Γυμνάσιο, Λύκειο

Ο τυχερός τυπογράφος

Ένας τυπογράφος που στοιχειοθετούσε κάποιο βιβλίο Μαθηματικών, αντί να γράψει το γινόμενο 1×64, από λάθος του έγραψε 16×4 (μετακίνησε το $\times$ μία θέση δεξιά). «Μην ανησυχείς για το τυπογραφικό σφάλμα» τον καθησύχασε ο μαθηματικός κ. Τζίνης, «γιατί όπως θα παρατήρησες τα δύο αυτά γινόμενα είναι ίσα. Και τα δύο δίνουν 64. Τι τύχη!». Μετά από λίγη σκέψη ο κ. Τζίνης, διαπίστωσε πέρα από τις αυτονόητες ισότητες $1\times 11=11\times 1$, $2\times 22=22\times 2$, … , $9\times 99=99\times 9$, υπάρχουν και άλλα ζευγάρια αριθμών που έχουν την ίδια ιδιότητα, δηλαδή η κατά λάθος μετακίνηση του $\times$ τυχαίνει να δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Ένα τέτοιο είναι το $1\times 95=19\times 5$ (και τα δύο γινόμενα είναι ίσα με 95). Ως καλός μαθηματικός ο κ. Τζίνης αναρωτήθηκε αν υπάρχουν και άλλοι ακόμα μονοψήφιοι Α, Β, Γ για τους οποίους τα γινόμενα $\text{ΑΒ}\times\Gamma$, $\text{Α}\times\text{ΒΓ}$ να είναι ίσα. (Σημειώνουμε ότι τους αριθμούς με ψηφία Α, Β, Γ κτλ, συνηθίζεται να τους συμβολίζουμε $\overline{\text{ΑΒ}}$, $\overline{\text{ΑΒΓ}}$ κτλ, για να τους διακρίνουμε από τα ΑΒ, ΑΒΓ τα οποία είναι τα γινόμενα $\text{Α}\cdot\text{Β}$, $\text{Α}\cdot\text{Β}\cdot\Gamma$, αντίστοιχα. Έτσι για παράδειγμα $\overline{\text{ΑΒ}}$=10Α+Β, και $\overline{\text{ΑΒΓ}}$=100Α+10Β+Γ. Στα παρακάτω θα ακολουθήσουμε αυτόν τον συμβολισμό.)

Πρόβλημα 1. Βοηθείστε τον κ. Τζίνη να βρει όλους τους μονοψήφιους Α, Β, Γ με $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓ}}=\overline{\text{ΑΒ}}\times\Gamma$. Εδώ τα Α, Β, Γ είναι μη μηδενικά και όχι όλα ίσα μεταξύ τους.

Λύση. Θέλουμε να ισχύει μία ισότητα της μορφής $\text{Α}\times(10\text{Β}+\Gamma)=(10\text{Α}+\text{Β})\times\Gamma$. Μετά από κάποιες πράξεις η ισότητα αυτή γράφεται 10Α(Γ-Β)=(Α-Β)Γ (*). Παρατηρούμε ότι ο 5 είναι πρώτος διαιρέτης του αριστερού μέλους. Από την μοναδικότητα της ανάλυσης αριθμών σε πρώτους παράγοντες, πρέπει το 5 να είναι διαιρέτης είτε του Γ είτε του Α-Β που εμφανίζονται στο δεξί γινόμενο. Στην πρώτη περίπτωση θα είναι Γ=5 και στην δεύτερη Α-Β = 0 ή 5 ή -5, που σημαίνει Α=Β ή Α=Β+5 ή Α=Β-5. Θέτοντας κάθε μία από αυτές, χωριστά, στην (*), και με απλές δοκιμές θα καταλήξουμε στις λύσεις που φαίνονται στον πίνακα δεξιά.

1x64 =16x4	**1x95 =19x5**
2x65 = 26x5	**4x98 = 49x8**

Ο κ. Τζίνης δεν σταμάτησε εκεί. Κάθε καλός επιστήμονας πρέπει να βρίσκει αφορμή από ένα φαινόμενο για να μελετήσει και τα παρεμφερή ώστε να αποκτήσει καλύτερη εικόνα των γεγονότων. Έβγαλε λοιπόν χαρτί, μολύβι και κομπιουτεράκι και άρχισε να ψάχνει. Με μεθόδους όπως στην παραπάνω λύση γρήγορα βρήκε το $6\times 545=654\times 5$ (και τα δύο είναι ίσα με 3270). Γύρισε τότε στον τυπογράφο και του έθεσε το εξής πρόβλημα:

Πρόβλημα 2. Να βρεθούν μερικά παραδείγματα όπου ισχύει η ισότητα $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓΔ}}=\overline{\text{ΑΒΓ}}\times\Delta$. Δεν ψάχνουμε όλες τις περιπτώσεις αλλά αρκούν μερικές. Κατόπιν να βρεθούν παραδείγματα με $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓΔΕ}}=\overline{\text{ΑΒΓΔ}}\times\text{Ε}$.

Ο πίνακας που ακολουθεί καταγράφει μερικές τέτοιες περιπτώσεις. Τα κοινά γινόμενα ανά ζεύγη είναι 3388, 3270, 2928, 12972 και 51888, αντίστοιχα.

- Δύσκολα προβλήματα μας βάζεις, απάντησε ο τυπογράφος, αλλά στην προσπάθειά μου να βρω αριθμούς με $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓΔ}}=\overline{\text{ΑΒΓ}}\times\Delta$ πάλι έκανα λάθος με το $\times$. Στην θέση της ισότητας στα γινόμενα που μου ζήτησες, εγώ έψαξα την $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓΔ}}=\overline{\text{ΑΒ}}\times\overline{\Gamma\Delta}$.
- Και λοιπόν, είπε ο κ. Τζίνης, βρήκες τέτοια νούμερα;
- Φυσικά. Αφού ξέρεις ότι τα Μαθηματικά είναι το χόμπι μου.

4x847 = 484x7
6x545 = 654x5
7x424 = 742x4
4x3243 = 4324x3
8x6486 = 8648x6

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν μερικά παραδείγματα όπου ισχύει η ισότητα $\text{Α}\times\overline{\text{ΒΓΔ}}=\overline{\text{ΑΒ}}\times\overline{\Gamma\Delta}$.

Ο πίνακας περιλαμβάνει παραδείγματα αυτού του είδους. Οι ισότητες μπορούν να ελεγχθούν με κομπιουτεράκι.

1x325 = 13x25
2x756 = 27x56
3x975 = 39x75
8x332 = 83x32

Ο κ. Τζίνης ενθουσιάστηκε. Δούλεψε όλη νύχτα και βρήκε πολλά ακόμη παραδείγματα στην ίδια οικογένεια προβλημάτων. Μερικά είναι κάπως περίεργα γιατί περιέχουν γινόμενα με περισσότερους από δύο όρους. Νάτα:

56x5045 = 56504x5

67x4024 = 67402x4

19x75x395 = 1975x3x95

73x9x42 = 7x3942

130x3x25 = 1x30x325

325x6x24 = 3x25x624

- Πολύ μου αρέσουν τα δύο τελευταία παραδείγματα, είπε ο τυπογράφος. Είσαι τυχερός κ. Τζίνη γιατί αν παρατήρησες ο αριθμός 325 είναι κοινός. Οπότε μπορείς να τα κολλήσεις με χειρουργική ακρίβεια για να φτιάξεις μια τριπλή ισότητα και με πολλούς παράγοντες:

130x3x25x6x24 = 1x30x325x6x24 = 1x30x3x25x624

- Θαυμάσια, απάντησε ο κ. Τζίνης. Όσο έκανες τα παραπάνω, εγώ έκανα άλλου είδους παραλλαγή στο πρόβλημα. Αντέστρεψα την σειρά των αριθμών και στα δύο ζεύγη, όπως λέμε $\overline{12}\times\overline{42}=\overline{21}\times\overline{24}$ με την ισότητα είναι σωστή (και τα δύο είναι ίσα με 504). Απίστευτο!

Πρόβλημα 4. Να βρεθούν μερικά παραδείγματα όπου ισχύει η ισότητα $\overline{\text{ΑΒ}}\times\overline{\Gamma\Delta}=\overline{\text{ΒΑ}}\times\overline{\Delta\Gamma}$.

Τα παραδείγματα του κ. Τζίνη είναι τα

12x63=21x36, 12x84=21x48, 13x62=31x26, 13x93=31x39, 14x82=41x28
23x64=32x46, 23x96=32x69, 24x63=42x36, 24x84=42x48, 26x93=62x39
34x86=43x68, 36x84=63x48, 46x96=64x69

Ο κ. Τζίνης βρήκε πολλά ακόμα παραδείγματα τυπογραφικής αβλεψίας που όμως το αποτέλεσμα είναι σωστό, όπως της μορφής $\text{Α}^{\text{Β}}\times\Gamma=\overline{\text{ΑΒΓ}}$ ή τις παραλλαγές του. Να μερικά: $3^4\times425=34425$, $31^2\times325=312325$ και, με κλάσματα, $2^5\cdot\frac{25}{31}=25\frac{25}{31}$, $11^2\cdot9\frac{1}{3}=1152\frac{1}{3}$.