιζευχυνμένη ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ **ΒΗΘΔ**. καὶ ἐπεὶ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΗ** τῇ **ΗΔ**· μείζων ἄρα ἡ **ΒΗ** τῆς **ΘΔ**· πολλῶν ἄρα μείζων ἡ **ΒΘ** τῆς **ΘΔ**.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Θ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΕΒΖΔ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΘ** τῇ **ΘΔ**· ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ **ΑΓΚ** κύκλου τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν τὰ **Α**, **Γ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΓ**.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν **ΑΒΓΔ**, **ΑΓΚ** εἰλήπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ **Α**, **Γ**, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευχυνμένη εὐθεΐα ἐντὸς ἐκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν **ΑΒΓΔ** ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ **ΑΓΚ** ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον·

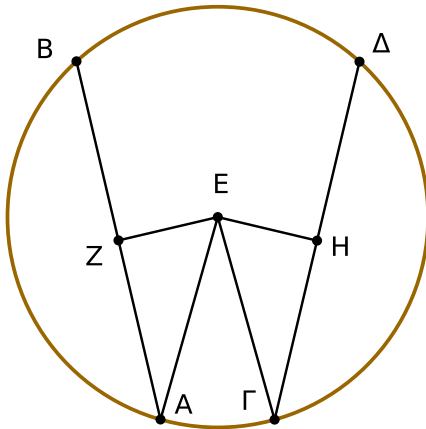
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ'] ἓν, εἴαν τε ἐντὸς εἴαν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**· λέγω, ὅτι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου καὶ ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ε** ἐπὶ τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** κάθετοι ἦχθωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΕΗ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΕ**, **ΕΓ**.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΕΖ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**· διπλὴ ἄρα ἡ **ΑΒ** τῆς **ΑΖ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΔ** τῆς **ΓΗ** ἔστι διπλὴ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΓ**. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΖ**, **ΕΖ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Ζ** γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Η** γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΖ**, **ΖΕ** ἴσα ἐστὶ τοῖς

ἀπὸ τῶν **ΓΗ**, **ΗΕ**, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΗ**· ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**.

ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀχόμεναι ἴσαι ᾖσιν· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΓΔ** ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἀλλὰ δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι διπλὴ ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΒ** τῆς **ΑΖ**, ἡ δὲ **ΓΔ** τῆς **ΓΗ**· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΓ**· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΖ**, **ΖΑ**, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΖ**, **ΖΑ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** ἐστὶν ἴσον· ἴση γὰρ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΗ**· ἴση ἄρα ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**· καὶ ἐστὶ τῆς μὲν **ΑΖ** διπλὴ ἡ **ΑΒ**, τῆς δὲ

ας ἔσται μείζων ὀξεία ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $\Gamma\Theta\Lambda$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδὴ περ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

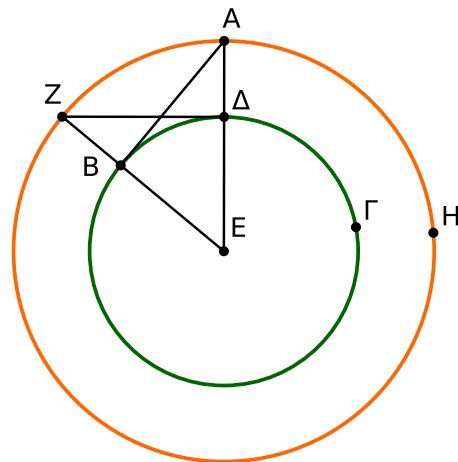
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ $B\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀχαεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ E διαστήματι δὲ τῷ EA κύκλος γεγράφθω ὁ AZH , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ EA πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔZ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EZ , AB . ἴδωμεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ AB .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶν $B\Gamma\Delta$, AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EA τῇ EZ , ἡ δὲ ED τῇ EB . δύο δὴ αἱ AE , EB δύο ταῖς ZE , ED ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ E . βάσεις ἄρα ἡ ΔZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ EDZ τῇ ὑπὸ EBA . ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EDZ . ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA . καὶ ἐστὶν ἡ EB ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ A τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ $B\Gamma\Delta$ ἐφαπτομένην εὐθεῖα γραμμὴν ἦκται ἡ AB . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ιη'.

Ἐάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

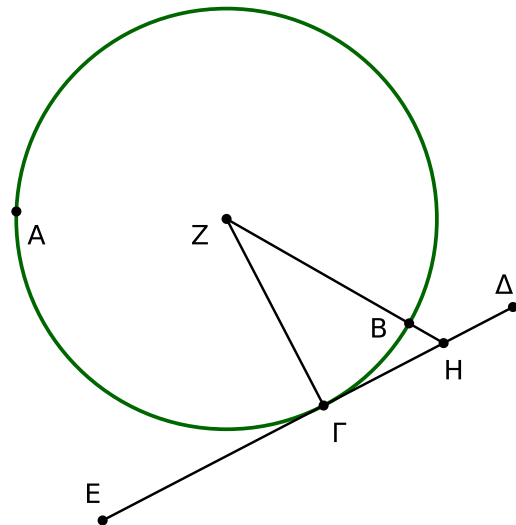
Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ **ΔΕ** κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τὸ **Ζ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ **Γ** ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**. λέγω, ὅτι ἡ **ΖΓ** κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**.

Εἰ γὰρ μή, ἦχθω ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὴν **ΔΕ** κάθετος ἡ **ΖΗ**.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ **ΖΗΓ** γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΓΗ**. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**. ἴση δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**. μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΖΒ** τῆς **ΖΗ** ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ **ΖΗ** κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**.

ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς **ΖΓ** ἡ **ΖΓ** ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**.

Ἐάν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιθ'.

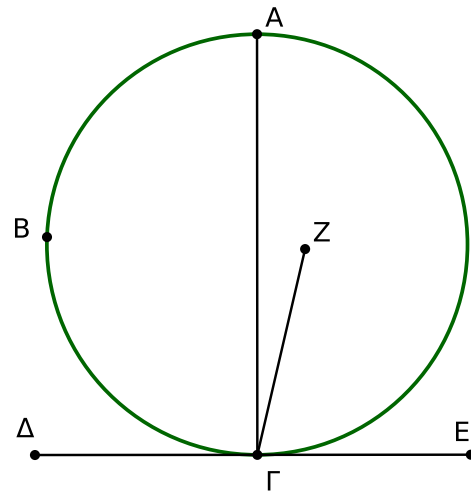
Ἐάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ **ΔΕ** κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΔΕ** πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ **ΓΑ**. λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς **ΑΓ** ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ . Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΔE , ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ $Z\Gamma$, ἡ $Z\Gamma$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE : ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Z\Gamma E$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $A\Gamma E$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Z\Gamma E$ τῇ ὑπὸ $A\Gamma E$ ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

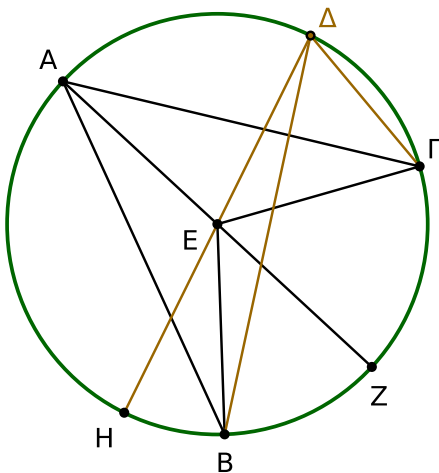
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς $A\Gamma$.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κ'.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.



Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ $BE\Gamma$, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$, ἐκέτwsαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν $B\Gamma$ · λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BE\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ AE διήχθω ἐπὶ τὸ Z . Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA · αἱ ἄρα ὑπὸ EAB , EBA γωνίαι τῆς ὑπὸ EAB διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ BEZ ταῖς ὑπὸ EAB , EBA · καὶ ἡ ὑπὸ BEZ ἄρα τῆς ὑπὸ EAB ἐστὶ διπλή. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ZE\Gamma$ τῆς

ὑπὸ EAG ἐστὶ διπλή. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BE\Gamma$ ὅλης τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$ ἐστὶ διπλή.

Κεκλῆσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα

ἡ **ΔΕ** ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ **Η**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΕΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΓ**, ὧν ἡ ὑπὸ **ΗΕΒ** διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΕΔΒ**. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΕΓ** διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΔΓ**.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

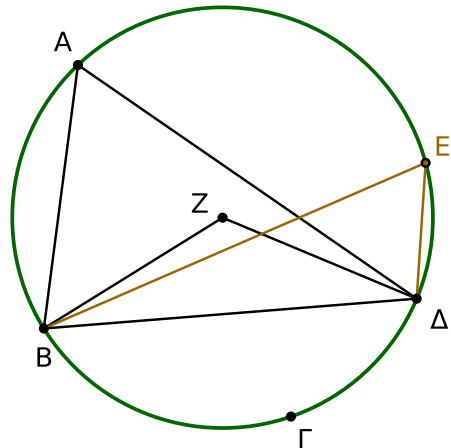
Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ **ΒΑΕΔ** γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΕΔ**. λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΕΔ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΖ**, **ΖΔ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΔ** γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΑΔ** πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν **ΒΓΔ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΒΖΔ** γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΑΔ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ **ΒΖΔ** καὶ τῆς ὑπὸ **ΒΕΔ** ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΕΔ**.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

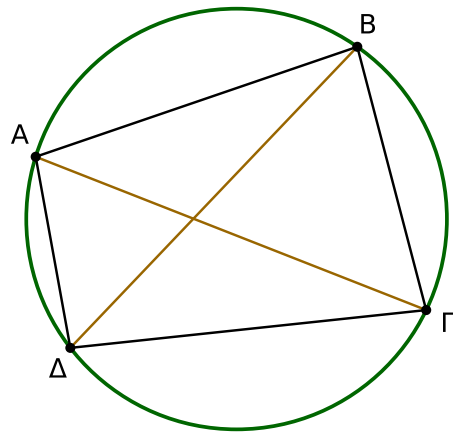
Ἐστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ **ΑΒΓΔ**. λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**. Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ **ΑΒΓ** ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΓΑΒ**, **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ $\Gamma\Lambda\mathbf{B}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{B}\Delta\Gamma$ ·
 ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ $\mathbf{B}\Delta\mathbf{A}\Gamma$ ·
 ἡ δὲ ὑπὸ $\mathbf{A}\Gamma\mathbf{B}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{A}\Delta\mathbf{B}$ · ἐν γὰρ τῷ
 αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ $\mathbf{A}\Delta\mathbf{G}\mathbf{B}$ · ὅλη ἄρα
 ἡ ὑπὸ $\mathbf{A}\Delta\mathbf{G}$ ταῖς ὑπὸ $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{G}$, $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ ἴση
 ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}$ ·
 αἱ ἄρα ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}$, $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{G}$, $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ ταῖς ὑπὸ
 $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{G}$ ἴσαι εἰσίν.

ἀλλ' αἱ ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}$, $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{G}$, $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ δυσὶν
 ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}$,
 $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{G}$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁ-
 μοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ
 $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι
 εἰσίν.

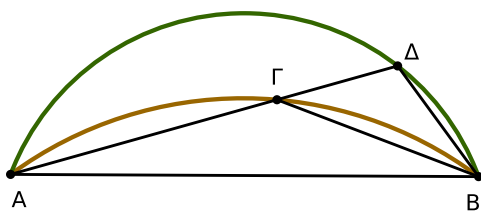
Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν
 ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κχ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ
 συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς $\mathbf{AB}$ δύο τμήματα κύκλων
 ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}$, καὶ διήχθω ἡ
 $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\mathbf{GB}$, $\mathbf{AB}$.



Ἐπεὶ οὖν ὁμοίον ἐστὶ τὸ $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ τμή-
 μα τῷ $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}$ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήμα-
 τα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας
 ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{B}$ γωνία
 τῇ ὑπὸ $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}$ ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· ὅπερ
 ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας
 δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα
 συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

κδ'.

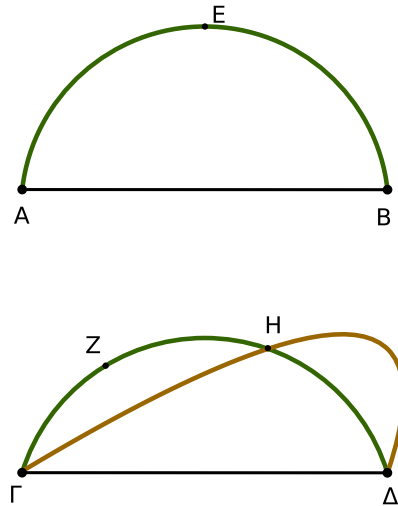
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν AB , $ΓΔ$ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ $ΑΕΒ$, $ΓΖΔ$ · λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΕΒ$ τμήμα τῷ $ΓΖΔ$ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $ΑΕΒ$ τμήματος ἐπὶ τὸ $ΓΖΔ$ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ $Γ$ τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $ΓΔ$, ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ $Δ$ σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν AB τῇ $ΓΔ$ · τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν $ΓΔ$ ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ $ΑΕΒ$ τμήμα ἐπὶ τὸ $ΓΖΔ$.

εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $ΓΔ$ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ $ΑΕΒ$ τμήμα ἐπὶ τὸ $ΓΖΔ$ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλήλας, ὥς τὸ $ΓΗΔ$, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $ΓΔ$ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ $ΑΕΒ$ τμήμα ἐπὶ τὸ $ΓΖΔ$ · ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

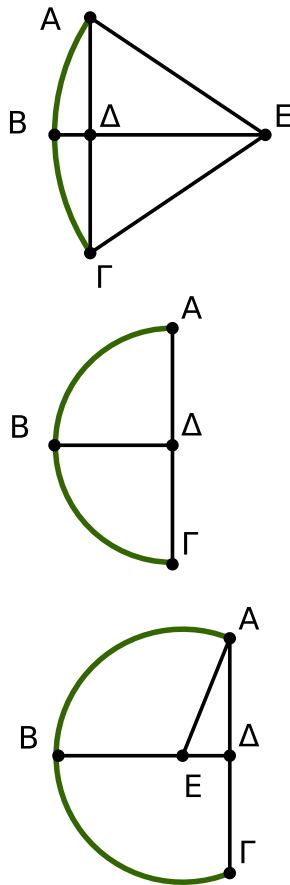


κε'.

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμήμα.

Ἐστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου τὸ $ΑΒΓ$ · δεῖ δὴ τοῦ $ΑΒΓ$ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου τῇ $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΒ$, καὶ ἐπέζεύχθω ἡ $ΑΒ$ · ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.



Ἐστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **BA** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **A** τῇ ὑπὸ **ABΔ** γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ **BAE**, καὶ διήχθω ἡ **ΔB** ἐπὶ τὸ **E**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΓ**.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ABE** γωνία τῇ ὑπὸ **BAE**, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **EB** εὐθεῖα τῇ **EA**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΓ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΔE**, δύο δὴ αἱ **ΑΔ**, **ΔE** δύο ταῖς **ΓΔ**, **ΔE** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΔE** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔE** ἐστὶν ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρωθεν· βάσις ἄρα ἡ **AE** βάσει τῇ **ΓE** ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ **AE** τῇ **BE** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ **BE** ἄρα τῇ **ΓE** ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **AE**, **EB**, **ΕΓ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **E** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **AE**, **EB**, **ΕΓ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγεγραπταὶ ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὡς τὸ **ΑΒΓ** τμήμα ἑλάττων ἐστὶν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ **E** κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυχάνειν.

Ὅμοιως [δὲ] καὶ ἡ ὑπὸ **ABΔ** γωνία ἴση τῇ ὑπὸ **BAΔ**, τῆς **ΑΔ** ἴσης γενομένης ἑκατέρωθεν τῶν **BD**, **ΔΓ** αἱ τρεῖς αἱ **ΔA**, **ΔB**, **ΔΓ** ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ **Δ** κέντρον τοῦ προσαναγεγραμμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ **ΑΒΓ** ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ **ABΔ** ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ **BAΔ**, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ **BA** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **A** τῇ ὑπὸ **ABΔ** γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ **ΑΒΓ** τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς **ΔB**, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ **ΑΒΓ** τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

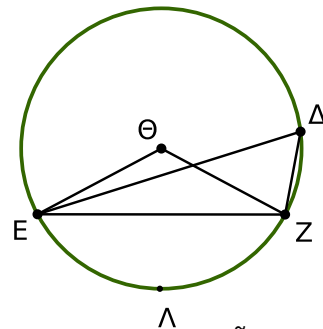
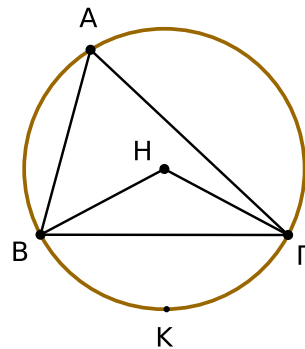
Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγεγραπταὶ ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κς'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἂν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΚΓ** περιφέρεια τῇ **ΕΛΖ** περιφερείᾳ.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΓ**, **ΕΖ**. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ **ΒΗ**, **ΗΓ** δύο ταῖς **ΕΘ**, **ΘΖ** ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Η** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Θ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ **Α** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Δ**, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΑΓ** τμήμα τῷ **ΕΔΖ** τμήματι· καὶ εἰσὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ**]· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ **ΒΑΓ** τμήμα τῷ **ΕΔΖ**. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ **ΑΒΓ** κύκλος ὅλῳ τῷ **ΔΕΖ** κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΚΓ** περιφέρεια τῇ **ΕΛΖ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἂν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἂν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι.

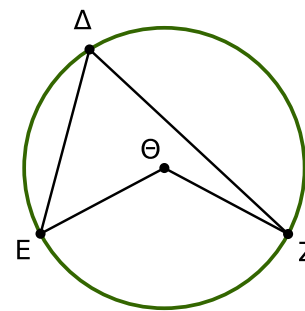
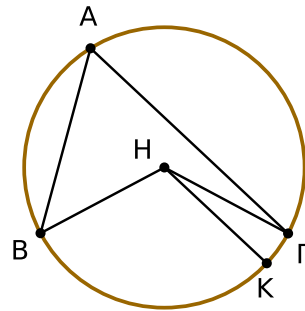
Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** πρὸς μὲν τοῖς **Η**, **Θ** κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ** ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **BHΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **BHΓ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **BH** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **H** τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ** γωνία ἴση ἡ ὑπὸ **BHK**.

αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾤσιν· ἴση ἄρα ἡ **BK** περιφέρεια τῇ **EZ** περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ **EZ** τῇ **BΓ** ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ **BK** ἄρα τῇ **BΓ** ἐστὶν ἴση ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **BHΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ**· ἴση ἄρα. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ **BHΓ** ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ **A**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΕΘΖ** ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ **Δ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ **A** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Δ**.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἂν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ᾤσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



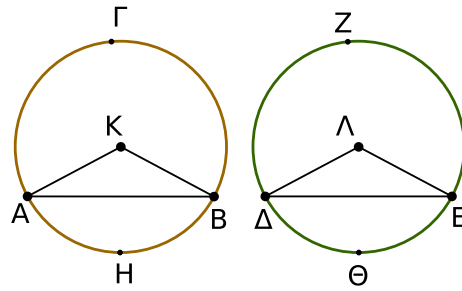
κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΔΕ** τὰς μὲν **ΑΓΒ**, **ΑΖΕ** περιφέρειας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ **ΑΗΒ**, **ΔΘΕ** ἐλάττωνας·

λέγω, ὅτι ἡ μὲν **ΑΓΒ** μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ **ΔΖΕ** μείζονι περιφερείᾳ ἡ δὲ **ΑΗΒ** ἐλάττων περιφέρεια τῇ **ΔΘΕ**.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ K, Λ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ AK, KB δυσὶ ταῖς $\Delta\Lambda, \Lambda E$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις ἡ AB βάσει τῇ ΔE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKB γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Lambda E$ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾤσιν· ἴση ἄρα ἡ AHB περιφέρεια τῇ $\Delta\Theta E$. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔEZ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $A\Gamma B$ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔZE περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

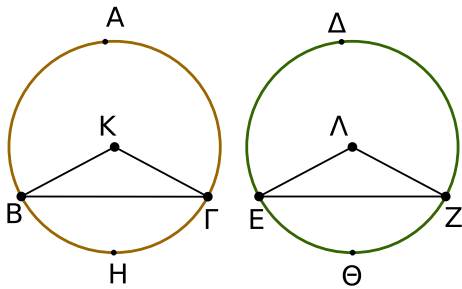


Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσιν τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma, \Delta EZ$, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ $B\eta\Gamma, E\theta Z$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $B\Gamma, EZ$ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ .



Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ K, Λ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $BK, K\Gamma, ΕΛ, \Lambda Z$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\eta\Gamma$ περιφέρεια τῇ $E\theta Z$ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BK\Gamma$ τῇ ὑπὸ $ΕΛZ$. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $AB\Gamma, \Delta EZ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ $BK, K\Gamma$ δυσὶ ταῖς $ΕΛ, \Lambda Z$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ

$B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστίν·

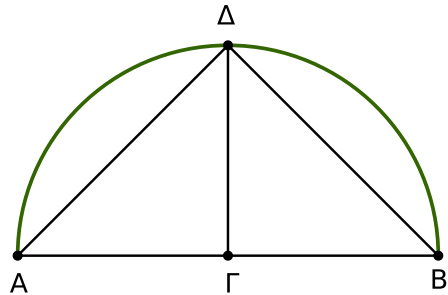
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

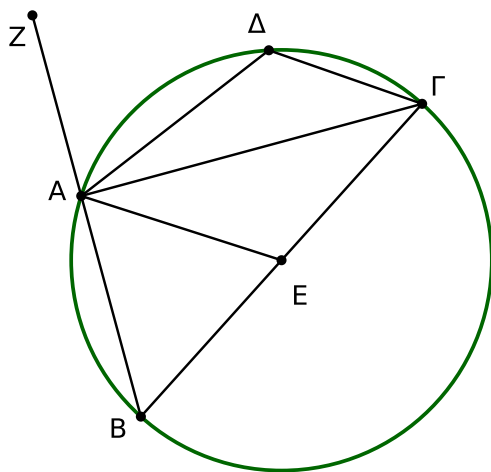
Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $\mathbf{ADB}$ · δεῖ δὴ τὴν $\mathbf{ADB}$ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. Ἐπεζεύχθω ἡ $\mathbf{AB}$, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ $\mathbf{AB}$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $\mathbf{GD}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\mathbf{AD}$, $\mathbf{DB}$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{AG}$ τῇ $\mathbf{GB}$, κοινὴ δὲ ἡ $\mathbf{GD}$, δύο δὴ αἱ $\mathbf{AG}$, $\mathbf{GD}$ δυσὶ ταῖς $\mathbf{BG}$, $\mathbf{GD}$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{AGD}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\mathbf{BGD}$ ἴση· ὀρθή· ἄρα ἑκάτερα· βάσις ἄρα ἡ $\mathbf{AD}$ βάσει τῇ $\mathbf{DB}$ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω· καὶ ἐστὶν ἑκάτερα τῶν $\mathbf{AD}$, $\mathbf{DB}$ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ $\mathbf{AD}$ περιφέρεια τῇ $\mathbf{DB}$ περιφερείᾳ. Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ηα'.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττω τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.



Ἐστω κύκλος ὁ $\mathbf{ABGD}$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ $\mathbf{BG}$, κέντρον δὲ τὸ $\mathbf{E}$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AG}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{DG}$ · λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ $\mathbf{BAG}$ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{BAG}$ ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ ἐν τῷ $\mathbf{ABG}$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{ABG}$ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ $\mathbf{ADG}$ ἐλάττω τῷ ἡμικυκλίῳ τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{ADG}$ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ $\mathbf{AE}$, καὶ διήχθω ἡ $\mathbf{BA}$ ἐπὶ τὸ $\mathbf{Z}$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{BE}$ τῇ $\mathbf{EA}$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\mathbf{ABE}$ τῇ ὑπὸ $\mathbf{BAE}$. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\mathbf{GE}$ τῇ $\mathbf{EA}$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $\mathbf{AGE}$ τῇ ὑπὸ

ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** ἴση ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΑΓ** ἐκτὸς τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** χωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** χωνία τῇ ὑπὸ **ΖΑΓ**· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἡμικυκλίῳ χωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** ὀρθή ἐστίν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ **ΑΒΓ** τρίγωνου δύο χωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΑΓ** δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστίν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** χωνία· καὶ ἐστίν ἐν τῷ **ΑΒΓ** μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον χωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν [αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΔΓ** χωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἰσὶν], καὶ ἐστίν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** χωνία μείζων ὀρθῆς ἐστίν· καὶ ἐστίν ἐν τῷ **ΑΔΓ** ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος χωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ [τε] τῆς **ΑΒΓ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας μείζων ἐστίν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος χωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ [τε] τῆς **ΑΔ**[Γ] περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας ἐλάττων ἐστίν ὀρθῆς. καὶ ἐστίν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** εὐθειῶν ὀρθή ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς **ΑΒΓ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστίν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΑΖ** εὐθειῶν ὀρθή ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς **ΓΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΑΔ**[Γ] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστίν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ χωνία ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [χωνία] μείζων [ἐστίν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [χωνία] ἐλάττων ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἢβ'.

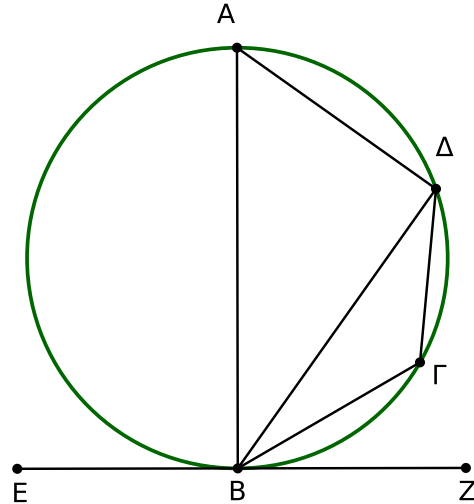
Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ χωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι χωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΕΖ** κατὰ τὸ **Β** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ **ΒΔ**. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ χωνίας ἡ **ΒΔ** μετὰ τῆς **ΕΖ** ἐφαπτομένης, ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου χωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΖΒΔ** χωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **ΒΑΔ** τμήματι συνισταμένῃ χωνία, ἡ δὲ ὑπὸ **ΕΒΔ** χωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **ΔΓΒ** τμήματι συνισταμένῃ χωνία.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **B** τῇ **EZ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **BA**, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **BA** περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ **Γ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**, **ΓΒ**.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ **EZ** κατὰ τὸ **B**, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἥκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ **BA**, ἐπὶ τῆς **BA** ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου.

ἡ **BA** ἄρα διάμετός ἐστι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΔΒ** γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὕσα ὀρθή ἐστίν. ῥοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΒΔ** μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΖ** ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΒΔ**. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ**· ῥοιπή ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΒΖ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ**.



καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΔΒΖ**, **ΔΒΕ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·

αἱ ἄρα ὑπὸ **ΔΒΖ**, **ΔΒΕ** ταῖς ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΓΔ** ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΖ** ἐδείχθη ἴση· ῥοιπή ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΒΕ** τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ **ΔΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΓΒ** γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἢ γ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ **Γ**· δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς **ΑΒ** γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**. Ἡ δὲ πρὸς τῷ **Γ** [γωνία] ἥτοι ὀξεῖα ἐστὶν ἢ ὀρθή ἢ ἀμβλεία· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ **Α** σημείῳ τῇ πρὸς τῷ **Γ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**.

ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ **AEB** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς **AB** τμήμα κύκλου τὸ **AEB** δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ **Γ** ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ **AB** εὐθείᾳ καὶ τῷ **A** σημείῳ ἡ ὑπὸ **BAΔ**, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ **AD** πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ **AE**, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ **AB** δίχα κατὰ τὸ **Z**, καὶ τῇ **AB** πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ **ZH**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **HB**.

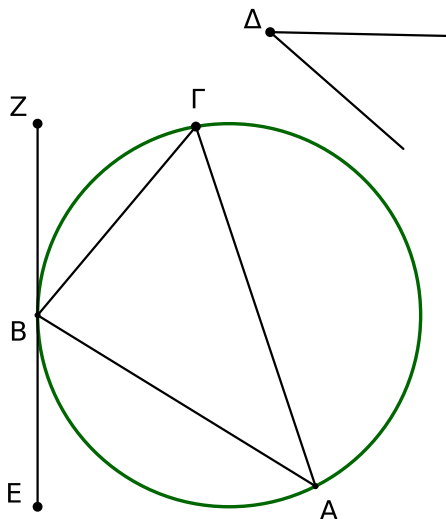
Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ **AZ** τῇ **ZB**, καὶ κοινὴ ἡ **ZH**, δύο δὴ αἱ **AZ**, **ZH** δύο ταῖς **BZ**, **ZH** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **AZH** γωνία τῇ ὑπὸ **BZH** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **AH** βάσει τῇ **BH** ἴση ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ **H** διαστήματι δὲ τῷ **HA** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ **B**. ἐρχέσθω ὡς ὁ **AEB**.

καὶ ἐπεὶ τῇ **AE** διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ **AD**, ἡ **AD** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **AEB** κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **A** ἐπαφῆς διῆκται ἡ **AB**· ἡ ἄρα ὑπὸ **BAΔ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ **AΘB** συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **BAΔ** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Γ** ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ **AΘB** ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς **AB** γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ **AΘB** δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ἡδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ABΓ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ **Δ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **ABΓ** κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ **Δ**.

Ἦχθω τοῦ **ABΓ** ἐφαπτομένη ἡ **EZ** κατὰ τὸ **B** σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ZB** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **B** τῇ πρὸς τῷ **Δ** γωνία ἴση ἡ ὑπὸ **ZBΓ**.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ **ABΓ** ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ **EZ**, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **B** ἐπαφῆς διῆκται ἡ **BΓ**, ἡ ὑπὸ **ZBΓ** ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **BAΓ**

ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένη γωνία. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ZBΓ** τῇ πρὸς τῷ **Δ** ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Δ** [γωνία].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ **ΑΒΓ** τμήμα ἀφίρηται τὸ **ΒΑΓ** δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ **Δ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λε'.

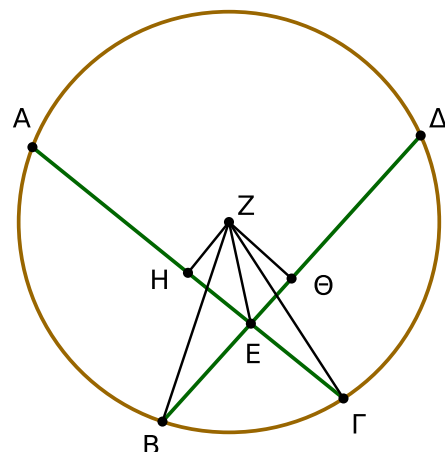
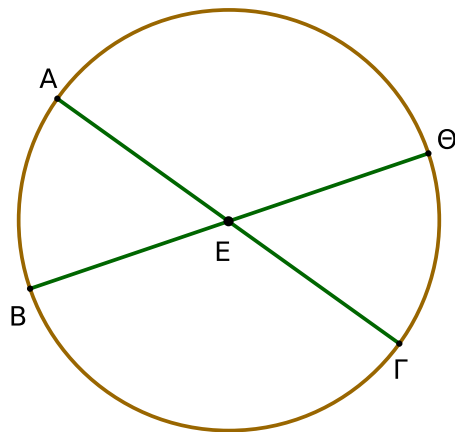
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήληας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ **ΑΒΓΔ** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήληας κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ **Ε** κέντρον εἶναι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ**, **ΔΕ**, **ΕΒ** καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ **ΑΓ**, **ΔΒ** διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὰς **ΑΓ**, **ΔΒ** εὐθείας κάθετοι ἦχθωσαν αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΕ**.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΗΖ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΓ** πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ **ΑΗ** τῇ **ΗΓ**. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Η**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Ε**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΓ** [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ



τῶν ἀπὸ τῶν **HE**, **HZ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΓH**, **HZ**. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **EH**, **HZ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ZE**, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΓH**, **HZ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ZΓ**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **AE**, **EG** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZE** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ZΓ**. ἴση δὲ ἡ **ZΓ** τῇ **ZB**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **AE**, **EG** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **EZ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ZB**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΔE**, **EB** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZE** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ZB**.

ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **AE**, **EG** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZE** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ZB**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **AE**, **EG** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZE** ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔE**, **EB** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZE**. κοινὸν ἀφῆρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ZE**. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **AE**, **EG** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔE**, **EB** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἢς'.

Ἐὰν κύκλου ἀληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ABΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτός τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **ABΓ** κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **ΔΓ**[**A**], **ΔB**. καὶ ἡ μὲν **ΔΓA** τεμνέτω τὸν **ABΓ** κύκλον, ἡ δὲ **BΔ** ἐφαπτέσθω· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔB** τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα [**Δ**]**ΓA** ἦτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ οὐ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ **Z** κέντρον τοῦ **ABΓ** κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ZB**. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ZBΔ**.

καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** δίχα τέτμηται κατὰ τὸ **Z**, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ **ΓΔ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ZΔ**. ἴση δὲ ἡ **ZΓ** τῇ **ZB**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZB** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ZΔ**.

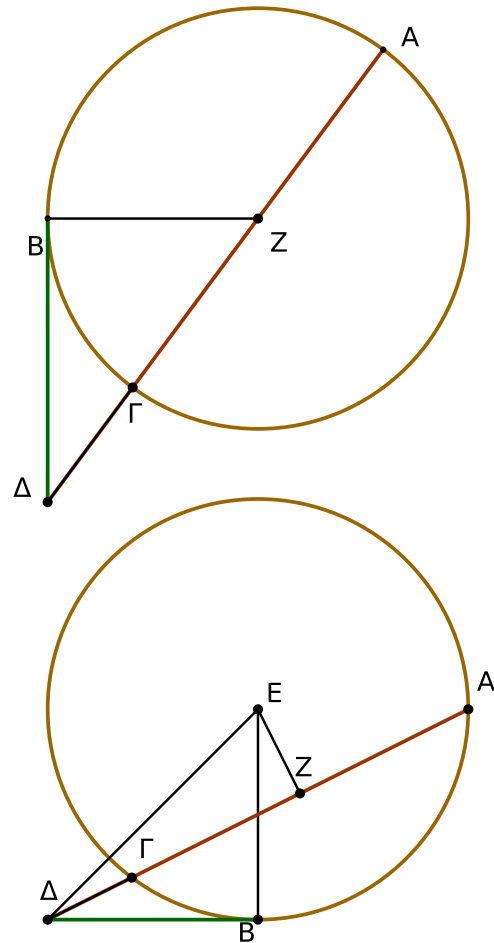
τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ZΔ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ZB**, **BΔ**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ZB** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ZB**, **BΔ**. κοινὸν ἀφῆρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ZB**. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔB** ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ $\Delta\Gamma\Lambda$ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε , καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἦχθω ἡ ΕΖ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ , ΕΓ , ΕΔ .

ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΔ . καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση.

καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ . κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ , ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΔ , ΖΕ . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ , ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ · ὀρθὴ γάρ [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΕΖΓ [γωνία]· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ , ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ . ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ , ΒΔ · ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ , ΒΔ . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ , ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ .

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεΐαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανόμενης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



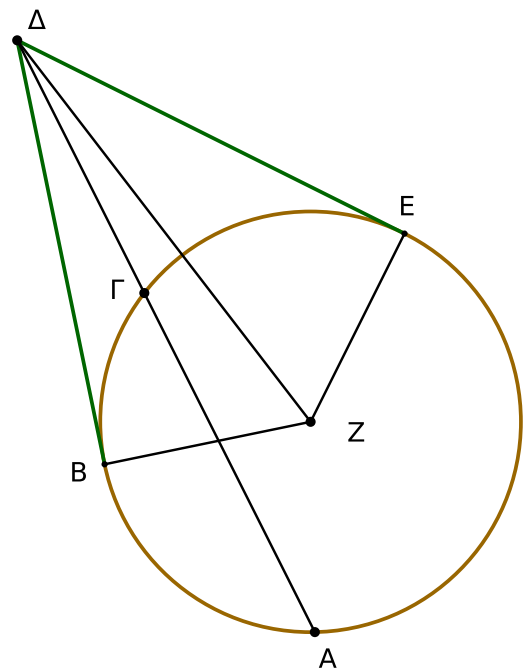
ηζ'.

Ἐάν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **ΔΓΑ**, **ΔΒ**, καὶ ἡ μὲν **ΔΓΑ** τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ **ΔΒ** προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**. λέγω, ὅτι ἡ **ΔΒ** ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτομένη ἡ **ΔΕ**, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΕ**, **ΖΒ**, **ΖΔ**. ἡ ἄρα ὑπὸ **ΖΕΔ** ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΔΕ** ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, τέμνει δὲ ἡ **ΔΓΑ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΕ**. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**: ἴση ἄρα ἡ **ΔΕ** τῇ **ΔΒ**. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ **ΖΕ** τῇ **ΖΒ** ἴση: δύο δὴ αἱ **ΔΕ**, **ΕΖ** δύο ταῖς **ΔΒ**, **ΒΖ** ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΖΔ**: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΒΖ** ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΔΕΖ**: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΖ**. καὶ ἐστὶν ἡ **ΖΒ** ἐκβαλλομένη διάμετρος: ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου: ἡ **ΔΒ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου. ὁμοίως δὲ δευχθήσεται, κὰν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς **ΑΓ** τυχάνῃ.

Ἐάν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπεται τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 4

Ὅροι

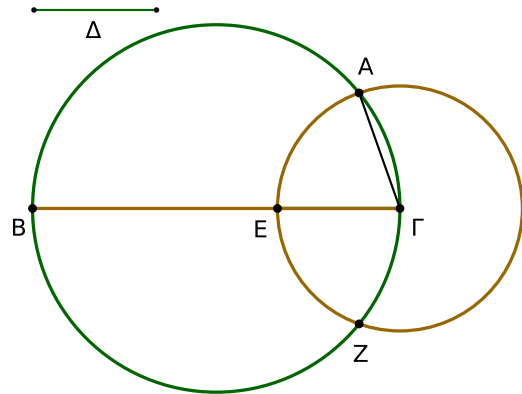
- α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐχγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐχγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐχγράφεται, ᾗπτηται.
- β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιχράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιχραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιχράφεται, ᾗπτηται.
- γ'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐχγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐχγραφομένου ᾗπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.
- δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιχράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιχραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.
- ε'. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐχγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐχγράφεται, ᾗπτηται.
- ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιχράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιχράφεται, ᾗπτηται.
- ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾗ τοῦ κύκλου.

α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ $Δ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῇ $Δ$ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦχθω τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΒΓ$. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $Δ$, γεχονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῇ $Δ$ εὐθείᾳ ἴση ἡ $ΒΓ$. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῆς $Δ$, κείσθω τῇ $Δ$ ἴση ἡ $ΓΕ$, καὶ κέντρῳ τῷ $Γ$ διαστήματι δὲ τῷ $ΓΕ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΕΑΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΑ$. Ἐπεὶ οὖν τὸ $Γ$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΕΑΖ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΓΕ$. ἀλλὰ τῇ $Δ$ ἡ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ $Δ$ ἄρα τῇ $ΓΑ$ ἐστὶν ἴση.

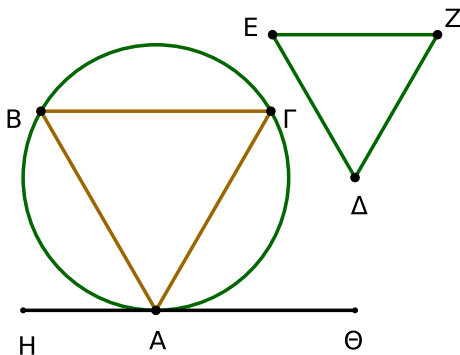


Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν $ΑΒΓ$ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $Δ$ ἴση ἐνήρμοσται ἡ $ΓΑ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσοχώνιον τρίγωνον ἐχγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, τὸ δὲ δοθέν τριγωνὸν τὸ $ΔΕΖ$ · δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσοχώνιον τρίγωνον ἐχγράψαι.



Ἦχθω τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $ΗΘ$ κατὰ τὸ $Α$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΑΘ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΘΑΓ$, πρὸς δὲ τῇ $ΑΗ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$ [γωνίᾳ] ἴση ἡ ὑπὸ $ΗΑΒ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΒΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ΑΒΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ $ΑΘ$, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ $Α$ ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$, ἡ ἄρα ὑπὸ $ΘΑΓ$

ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**. ἀλλ' ἢ ὑπὸ **ΘΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστὶν ἴση.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστὶν ἴση [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ, καὶ ἐχχέγραπται εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον]. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐχχέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

χ'.

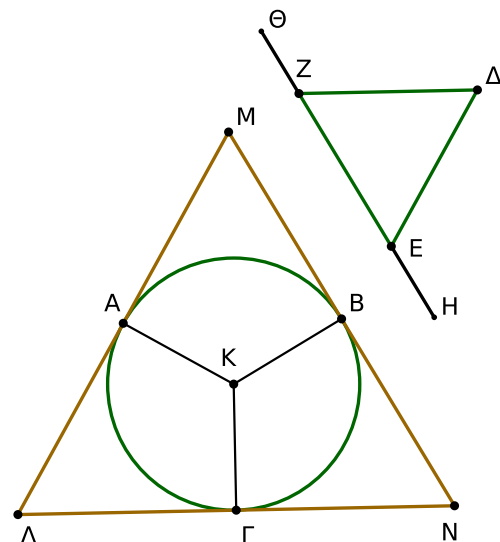
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΔΕΖ**· δεῖ δὴ περὶ τὸν **ΑΒΓ** κύκλον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ **EZ** ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ **Η, Θ** σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου κέντρον τὸ **Κ**, καὶ διήχθω, ὥς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ **ΚΒ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΚΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Κ** τῇ μὲν ὑπὸ **ΔΕΗ** γωνία ἴση ἢ ὑπὸ **ΒΚΑ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΔΖΘ** ἴση ἢ ὑπὸ **ΒΚΓ**, καὶ διὰ τῶν **Α, Β, Γ** σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου αἱ **ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ**.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου αἱ **ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ** κατὰ τὰ **Α, Β, Γ** σημεία, ἀπὸ δὲ τοῦ **Κ** κέντρου ἐπὶ τὰ **Α, Β, Γ** σημεία ἐπέζευχμένοι εἰσὶν αἱ **ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ**, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς **Α, Β, Γ** σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ **ΑΜΒΚ** τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ **ΑΜΒΚ**, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ **ΚΑΜ, ΚΒΜ** γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΑΚΒ, ΑΜΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΔΕΗ, ΔΕΖ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΚΒ, ΑΜΒ** ταῖς ὑπὸ **ΔΕΗ, ΔΕΖ** ἴσαι εἰσὶν, ὥν ἡ ὑπὸ **ΑΚΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΗ** ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΜΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δευχθήσεται, ὅτι

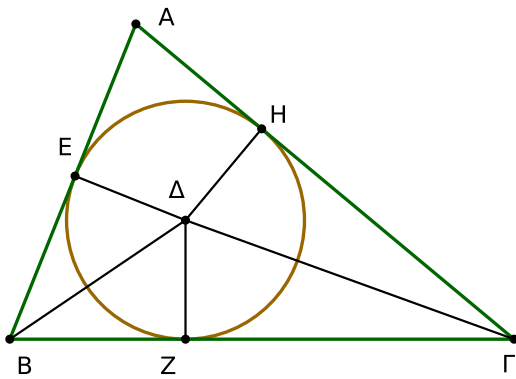


καὶ ἡ ὑπὸ ΛNB τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MLN [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{Z}$ ἐστὶν ἴση. ἰσοχώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛMN τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ· καὶ περιέχραπται περὶ τὸν $\text{AB}\Gamma$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσοχώνιον τρίγωνον περιέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐχγράψαι.



Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $\text{AB}\Gamma$. δεῖ δὲ εἰς τὸ $\text{AB}\Gamma$ τρίγωνον κύκλον ἐχγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ $\text{AB}\Gamma$, $\text{A}\Gamma\text{B}$ γωνίαι δίχα ταῖς $\text{B}\Delta$, $\Gamma\Delta$ εὐθείαις, καὶ συμβαλήτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς AB , $\text{B}\Gamma$, ΓA εὐθείας κάθετοι αἱ ΔE , ΔZ , ΔH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\text{AB}\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\text{GB}\Delta$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\text{BE}\Delta$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $\text{BZ}\Delta$ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ $\text{EB}\Delta$, $\text{ZB}\Delta$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔ-

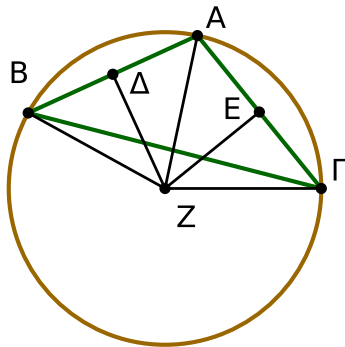
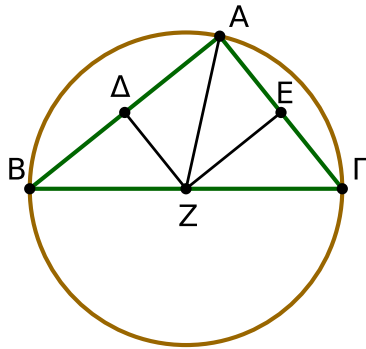
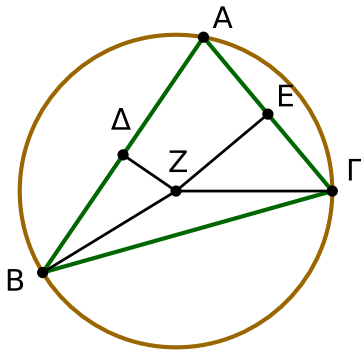
χοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν $\text{B}\Delta$ · καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔE τῇ ΔZ .

διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔH τῇ ΔZ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔE , ΔZ , ΔH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν E , Z , H κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάπεται τῶν AB , $\text{B}\Gamma$, ΓA εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , H σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν E , Z , H γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς AB , $\text{B}\Gamma$, ΓA εὐθείας· ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐχγεγραμμένος εἰς τὸ $\text{AB}\Gamma$ τρίγωνον. ἐχγεγράφη ὡς ὁ ZHE .

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $\text{AB}\Gamma$ κύκλος ἐχέχραπται ὁ EZH · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.



Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ . δεῖ δὲ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ AB , AG εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ , E σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Δ , E σημείων ταῖς AB , AG πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔZ , EZ : συμπεσοῦνται δὴ ἥτοι ἐντὸς τοῦ ABΓ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς BΓ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς BΓ .

Συμπιπτεύωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB , ZΓ , ZA . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ ΔB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ , βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ GZ τῇ AZ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ ZΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ZA , ZB , ZΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρω τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν A , B , Γ κύκλος χραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ABΓ .

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐπὶ τῆς BΓ εὐθείας κατὰ τὸ Z , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐκτὸς τοῦ ABΓ τριγώνου κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ , BZ , ΓZ . καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ ΔB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ , βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ BZ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ GZ

τῇ **AZ** ἔστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **BZ** τῇ **ZΓ** ἔστιν ἴση· ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρῳ τῷ **Z** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **ZA**, **ZB**, **ZΓ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ **ABΓ** τρίγωνον.

Περὶ τὸ δοθέν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγχράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ABΓΔ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ABΓΔ** κύκλον τετράγωνον ἐγχράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ **ABΓΔ** κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήληαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ**.

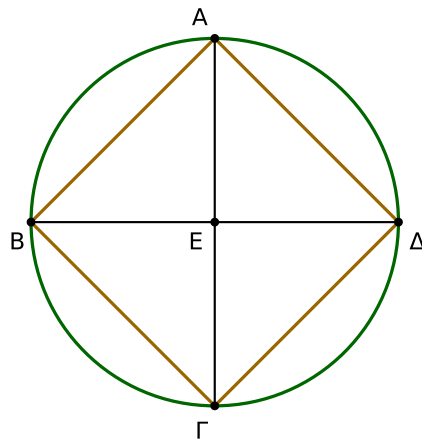
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΕΔ**· κέντρον γὰρ τὸ **Ε**· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΕΑ**, βάσις ἄρα ἡ **ΑΒ** βάσει τῇ **ΑΔ** ἴση ἐστίν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν **ΒΓ**, **ΓΔ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΑΔ** ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ABΓΔ** τετράπλευρον. λήξω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ ἡ **ΒΔ** εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ **ABΓΔ** κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΑΔ**· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** γωνία.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΑ** ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ABΓΔ** τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγχέχραπται εἰς τὸν **ABΓΔ** κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγχέχραπται τὸ **ABΓΔ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

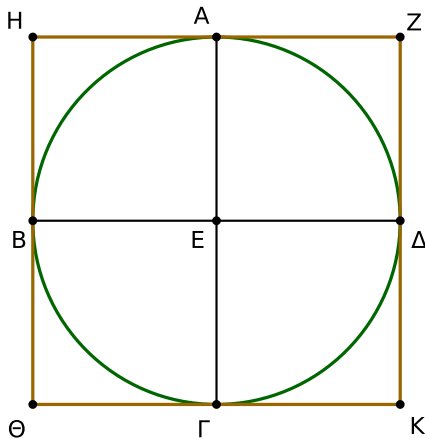


ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**, καὶ διὰ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου αἱ **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΚΖ**. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ **ΖΗ** τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ **Ε** κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ **Α** ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ **ΕΑ**, αἱ ἄρα πρὸς τῷ **Α** γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Β**, **Γ**, **Δ** σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν.



καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΒΗ**, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΗΘ** τῇ **ΑΓ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΖΚ** ἐστὶ παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ **ΗΘ** τῇ **ΖΚ** ἐστὶ παράλληλος.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάτερα τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** τῇ **ΒΕΔ** ἐστὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμοι ἄρα ἐστὶ τὰ **ΗΚ**, **ΗΓ**, **ΑΚ**, **ΖΒ**, **ΒΚ**. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΗΖ** τῇ **ΘΚ**, ἡ δὲ **ΗΘ** τῇ **ΖΚ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν **ΑΓ** ἑκατέρω τῶν **ΗΘ**, **ΖΚ**, ἡ δὲ **ΒΔ** ἑκατέρω τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** ἐ-

στιν ἴση [καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν **ΗΘ**, **ΖΚ** ἑκατέρω τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** ἐστὶν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΗΘΚ** τετράπλευρον. ἴλεω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΗΒΕΑ**, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ**, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΒ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Θ**, **Κ**, **Ζ** γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΗΘΚ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶν. καὶ περιέχραπται περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον.

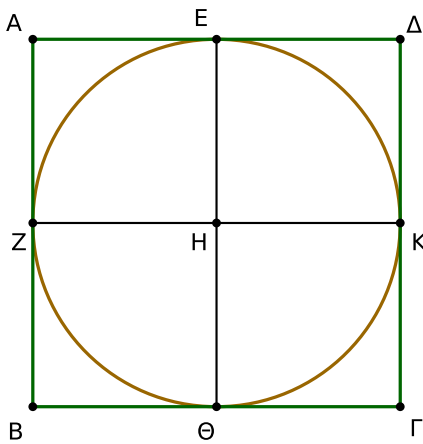
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐχγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ **ΑΒΓΔ**. δεῖ δὴ εἰς τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον κύκλον ἐχγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν **ΑΔ**, **ΑΒ** δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ** σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Ε** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** παράλληλος ἦχθω ὁ **ΕΘ**, διὰ δὲ τοῦ **Ζ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΒΓ** παράλληλος ἦχθω ἡ **ΖΚ**.



παράλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκαστον τῶν **ΑΚ**, **ΚΒ**, **ΑΘ**, **ΘΔ**, **ΑΗ**, **ΗΓ**, **ΒΗ**, **ΗΔ**, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσίν].

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΑΒ**, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν **ΑΔ** ἡμίσεια ἡ **ΑΕ**, τῆς δὲ **ΑΒ** ἡμίσεια ἡ **ΑΖ**, ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΖ**· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΖΗ** τῇ **ΗΕ**.

ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΖΗ**, **ΗΕ** ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ **ΗΕ**, **ΗΖ**, **ΗΘ**, **ΗΚ** ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσίν].

ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ **Η** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάπεται τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**,

ΓΔ, **ΔΑ** εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** γωνίας·

εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ**, ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ὁ κέντρω τῷ **Η** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** εὐθείας. ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐχγεγραμμένος εἰς τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐχέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ · δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ , ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ε .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ , κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ , δύο δὲ αἱ ΔΑ , ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ , ΑΓ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ .

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ , ΒΓΔ , ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ , ΔΒ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ , τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ , καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκατέρᾳ τῶν ΕΑ , ΕΒ [εὐθειῶν] ἐκατέρᾳ τῶν ΕΓ , ΕΔ ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ , ΕΒ , ΕΓ , ΕΔ ἴσαι ἀλλήλοις εἰσὶν.

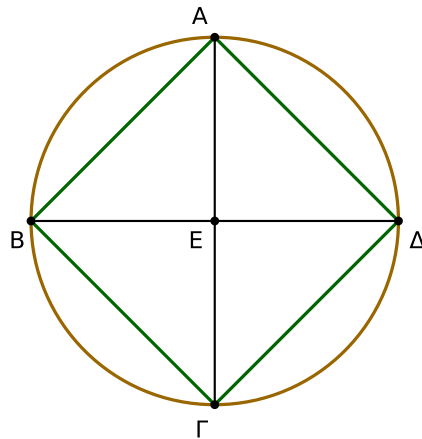
ὁ ἄρα κέντρω τῷ Ε καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν Α , Β , Γ , Δ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφη ὡς ὁ ΑΒΓΔ .

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἐκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίου τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ , ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρω τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφη ὁ ΒΔΕ , καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕτῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ · καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ , ΔΓ , καὶ περιγεγράφη περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ .



Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $BΔ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $BΔ$.

καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $ΑΓΔ$ εἴληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ B , καὶ ἀπὸ τοῦ B πρὸς τὸν $ΑΓΔ$ κύκλον προσπεπτώκασιν δύο εὐθεῖαι αἱ BA , $BΔ$, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $BΔ$, ἡ $BΔ$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΑΓΔ$ κύκλου.

ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ $BΔ$, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ $Δ$ ἐπαφῆς διῆκται ἡ $ΔΓ$, ἡ ἄρα ὑπὸ $BΔΓ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$.

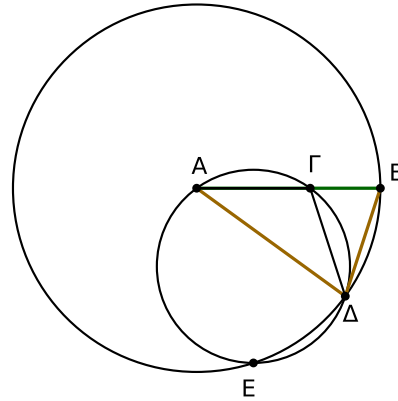
ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BΔΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$ · ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BΔΑ$ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $BΔΑ$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$.

ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $BΔΑ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΔ$ τῇ AB ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΒΑ$ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$ ἐστὶν ἴση.

αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$, $BΓΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ $BΔ$ πλευρᾷ τῇ $ΔΓ$. ἀλλὰ ἡ $BΔ$ τῇ $ΓΑ$ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $ΓΔ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ εἰσι διπλασίους.

ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΓΔΑ$ ἐστὶ διπλή. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$ · καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔΒΑ$ τῆς ὑπὸ $ΔΑΒ$ ἐστὶ διπλή.

ἴσοσκελές ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ $ΑΒΔ$ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ $ΔΒ$ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

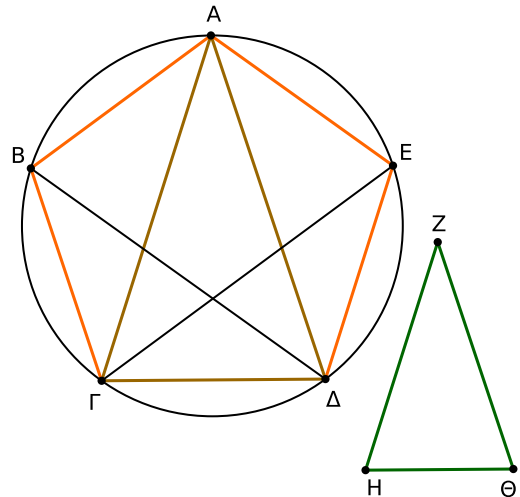


ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσοχώνιον ἐχγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσοχώνιον ἐχγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ **ΖΗΘ** διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς **Η**, **Θ** γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ **Ζ**, καὶ ἐχγεγράφθω εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον τῷ **ΖΗΘ** τριγώνῳ ἰσοχώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΓΔ**, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ **Ζ** γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ **ΓΑΔ**, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς **Η**, **Θ** ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** τῆς ὑπὸ **ΓΑΔ** ἐστὶ διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΓΕ**, **ΔΒ** εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΑ**.



Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** γωνιῶν διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΓΑΔ**, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν **ΓΕ**, **ΔΒ** εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΑΓ**, **ΑΓΕ**, **ΕΓΔ**, **ΓΔΒ**, **ΒΔΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον.

Ἰλέχω δὴ, ὅτι καὶ ἰσοχώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ **ΑΒ** περιφέρεια τῇ **ΔΕ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΒΓΔ**· ὅλη ἄρα ἡ **ΑΒΓΔ** περιφέρεια ὅλη τῇ **ΕΔΓΒ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς **ΑΒΓΔ** περιφέρειας γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ**, ἐπὶ δὲ τῆς **ΕΔΓΒ** περιφέρειας γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΕΔ** ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ** γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΒΑΕ**, **ΑΕΔ** ἐστὶν ἴση· ἰσοχώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

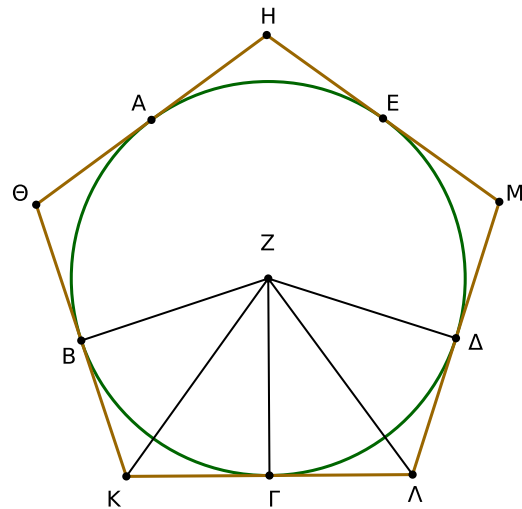
Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσοχώνιον ἐχέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὲ περὶ τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐχχεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ **Α, Β, Γ, Δ, Ε**, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς **ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ** περιφερείας· καὶ διὰ τῶν **Α, Β, Γ, Δ, Ε** ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ **ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ**, καὶ εἰλήφθω τοῦ **ΑΒΓΔΕ** κύκλου κέντρον τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ**.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν **ΚΛ** εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓΔΕ** κατὰ τὸ **Γ**, ἀπὸ δὲ τοῦ **Ζ** κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ **Γ** ἐπαφὴν ἐπέzeugται ἡ **ΖΓ**, ἡ **ΖΓ** ἄρα κάθετὸς ἐστὶν ἐπὶ τὴν **ΚΛ**· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ **Γ** γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Β, Δ** σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν.

καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΓΚ** γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΖΚ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΓ, ΓΚ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΒ, ΒΚ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΚ**· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν **ΖΓ, ΓΚ** τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΒ, ΒΚ** ἐστὶν ἴσα, ὣν τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΓ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΚ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ **ΒΚ** τῇ **ΓΚ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΒ** τῇ **ΖΓ**, καὶ κοινὴ ἡ **ΖΚ**, δύο δὴ αἱ **ΒΖ, ΖΚ** δυσὶ ταῖς **ΓΖ, ΖΚ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΒΚ** βάσει τῇ **ΓΚ** [ἐστὶν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΚ** [γωνία] τῇ ὑπὸ **ΚΖΓ** ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΚΖ** τῇ ὑπὸ **ΖΚΓ** διπλῇ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΚΖΓ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΚΓ** τῆς ὑπὸ **ΖΚΓ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΖΔ** τῆς ὑπὸ **ΓΖΛ** ἐστὶ διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΛΓ** τῆς ὑπὸ **ΖΛΓ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** περιφέρεια τῇ **ΓΔ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΖΓ** τῇ ὑπὸ **ΓΖΔ**. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΚΖΓ** διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΛΖΓ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΚΖΓ** τῇ ὑπὸ **ΛΖΓ**.

ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΓΚ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΓΛ** ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΖΚΓ, ΖΛΓ** τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΖΓ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς

λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ , ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ , διπλῇ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῇ. καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ΘΗ , ΗΜ , ΜΛ ἐκατέρα τῶν ΘΚ , ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον.

λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ , καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῇ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ , τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῇ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ , καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ , ΘΗΜ , ΗΜΛ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΛ , ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ , ΘΚΛ , ΚΛΜ , ΛΜΗ , ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιέχραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιέχραπται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

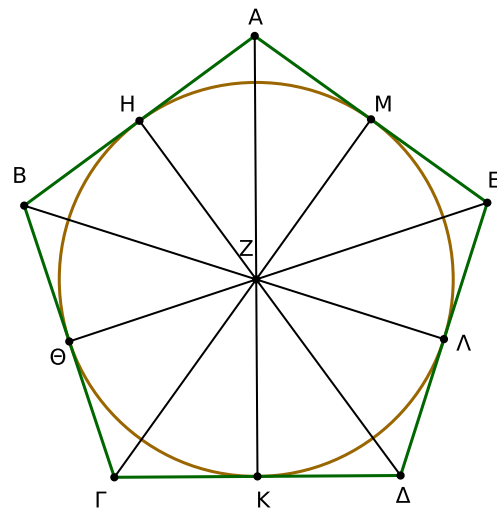
ιζ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἔχγραψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ · δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἔχγραψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ , ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἐκατέρας τῶν ΓΖ , ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ , ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ , ΖΑ , ΖΕ εὐθεῖαι.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ , κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ , δύο δὴ αἱ ΒΓ , ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ , ΓΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ [ἐστὶν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ .



καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** τῆς ὑπὸ **ΓΔΖ**, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΔΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΓΔΖ** τῇ ὑπὸ **ΓΒΖ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΒΑ** ἄρα τῆς ὑπὸ **ΓΒΖ** ἐστὶ διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ**· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΒΖ** εὐθείας.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΑΕ**, **ΑΕΔ** δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΖΑ**, **ΖΕ** εὐθειῶν.

ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου ἐπὶ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθείας κάθετοι αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, **ΖΚ**, **ΖΛ**, **ΖΜ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΘΓΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΚΓΖ**, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΖΘΓ** [ὀρθῇ] τῇ ὑπὸ **ΖΚΓ** ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΖΘΓ**, **ΖΚΓ** τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΖΓ** ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ **ΖΘ** κάθετος τῇ **ΖΚ** καθέτῳ.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν **ΖΛ**, **ΖΜ**, **ΖΗ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΖΘ**, **ΖΚ** ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, **ΖΚ**, **ΖΛ**, **ΖΜ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ὁ ἄρα κέντρος τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάπεται τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** σημείοις γωνίας.

εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀχομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ὁ κέντρος τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθείας· ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφη ὡς ὁ **ΗΘΚΛΜ**.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

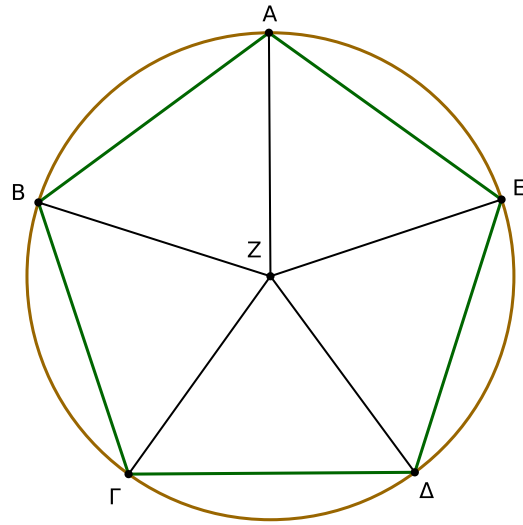
Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὴ περὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ** γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΓΖ**, **ΔΖ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ **Β**, **Α**, **Ε** σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ**.

ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθή-
σεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΓΒΑ**,
ΒΑΕ, **ΑΕΔ** γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ
ἑκάστης τῶν **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ** εὐθειῶν. καὶ
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** γωνία τῇ
ὑπὸ **ΓΔΕ**, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ **ΒΓΔ**
ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΖΓΔ**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΓΔΕ**
ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΓΔΖ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΓΔ** ἄ-
ρα τῇ ὑπὸ **ΖΔΓ** ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ
πλευρὰ ἡ **ΖΓ** πλευρᾷ τῇ **ΖΔ** ἐστὶν ἴση.

ὁμοίως δὴ δεικθήσεται, ὅτι καὶ ἑ-
κάστη τῶν **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ** ἑκατέρᾳ τῶν
ΖΓ, **ΖΔ** ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐ-
θεῖαι αἱ **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΔ**, **ΖΕ** ἴσαι ἀλ-
λήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ζ** καὶ
διαστήματι ἐνὶ τῶν **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΔ**,
ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγε-
γραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ **ΑΒΓΔΕ**.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον,
κύκλος περιέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ΙΕ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον
ἐχγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕΖ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλον ἑξά-
γωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐχγράψαι.

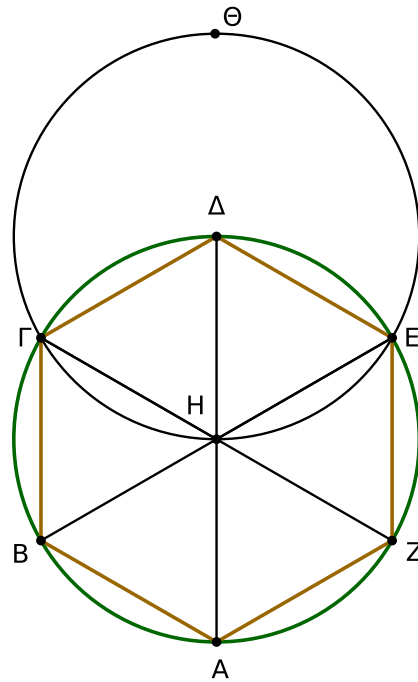
Ἦχθω τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλου διάμετρος ἡ **ΑΔ**, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ
κύκλου τὸ **Η**, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Δ** διαστήματι δὲ τῷ **ΔΗ** κύκλος χεγράφθω
ὁ **ΕΗΓΘ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΕΗ**, **ΓΗ** διήχθωσαν ἐπὶ τὰ **Β**, **Ζ** σημεία, καὶ
ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΖΑ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξάγωνον
ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ
ΗΕ τῇ **ΗΔ**. πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Δ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΗΓΘ** κύκλου, ἴση
ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΔΗ**. ἀλλ' ἡ **ΗΕ** τῇ **ΗΔ** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ **ΗΕ** ἄρα τῇ **ΕΔ**
ἴση ἐστὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΗΔ** τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ
γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΗΔΕ**, **ΔΕΗ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδὴ περ τῶν ἰσοσκελῶν
τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς
τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΔ** γωνία τρίτον ἐστὶ

δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δευχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΗΓ** τρίτον δύο ὀρθῶν.

καὶ ἐπεὶ ἡ **ΓΗ** εὐθεῖα ἐπὶ τὴν **ΕΒ** σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ **ΕΗΓ**, **ΓΗΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ **ΒΗΑ**, **ΑΗΖ**, **ΖΗΕ** ἴσαι εἰσὶν [ταῖς ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ**].

αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ**, **ΒΗΑ**, **ΑΗΖ**, **ΖΗΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἔξ ἄρα περιφέρειαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΖΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἔξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ το



ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσοχώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΑ** περιφέρεια τῇ **ΕΔ** περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΑΒΓΔ** περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ **ΖΑΒΓΔ** ὅλη τῇ **ΕΔΓΒΑ** ἐστὶν ἴση· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς **ΖΑΒΓΔ** περιφέρειας ἡ ὑπὸ **ΖΕΔ** γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς **ΕΔΓΒΑ** περιφέρειας ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**.

ὁμοίως δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ **ΑΖΕ**, **ΖΕΔ** γωνιῶν· ἰσοχώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἐχχέχραπται εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλον. Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσοχώνιον ἐχχέχραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π ὁ ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ὅμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιχράψεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσοχώνιον ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐχχράψομεν τε καὶ περιχράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΙΣ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἔχγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἔχγράψαι.

Ἐχχεγράφθω εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐχγραφομένου πλευρὰ ἡ **ΑΓ**, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ **ΑΒ**· οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν **ΑΒΓ** περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ **ΑΒ** περιφέρεια πέμpton οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν·

λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΓ** τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ **ΒΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε**· ἐκατέρᾳ ἄρα τῶν **ΒΕ**, **ΕΓ** περιφερειῶν πεντεκαϊδεκάτὸν ἔστι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου.

Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς **ΒΕ**, **ΕΓ** ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν **ΑΒΓΔ[Ε]** κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐχχεγραμμένον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅμοιως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιχρησθήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαϊδεκάγωνον κύκλον ἔχγραφομέν τε καὶ περιχρησθήσεται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

