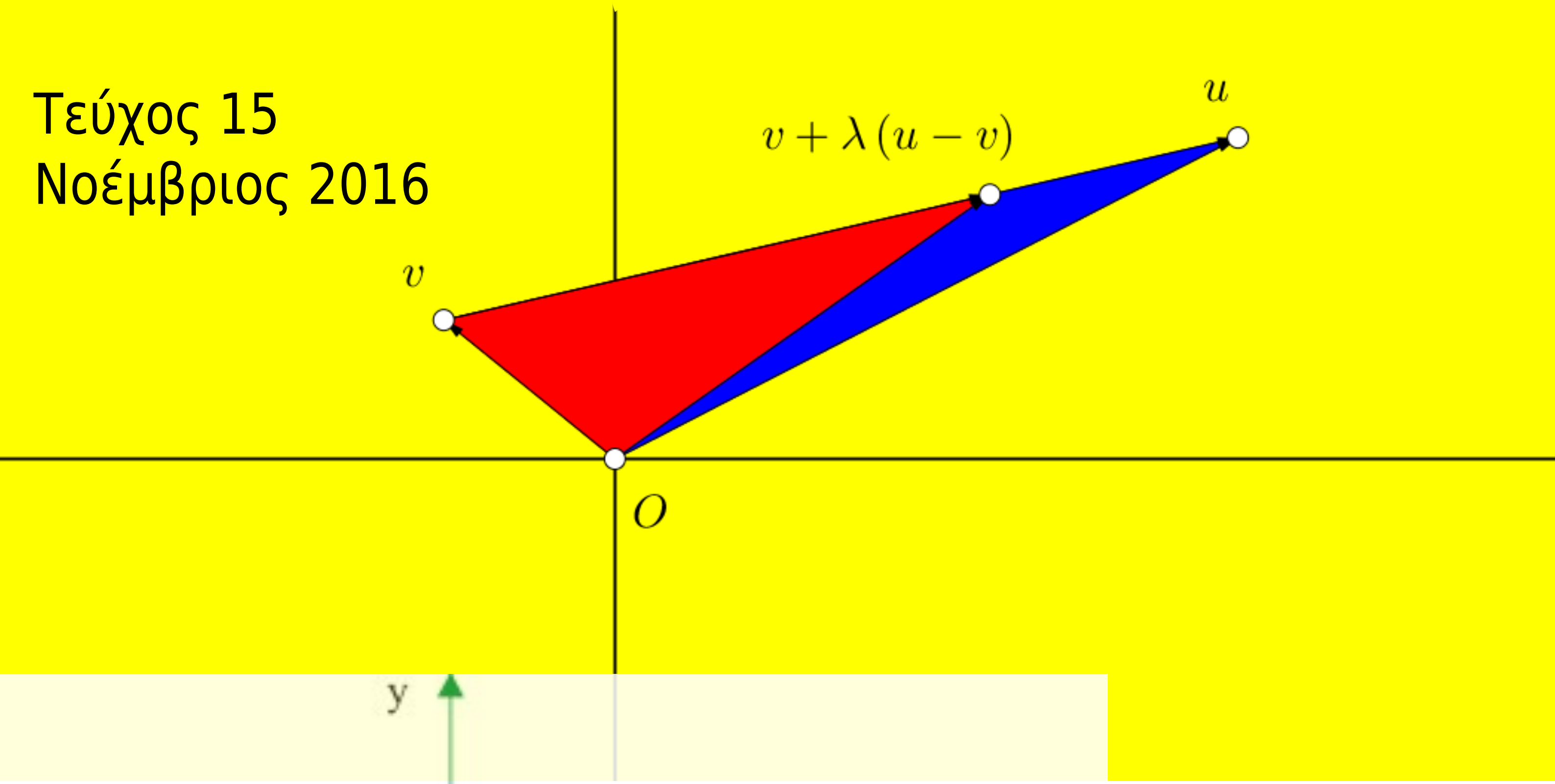
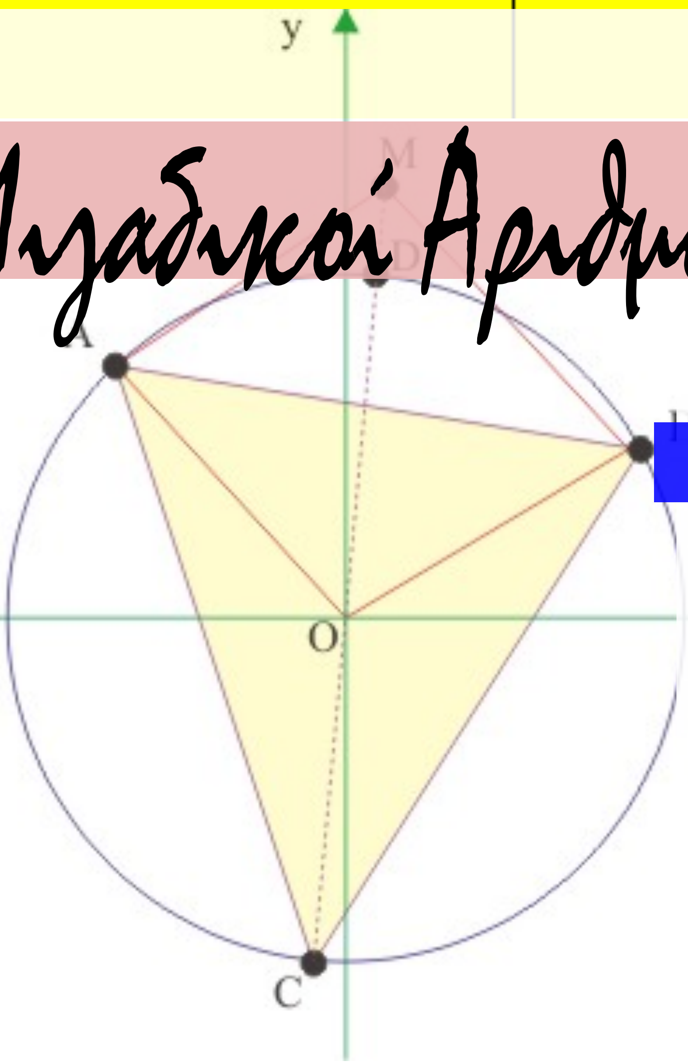
Εικοσιδωδεκάεδρον

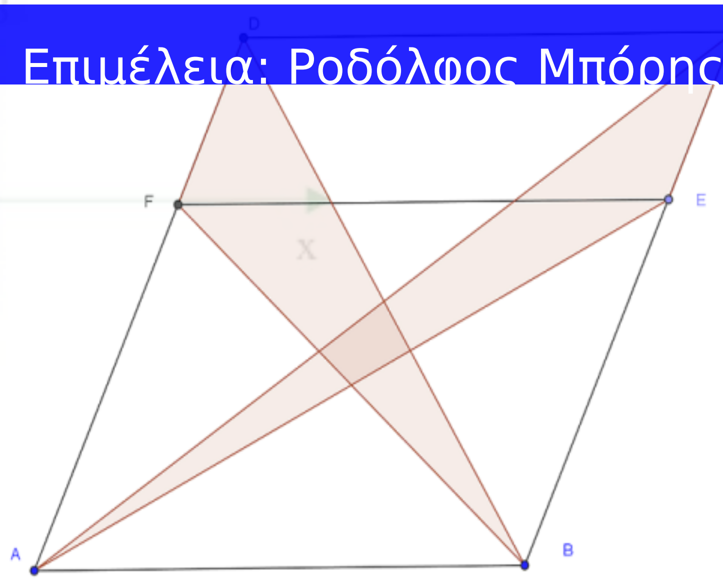
Τεύχος 15
Νοέμβριος 2016



Μιγαδικοί Αριθμοί και Γεωμετρία



Επιμέλεια: Ροδόλφος Μπόρης

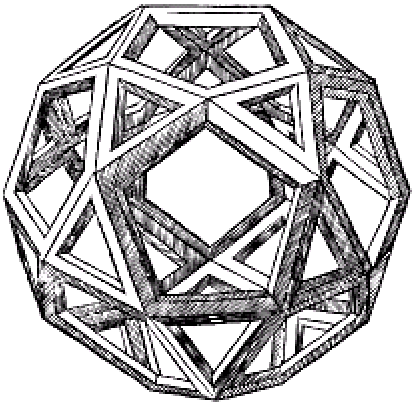


mathematica.gr

Εικοσιδωδεκάεδρον τεύχος 15, Νοέμβριος 2016.
ISSN: 2241-7133

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr. Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci



Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιονεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0,0,\pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.
Πηγή:
http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Η επιλογή και η επιμέλεια των ασκήσεων αυτού του τεύχους οφείλεται στον Ροδόλφο Μπόρη. Τεχνικά βοήθησαν οι Χρήστος Τσιφάκης και Ν.Σ. Μαυρογιάννης.

ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Αν z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί που ικανοποιούν την σχέση

$z_2 - z_3 = 2i(z_1 - z_3)$ και $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ οι

εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο,

α) Εξετάστε αν τα σημεία A, B, C σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι

$$|z_2 - z_3| = 2|z_1 - z_3|$$
$$|z_2 - z_1| = \sqrt{5}|z_1 - z_3|$$

γ) Δείξτε ότι το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο.

Προτείνει ο Χ. Τσιφάκης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2859

ΛΥΣΗ

(Χ. Καρδάσης)

α) Τα A, B, C είναι συνευθειακά αν και μόνο

$$\vec{CB} = \lambda \cdot \vec{CA} \Leftrightarrow z_2 - z_3 = \lambda \cdot (z_1 - z_3)$$

όπου λ πραγματικός, άρα λόγω της δοσμένης ισότητας τα σημεία A, B, C θα σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Βάζουμε μέτρα στην ισότητα

$$z_2 - z_3 = 2 \cdot i \cdot (z_1 - z_3)$$

και προκύπτει

$$|z_2 - z_3| = 2|z_1 - z_3|$$

Επίσης η αρχική ισότητα παίρνει τη μορφή

$$z_2 - z_1 = 2 \cdot i \cdot (z_1 - z_3) - z_1 + z_3 \Rightarrow$$
$$z_2 - z_1 = (1 - 2 \cdot i) \cdot (z_3 - z_1)$$

και βάζοντας μέτρα προκύπτει η ισότητα

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{5}|z_1 - z_3|$$

Παρατηρούμε ότι

$$|z_1 - z_2|^2 = 5 \cdot |z_1 - z_3|^2 =$$
$$4 \cdot |z_1 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 =$$
$$|z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2$$

άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

να δείξετε ότι

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

Προτείνει ο paylos

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2106

ΛΥΣΗ 1

(Α. Συγκελάκης)

Αφαιρούμε $2z_1 z_2$ και από τα δύο μέλη και παίρνουμε

$$(z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2 - z_3^2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 =$$
$$= (z_3 - z_1)(z_2 - z_3)$$

Άρα

$$(z_3-z_1)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$

Και κυκλικά

Άρα

$$(z_1-z_2)^3=(z_2-z_3)^3=(z_3-z_1)^3.$$

Το αποδεικτέο προκύπτει παίρνοντας μέτρα.

ΛΥΣΗ 2

(paylos)

Δίνω μια άλλη προσέγγιση για το *Β* μέρος της άσκησης.

Από την αρχική σχέση βγαίνει

$$\begin{aligned}&a+b+c=0\Rightarrow\\&a=-b-c\Rightarrow\\&a^2=(-b-c)\ \Rightarrow\\&a^2=b^2+c^2+2bc\Rightarrow\\&2a^2=a^2+b^2+c^2+2bc\Rightarrow\\&a^3=abc\end{aligned}$$

Όμοια

$$a^3=b^3=c^3=abc\Rightarrow|a|=|b|=|c|$$

που είναι το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Αν $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο τότε

$$\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2-z_3}+\frac{1}{z_3-z_1}=0$$
$$\Leftrightarrow|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$$

δηλαδή το τρίγωνο με κορυφές τα z_1,z_2,z_3 είναι ισόπλευρο.

Προτείνει ο giannisn

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=8609viewtopic.php?f=51&t=1103

ΛΥΣΗ 1

(Χ. Κυριαζής)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2-z_3}+\frac{1}{z_3-z_1}=0\Rightarrow\\&\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{z_2-z_1}{(z_2-z_3)(z_3-z_1)}=0\Rightarrow\\&\ldots\Rightarrow(z_1-z_2)^2=(z_2-z_3)(z_3-z_1)\end{aligned}$$

άρα

$$(z_1-z_2)^3=(z_2-z_3)(z_3-z_1)(z_1-z_2)\qquad(1)$$

Με πανομοιότυπο τρόπο, λαμβάνουμε:

$$(z_2-z_3)^3=(z_2-z_3)(z_3-z_1)(z_1-z_2)\qquad(2)$$

αλλά και...

$$(z_3-z_1)^3=(z_2-z_3)(z_3-z_1)(z_1-z_2)\qquad(3)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε :

$$(z_1-z_2)^3=(z_2-z_3)^3=(z_3-z_1)^3$$

Άρα και:

$$\begin{aligned}&|z_1-z_2|^3=|z_2-z_3|^3=|z_3-z_1|^3\Rightarrow\\&|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|\end{aligned}$$

Αντιστρόφως:

Αν

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \Rightarrow$$
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2 = r > 0$$

$$\frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{r}$$
$$\frac{1}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z}_2 - \overline{z}_3}{r}$$
$$\frac{1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_1}{r}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις

βρίσκουμε μηδέν.

ΛΥΣΗ 2

(Γ. Μπαλόγλου)

Θέτουμε $a = z_1 - z_2, b = z_2 - z_3, c = z_3 - z_1 \Rightarrow$
$$a + b + c = 0$$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

άρα

$$a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow$$
$$|\alpha| = |b| = |\alpha + b|$$

Η αριστερή συνθήκη μας δίνει

$$a^2 = -b(a+b) \Rightarrow |a|^2 = |b||a+b|$$

και όμοια

$$|b|^2 = |a| \cdot |a+b|$$

Επομένως διαιρώντας κατά μέλη

$$|\alpha| = |b| = |\alpha + b|$$

Η δεξιά συνθήκη είναι η συνθήκη ισοσκελούς

τριγώνου με γωνία κορυφής 120^o, οπότε

$$b = a(\sigma\upsilon\nu 120^o + i \cdot \eta\mu 120^o)$$

και η $a^2 + ab + b^2 = 0$ προκύπτει πολύ εύκολα

μέσω των $b^2 = -(a^2) \cdot \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

και $ab = a^2 \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

(Α. Βαρβεράκης)

$a + b + c = 0$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$, δηλ.

$ab + bc + ca = 0$ που σημαίνει (από Vieta σε

τριτοβάθμια) ότι οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες

εξίσωσης $z^3 - k = 0$.

Επομένως έχουν ίσα μέτρα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

(Γ.Μπαλόγλου)

Πολύ όμορφο, αλλά τι γίνεται με το αντίστροφο;

Αν δηλαδή έχουμε

$$|\alpha| = |b| = |c| \text{ και } a + b + c = 0,$$

πως προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0;$$

Η γεωμετρική προσέγγιση είναι πάντοτε στην

διάθεση μας.

Λοιπόν, αν θέλουμε να αποφύγουμε τη χρήση

Vieta σε τριτοβάθμια, μπορούμε να ονομάσουμε

$\frac{b}{a}=A$ και $\frac{c}{a}=B$ και να καταλήξουμε στη

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^3=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Αν οι μιγαδικοί a,b,c έχουν ίσα μέτρα και οι εικόνες τους σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $a+b+c=0$;

Προτείνει ο Μπ. Στεργίου

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38003

ΛΥΣΗ 1

(Κ.Ζερβός)

Οι διανυσματικές ακτίνες των a,b,c σχηματίζουν ανά δύο γωνίες $\frac{2\pi}{3}$.

Ας υποθέσουμε ότι με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού τους συναντάμε στον κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ που ανήκουν με τη σειρά a,b,c

.

Άρα θα είναι

$$b=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)a=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

και

$$c=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)b=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a.$$

Άρα

$$a+b+c=$$
$$=a+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=0$$

ΛΥΣΗ 2

(Γ.Κακλαμάνος)

I) Μία προσέγγιση είναι να σκεφτούμε ότι στο ισόπλευρο το περίκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται.

Η ζητούμενη σχέση έπεται από την γνωστή

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

όπου G το βαρύκεντρο του τριγώνου.

II) Εναλλακτικά:

Έστω

$$|a|=|b|=|c|=r>0$$

και

$$|a-b|=|b-c|=|a-c|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|a-b|^2=|b-c|^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a\bar{b}+\bar{a}b=b\bar{c}+\bar{b}c$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}r^2+\frac{b}{a}r^2=\frac{b}{c}r^2+\frac{c}{b}r^2 \Rightarrow$$

$$(a-c)\left(1-\frac{b^2}{ac}\right)=0 \Rightarrow b^2=ac$$

Ομοίως

$$a^2=bc, c^2=ab$$

Επίσης έπεται ότι

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

Όμως

$$a^3 = b^3 = abc$$

Άρα

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0 \Rightarrow$$
$$a^2+ab+b^2 = 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 0$$

Συνεπώς

$$(a+b+c)^2 =$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 0$$
$$\Rightarrow a+b+c = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Έστω οι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί z_1, z_2, z_3

τέτοιοι ώστε

$$|z_1-z_2|(2z_3-z_1-z_2)+$$
$$|z_2-z_3|(2z_1-z_2-z_3)+$$
$$|z_1-z_3|(2z_2-z_1-z_3) = 0$$

Αν οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο

σχηματίζουν τρίγωνο, να αποδειχθεί ότι το

τρίγωνο αυτό είναι ισόπλευρο.

Προτείνει ο Γ. Κακλαμάνος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=33415

ΛΥΣΗ 1

(styt_geia)

Θέτουμε

$$a = z_1 - z_2, b = z_2 - z_3, c = z_3 - z_1$$

και η σχέση γίνεται

$$|a|(-b-c)+|b|(a+c)+|c|(b-a) = 0$$
$$\Rightarrow (|b|-|c|)a+(|c|-|a|)b+(|b|-|a|)c = 0$$

Έστω $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$.

Η παραπάνω σχέση τότε γίνεται

$$\left(\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\right)\overrightarrow{AB}+\left(\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|-\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)\overrightarrow{B\Gamma}+$$
$$+\left(\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

Επειδή

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$$

έχουμε τελικά

$$\left(2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-\left|\overrightarrow{AB}\right|-\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\right)\overrightarrow{AB}+$$
$$+\left(\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|+\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-2\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$$

και αφού τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ δεν είναι συγγραμικά θα είναι

$$\begin{cases} 2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-\left|\overrightarrow{AB}\right|-\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 0 \\ \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|+\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|-2\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \\ \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| \end{cases}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

ΛΥΣΗ 2

(Γ. Κακλαμάνος)

Η ιδέα της κατασκευής ήταν ότι η σχέση είναι

ισοδύναμη με την

$$\frac{z_1|z_2-z_3|+z_2|z_1-z_3|+z_3|z_1-z_2|}{|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_1-z_3|} =$$
$$= \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

Η εικόνα του μιγαδικού στο αριστερό μέλος είναι το έκκεντρο του σχηματιζόμενου τριγώνου ενώ η εικόνα του μιγαδικού στο δεξί μέλος είναι το βαρύκεντρο του.

Συνεπώς το έκκεντρο ταυτίζεται με το βαρύκεντρο που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 *γνωρίζουμε ότι*

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = m > 0 \;\kappa\alpha\iota\; z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

1) Να βρείτε το είδος του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των μιγαδικών αυτών.

2) Να δείξετε ότι $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = -\dfrac{m^2}{2}$

Προτείνει ο Baggp93

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=39630

ΛΥΣΗ 1

(Α. Συγκελάκης)

Ένας από τους πιο σύντομους είναι μέσω του κανόνα του παραλληλογράμου:

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(άσκηση του σχολικού βιβλίου) από τον οποίο βγάζουμε ότι $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}m$.

Εντελώς όμοια βγάζουμε ότι

$$|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}m$$

που δείχνει ότι οι z_1, z_2, z_3 ανήκουν σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $\sqrt{3}m$.

Επίσης, υψώνοντας τη σχέση $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}m$ στο τετράγωνο παίρνουμε

$$(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 3m^2$$

δηλαδή

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -m^2$$

Δηλαδή

$$2Re(z_1\overline{z_2}) = -m^2$$

δηλαδή

$$Re(z_1\overline{z_2}) = -\frac{m^2}{2} \; .$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 είναι

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

και

$$\left(z_1^2 + z_2^2\right)z_3 + \left(z_2^2 + z_3^2\right)z_1 + \left(z_3^2 + z_1^2\right)z_2 + \\ +3z_1z_2z_3 = 0.$$

Να δειχθεί ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Προτείνει ο Ν. Ζανταρίδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=32990

ΛΥΣΗ 1

(Β. Μουρούκος)

Είναι:

$$\left(z_1^2+z_2^2\right)z_3+\left(z_2^2+z_3^2\right)z_1+\left(z_3^2+z_1^2\right)z_2+$$
$$+3z_1z_2z_3=$$

$$=\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)$$
$$=z_1z_2z_3\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=$$

$$=z_1z_2z_3\left(z_1+z_2+z_3\right)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=$$
$$=z_1z_2z_3\left|z_1+z_2+z_3\right|^2.$$

Από την υπόθεση προκύπτει ότι $z_1+z_2+z_3=0$, οπότε (βλ. 3ο Θέμα των Πανελλαδικών Εξετάσεων του 2006), το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ 2

(Grigoris K.)

Η σχέση γράφεται

$$\sum z_1z_2(z_1+z_2)+3z_1z_2z_3=0$$
$$\Rightarrow (z_1+z_2+z_3)(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)=0$$

Αν $z_1+z_2+z_3=0$ τότε το βαρύκεντρο του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των τριών μιγαδικών ταυτίζεται με το περίκεντρό του άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Αν $z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=0$,

ισχύει

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0\Rightarrow\frac{1}{\overline{z_1}}+\frac{1}{\overline{z_2}}+\frac{1}{\overline{z_3}}=0$$
$$\Rightarrow z_1+z_2+z_3=0$$

ΛΥΣΗ 3

(Α. Συνεφακόπουλος)

Μια ακόμη λύση προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι διαιρώντας με $z_1z_2z_3\neq 0$ αι προσθέτοντας το 3 παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}+\frac{(z_2+z_3)^2}{z_2z_3}+\frac{(z_3+z_1)^2}{z_3z_1}=3$$

που είναι η σχέση (5) της Πρότασης 2, σελ. 12, του αρχείου

http://www.recreatiimatematice.ro/arhiva/12012/RM12012.pdf

το οποίο αναφέρθηκε και στο θέμα

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27776#p136230

ΛΥΣΗ 4

(Α. Συνεφακόπουλος)

Η δοθείσα σχέση γράφεται μετά από διαίρεση με το $z_1z_2z_3\neq 0$ και αφαίρεση του 9

$$\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1z_2}+\frac{(z_2-z_3)^2}{z_2z_3}+\frac{(z_3-z_1)^2}{z_3z_1}=-9$$

Από τις σχέσεις που γράφει στην αρχή ο Βαγγέλης στο

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27776#p135521

Μιγαδικοί από GM αυτό μας δίνει

$$|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=9$$

κι αφού

$$\begin{aligned}&|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=\\&=3(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2-|z_1+z_2+z_3|^2)=\\&=9-3|z_1+z_2+z_3|^2\end{aligned}$$

θα είναι $z_1+z_2+z_3=0$ κ.ο.κ

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 ορίζουν τρίγωνο με ορθόκεντρο την αρχή των αξόνων. Να δειχθεί ότι

$$z_2\overline{z}_3+z_3\overline{z}_2=z_1\overline{z}_3+z_3\overline{z}_1=z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1$$

Προτείνει ο Ο. Γκότσης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=31063

ΛΥΣΗ 1

(Γ. Κακλαμάνος)

Αρκεί να δειχθεί ότι

$$z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}=z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\Leftrightarrow\frac{\overline{z_3}}{z_3}=-\frac{\overline{z_2-z_1}}{z_2-z_1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{z_3^2}{|z_3|^2}=-\frac{(z_2-z_1)^2}{|z_2-z_1|^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{|z_1-z_2|^2}{|z_3|^2}=\frac{i^2(z_1-z_2)^2}{z_3^2}\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{i(z_1-z_2)}{z_3}\right|^2=\left(\frac{i(z_1-z_2)}{z_3}\right)^2 \quad (1)$$

Έστω $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών. Θεωρώ B' το συμμετρικό του B ως προς O.

Αν σχηματίσω το παρ/μο $AOB'D$ το D είναι η εικόνα του z_1-z_2 άρα ισχύει $D(z_1-z_2)$

Είναι $AD//=BO$ άρα $ADOB$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο και ισχύει $DO//AB$

Έστω $E(i(z_1-z_2))$ η εικόνα του $i(z_1-z_2)$ Τότε $EO\perp DO$.

Το O είναι ορθόκεντρο άρα ισχύει $CO\perp AB$.

Όμως είναι $DO//AB$, άρα τα C, O, E είναι συνευθειακά.

Κατά συνέπεια υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε να είναι

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OE}\Rightarrow z_3=\lambda i(z_1-z_2)\Rightarrow$$
$$\frac{1}{\lambda}=\frac{i(z_1-z_2)}{z_3}$$

Η τελευταία σχέση επιβεβαιώνει την ισχύ της (1) και το ζητούμενο εδείχθη. Ομοίως τα υπόλοιπα.

ΛΥΣΗ 2

(Ν. Φραγκάκης)

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ με

$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε μια πράξη $\circ$ μεταξύ τους ως εξής:

$$z_1 \circ z_2 = \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

(εσωτερικό γινόμενο για μιγαδικούς)

Αν λοιπόν $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$, αυτό σημαίνει ότι οι

διανυσματικές ακτίνες των εικόνων των z_1, z_2

είναι κάθετες.

Στην συγκεκριμένη άσκηση

$$\mathrm{Re}((z_1 - z_2)\bar{z}_3) = 0, \mathrm{Re}((z_2 - z_3)\bar{z}_1) = 0,$$
$$\mathrm{Re}((z_3 - z_1)\bar{z}_2) = 0$$

Επειδή

$$2\mathrm{Re}((z_1 - z_2)\bar{z}_3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)\bar{z}_3 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z_3 = 0$$

έχω

$$z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 - \bar{z}_2 z_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3$$

και όμοια καταλήγουμε τελικά στην ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Αν οι εικόνες των διαφορετικών μεταξύ τους

μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι αντίστοιχα τα σημεία

A, B, C του μοναδιαίου κύκλου $C(O,1)$,

$k \in \{-2, 0, 1\}$ και a,b,c είναι τα αντίστοιχα μήκη

των πλευρών του τριγώνου ABC

$$(b + c + ka)\overline{z_2} \cdot \overline{z_3} + (a + c + kb)\overline{z_3} \cdot \overline{z_1} +$$
$$+ (b + a + kc)\overline{z_2} \cdot \overline{z_1} = 0$$

να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABC είναι

ισόπλευρο.

Προτείνει ο Μπ. Στεργίου

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=3346

ΛΥΣΗ

(Θ. Κοντογεώργης)

Είναι

$$(b + c + ka)z_1 + (a + c + kb)z_2 + (b + a + kc)z_3 = 0$$

Για $k = 1$ έχουμε

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow 3z_G = 0$$

Όπου G το βαρύκεντρο το οποίο ταυτίζεται με το

περίκεντρο αφού

$$|z_1 - 0| = |z_2 - 0| = |z_3 - 0| = 1$$

Για $k = 0$ έχουμε

$$(b + c)z_1 + (a + c)z_2 + (b + a)z_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{az_1 + bz_2 + cz_3}{a + b + c} \Leftrightarrow$$
$$z_H = z_I$$

Όπου H το ορθόκεντρο το οποίο ταυτίζεται με το

I έκκεντρο

Για $k = -2$ έχουμε:

$$\left(b+c-2a\right)z_1+\left(a+c-2b\right)z_2+$$
$$+\left(b+a-2c\right)z_3=0\Leftrightarrow$$
$$\frac{z_1+z_2+z_3}{3}=\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}\Leftrightarrow z_G=z_I$$

Δηλαδή το βαρύκεντρο ταυτίζεται με έκκεντρο.

Και στις 3 περιπτώσεις το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ.

Αν το περίκεντρο είναι το 0 τότε από την ευθεία Euler είναι

$$\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}=3\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=z_A+z_B+z_C$$

Από το Θ. Διχοτόμου

$$IA/ID=\frac{c}{(ac/b+c)}=\frac{b+c}{a}$$

ακόμη

$$\overrightarrow{IB}-\vec{c}=-\frac{b+c}{a}(\overrightarrow{IB}+\frac{ac}{b+c}\vec{a})\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{IB}=\frac{a\vec{c}-c\vec{a}}{a+b+c}\Rightarrow b\overrightarrow{IB}=\frac{ab\vec{c}-bc\vec{a}}{a+b+c}\Rightarrow$$
$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=0\Rightarrow$$
$$a(z_A-z_I)+b(z_B-z_I)+c(z_C-z_I)=0\Rightarrow$$
$$z_I=\frac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Αν οι μιγαδικοί $a, b, c,$ έχουν μέτρο 1 και ισχύει η σχέση:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3i\sqrt{3}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

να αποδειχθεί ότι $a+b+c=0$.

Προτείνει ο Μπ. Στεργίου

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=3188

ΛΥΣΗ

(Θ. Κοντογεώργης)

Η σχέση γράφεται

$$(c-a)(b-c)(b-a)=3i\sqrt{3}abc$$

Οπότε

$$|c-a||b-c||b-a|=3\sqrt{3}$$

Έτσι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a,b,c έχει γινόμενο πλευρών $3\sqrt{3}$ και η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου R είναι 1 όμως από το νόμο των ημιτόνων είναι

$$|c-a|=2R\sin B$$
$$|a-b|=2R\sin C$$
$$|b-c|=2R\sin A$$

Τότε δηλαδή

$$|c-a||b-c||b-a|=8R^3 sinA\cdot sinB\cdot sinC=3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow sinA\cdot sinB\cdot sinC=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Όμως η συνάρτηση

$$f:\left(0,\pi\right)\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=sinx$$

είναι κοίλη, άρα από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$sinA+sinB+sinC\le 3sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad (1)$$

Τέλος, από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$sinAsinBsinC \le \frac{(sinA+sinB+sinC)^3}{27}$$

$$sinAsinBsinC \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν

$A=B=C$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς $|c-a|=|b-c|=|b-a|=\sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11.

Θεωρούμε $z_1, z_2, z_2 \in \mathbb{R}$ διαφορετικούς ανά δύο, με μέτρο 1 και τέτοιους ώστε

$$\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_3)^2}+\frac{z_3z_1}{(z_3-z_1)^2}=-1.$$

Να δείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Προτείνει ο Θ.Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27776

ΛΥΣΗ

(Β. Μουρούκος)

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=$$
$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}-2=$$
$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2=$$
$$-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=-|z_1-z_2|^2$$

Όμοια

$$\frac{1}{|z_1-z_2|^2}+\frac{1}{|z_2-z_3|^2}+\frac{1}{|z_3-z_1|^2}=1.$$

Θέτουμε

$$a=|z_1-z_2|, b=|z_2-z_3|, c=|z_3-z_1|$$

οπότε οι θετικοί αριθμοί a, b, c είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABC και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC είναι $R=1$.

Από τη γνωστή ανισότητα

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2 \ (*)$$

(στην οποία το ίσον ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο) και την ανισότητα αριθμητικού-αρμονικού μέσου, έχουμε ότι:

$$9 \ge a^2+b^2+c^2 \ge \frac{9}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=9.$$

Άρα, ισχύει $a = b = c$ και το συμπέρασμα έπεται.

Μια γρήγορη απόδειξη της (*)

$$a^2+b^2+c^2=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=$$
$$=3\left[|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2-|z_1+z_2+z_3|^2\right]\le$$
$$3\left[|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right]=9R^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 12.

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 διαφορετικοί ανά 2 και ο γεωμετρικός τόπος τους είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει η ισότητα:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2+|z_1+z_2|} = 1$$

τότε οι εικόνες των μιγαδικών αποτελούν ισόπλευρο τρίγωνο.

Προτείνει ο Σ. Λύρας

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=32812

ΛΥΣΗ

(Γ. Κακλαμάνος)

Έστω $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ οι εικόνες των αντίστοιχων μιγαδικών.

Αν $z_1 + z_2 + z_3 = w$, το W αντιστοιχεί στο ορθόκεντρο.

Η σχέση γράφεται

$$\sum \frac{1}{2+|z_1+z_2|} = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{2+|w-z_1|} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{2+AH} = 1$$

Αν M το μέσο του BC, ισχύει

$AH = 2OM = 2\cos A$ (και κυκλικά).

Άρα η σχέση γίνεται

$$\sum \frac{1}{2+2\cos A} = 1$$

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$$

είναι κυρτή στο $(0,\pi)$ άρα η Jensen δίνει

$$\sum f(A) = f(A) + f(B) + f(C) \geq$$
$$3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$$

Συνεπώς για να ισχύει η ισότητα στην

$$\sum \frac{1}{2+2\cos A} = 1 \ ,$$

πρέπει

$$\cos A = \cos B = \cos C = \ldots = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13.

Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 \in \mathbb{C}$ αν

$$|z_1 - z_2| = |z_6 - z_2| = |z_7 - z_2|$$

και

$$|z_1 - z_3| = |z_5 - z_3| = |z_7 - z_3|$$

και

$$|z_1 - z_4| = |z_5 - z_4| = |z_6 - z_4|$$

επιπλέον ισχύουν

$$\frac{z_7 - z_1}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R},$$
$$\frac{z_6 - z_1}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$$

να δειχθεί ότι

$$\frac{z_5 - z_1}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=56028

ΛΥΣΗ

(Ρ.Μπόρης)

Έστω A, B, C, D, E, F, G οι εικόνες αντίστοιχα των $z_1,\ldots,z_7$.

Είναι $BA = BG$ οπότε B είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AG.

Είναι $DA = DG$ οπότε D είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AG άρα BD μεσοκάθετος της AG και επειδή τα C, A, G είναι συνευθειακά τότε το CG είναι ύψος του τριγώνου BCD.

Όμοια δείχνουμε ότι DF ύψος του BCD άρα A το ορθόκεντρο συνεπώς AE κι αυτό ύψος οπότε B, A, E συνευθειακά δηλαδή

$$\frac{z_5 - z_1}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 14.

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4 για τους οποίους ισχύουν τα

α) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = r > 0$

β) $|z_1 - z_2| = 2r$ και

γ) $\min\{|az_1 + bz_2 - z_3|, a, b \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2r}|z_4 - z_1||z_4 - z_2|$

να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

Προτείνει ο Σ. Καπελλίδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=10224

ΛΥΣΗ

(Ρ. Μπόρης)

1.Τα A,B,Γ,Δ είναι εικόνες των z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα.

2. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο ακτίνας r οπότε η AB είναι διάμετρος και τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$ ορθογώνια στο Γ και το Δ.

3. Το $az_1 + bz_2$ παριστάνει διάνυσμα συγγραμμικό των αντίρροπων OA, OB όπου O το μέσον του AB και αρχή των αξόνων.

4. Η ελάχιστη απόσταση του Γ από την AB είναι η κάθετος $\Gamma\Gamma'$ και εκφράζεται από τον μιγαδικό

$$\min|az_1 + bz_2 - z_3|.$$

5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΔ* το ύψος *Δ'Δ* επαληθεύει τον τύπο $\Delta A \cdot \Delta B = BA \cdot \Delta\Delta'$ *άρα* εκφράζεται από τον $\frac{1}{2r}|z_4 - z_1|.|z_4 - z_2|$.

6. Συνεπώς *Δ΄Δ=Γ΄Γ* που αποδεικνύει το ζητούμενο .

ΑΣΚΗΣΗ 15.

Έστω οι διαφορετικοί ανά δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, z_4 ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \frac{|z_3 - z_4|}{2}$$

Εάν ισχύει

$$z_1 + z_2 + z_3 = \lambda(z_3 - z_4) \ \mu\varepsilon\, \lambda \in \mathbb{R}$$

να δειχθεί ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο παριστάνουν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

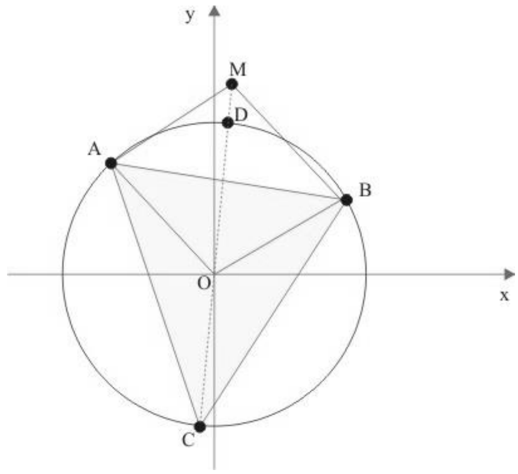
Επιπλέον να εξεταστεί αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.

Προτείνει ο Γ. Κωστάκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27865

ΛΥΣΗ

(Γ. Ρίζος)



$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$ των z_1, z_2, z_3, z_4 κινούνται σε κύκλο κέντρου *O(0, 0)* και ακτίνας $\rho = |z_1|$.

Η απόσταση των εικόνων των z_3, z_4 είναι $\frac{\rho}{2}$ οπότε είναι αντιδιαμετρικά σημεία, άρα $z_4 = -z_3$.

Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$z_1 + z_2 + z_3 = 2\lambda z_3 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = (2\lambda - 1)z_3$$

Έστω $z = z_1 + z_2$, με εικόνα $M(z)$ οπότε τα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}$ είναι συγγραμμικά.

Αφού το *AOBM* είναι ρόμβος, τότε $AM = BM$, $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO$, οπότε τα τρίγωνα *AMC, BMC* είναι ίσα, άρα *AC = BC*

Το *ABC* θα είναι ισόπλευρο αν $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ δηλαδή όταν $|\overrightarrow{OM}| = \rho$.

Τότε το *M* ταυτίζεται με το *D*, άρα

$z_1 + z_2 = z_4 = -z_3$ οπότε $\lambda = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 16.

Έστω οι μιγαδικοί *α, β, γ, δ* διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, με

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|$$

και

$$\operatorname{Re}\left(\alpha\bar{\beta}\right)=\operatorname{Re}\left(\beta\bar{\gamma}\right)=\operatorname{Re}\left(\gamma\bar{\delta}\right)=0.$$

Έστω *Α, Β, Γ, Δ* οι εικόνες των α, β ,γ, δ αντίστοιχα, στο επίπεδο των μιγαδικών. Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο *ΑΒΓΔ* είναι τετράγωνο.

Προτείνει ο Β. Μαυροφρύδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27865

ΛΥΣΗ

(Χ. Καρδάσης)

$$2Re(a\bar{\beta}) = 0 \Rightarrow a\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\alpha}{\beta} = -\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Άρα

$$\frac{\alpha}{\beta} = ki \Rightarrow a = k\beta i\ .$$

Παίρνοντας μέτρα προκύπτει $k = \pm 1$ οπότε

$a = \pm\beta \cdot i$

(έχουμε στροφή κατά 90^o ή - 90^o άρα έχουμε καθετότητα - μη σχολική λύση)

Αν $A\,(x\,,y)$ και $B\,(\gamma\,,\delta)$ τότε από την ισότητα $a = \beta \cdot i$ προκύπτει

$A\,(\,x, y\,)\,, B\,(\,-y\,, x\,)$ δηλ. $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 0$.

Η περίπτωση $a = -\beta \cdot i$ είναι όμοια.

Επομένως οι ΟΑ , ΟΒ τέμνονται κάθετα και επιπλέον έχουν ίσα μέτρα .

Όμοια για τις *ΟΒ* , *ΟΓ* και *ΟΓ* , *ΟΔ*

Άρα το *ΑΒΓΔ* έχει διαγώνιες που διχοτομούνται είναι ίσες και κάθετες άρα πρόκειται για τετράγωνο.

ΛΥΣΗ 2

(Φ. Καλδή)

Αλλάζουμε τα γράμματα σε a,b,c,d για ευκολία στο γράψιμο και έχουμε

$$|a| = |b| = |c| = |d| = m$$

και

$$Re(a\bar{b}) = Re(b\bar{c}) = Re(c\bar{d}) = 0$$

γνωρίζουμε ότι

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2Re(a\bar{b})$$

άρα θα είναι

$$\begin{aligned} &|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \\ &= |b-c|^2 = |b|^2 + |c|^2 \\ &= |c-d|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 2m^2 \end{aligned}$$

όλα τα παραπάνω λένε ότι το *ΑΒΓΔ* είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 17.

Έστω οι μιγαδικοί a,b,c,d οι οποίοι είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Επίσης ισχύουν

$$|a|=|b|=|c|=|d| \quad (1)$$

$$a+b+c+d=0 \quad (2)$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=0 \quad (3)$$

Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών a,b,c,d σχηματίζουν τετράγωνο.

Προτείνει ο Β. Μαυροφρύδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2368

ΛΥΣΗ 1

(Χ. Κυριαζής)

Λήμμα

Για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1,z_2, ισχύει:

$$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

Τώρα για την ευκολία μου, θα θέσω:

$$|a|=|b|=|c|=|d|=\rho,\ \rho>0.$$

Έστω λοιπόν $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των a,b,c,d αντιστοίχως...

Συνεπώς για τις πλευρές $\mathrm{AB},\Gamma\Delta$ του τετραπλεύρου, ισχύει:

$$(\mathrm{AB})=|\beta-\alpha|,\ (\Gamma\Delta)=|d-c|.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα, έχουμε:

$$|b-a|^2+|b+a|^2=2\left(|b|^2+|a|^2\right)$$
$$\Leftrightarrow |b-a|^2=4\rho^2-|b+a|^2 \ (1)$$

και

$$|d-c|^2+|d+c|^2=2\left(|d|^2+|c|^2\right)$$
$$\Leftrightarrow |d-c|^2=4\rho^2-|d+c|^2 \ (2)$$

Όμως , λόγω της υπόθεσης, λαμβάνουμε:

$$\alpha+b+c+d=0 \Rightarrow \alpha+b=-(c+d) \Rightarrow$$
$$|\alpha+b|=|d+c| \ (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε πως $(AB)=(\Gamma\Delta)$.

Με ακριβώς όμοιο τρόπο, έχουμε και ότι:

$(\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{A}\Delta)$.

Συνεπώς το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Τώρα από τη σχέση:

$$|a|=|b|=|c|=|d|=\rho,\ \rho>0$$

αντιλαμβανόμαστε πως οι εικόνες $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$ των μιγαδικών a,b,c,d ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα ρ.

Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, αφού είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε θα είναι ορθογώνιο...(εύκολα αφού οι απέναντι γωνίες του θα πρέπει να είναι ίσες και παραπληρωματικές, άρα ορθές).

Τώρα , έχουμε πως οι κορυφές Α, Γ αλλά και Β, Δ αντίστοιχα, είναι αντιδιαμετρικά σημεία, αφού υποχρεωτικά οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ είναι διάμετροι. Άρα, μπορούμε να πούμε (λόγω συμμετρίας ως προς το O) πως οι μιγαδικοί a, c αλλά και οι b, d είναι αντίθετοι. Δηλαδή:

$$c = -\alpha \ , \ d = -b \ .$$

Από τη σχέση της εκφώνησης παίρνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}&ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0 \Rightarrow\\&ab - a^2 - ab - ab - b^2 + ab = 0 \Rightarrow\\&a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm ib\end{aligned}$$

Τώρα για την πλευρά AB του εγγεγραμμένου ορθογωνίου , έχουμε:

$$\begin{aligned}&|a-b| = |\pm ib - b| = |b(-1 \pm i)| = |b||-1 \pm i| =\\&= \sqrt{2}\,|b| = \rho\sqrt{2}\end{aligned}$$

Δηλαδή πρόκειται για πλευρά τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ.

ΛΥΣΗ 2

(Π._Γιαννόπουλος)

Έστω A, B, C, D οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c, d . Τότε:

$$\begin{aligned}&a+b+c+d = 0 \Rightarrow (a+b+c+d)^2 = 0 \ \Rightarrow\\&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +\\&\quad + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = 0 \Rightarrow\\&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}&a+b+c+d = 0 \ \Rightarrow\\&|a+b| = |-c-d| \ \Rightarrow\\&|a+b|^2 = |c+d|^2\end{aligned}$$

Συνεπώς οι ακτίνες OA, OB, OC, OD σχηματίζουν 4 γωνίες που οι μη εφεξής είναι ανά δύο ίσες συνεπώς ορίζουν κατά κορυφή γωνίες ίσες με συνέπεια τα ζεύγη OA, OC και OB, OD να ορίζουν αντικείμενες ημιευθείες και επειδή

$$|a| = |b| = |c| = |d|$$

έπεται ότι $ABCD$ παραλληλόγραμμο με τις διαγώνιες ίσες προς 2ρ, άρα ορθογώνιο.

Συνεπώς

$$a = -c \text{ και } b = -d \qquad (4).$$

Μένει να αποδειχθεί ότι το ορθογώνιο είναι τετράγωνο και προς τούτο αρκεί να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι τέμνονται καθέτως.

$$\begin{aligned}&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow\\&a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = -2ab \Rightarrow\\&(\alpha - b)^2 = -2ab \Rightarrow \left|(\alpha - b)^2\right| = |-2ab| \Rightarrow\\&|(\alpha - b)|^2 = 2|a||b| \ \Rightarrow |(\alpha - b)|^2 = 2|a|^2 \Rightarrow\\&|(\alpha - b)|^2 = |a|^2 + |b|^2 .\end{aligned}$$

Άρα $A\hat{O}B = 90^o$ οεδ.

ΑΣΚΗΣΗ 18.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $z_1, z_3 \neq 0$ για τους οποίους ισχύει

$\frac{z_1+2z_2}{3z_3}\in\mathbb{R}$, $\frac{2z_3+z_2}{3z_1}\in\mathbb{R}$ και ο $\frac{z_1}{z_3}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Να αποδείξετε ότι $z_1+2z_2+4z_3=0$.

Προτείνει ο Θ. Κοπάδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=37626

ΛΥΣΗ 1

(Μ. Λάμπρου)

Εξ υποθέσεως υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ με

$$z_1+2z_2=az_3,\ 2z_3+z_2=bz_1,\ (*)$$

Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη επί 2 και αφαιρώντας κατά μέλη έπεται

$$(1+2b)z_1=(a+4)z_3$$

Συμπεραίνουμε $1+2b=0$ (αλλιώς

$\frac{z_1}{z_3}=\frac{a+4}{1+2b}\in\mathbb{R}$ που αντιβαίνει στην υπόθεση).

Η $(*)$ τώρα γράφεται $4z_3+2z_2=2bz_1=-z_1$, από όπου το ζητούμενο.

ΛΥΣΗ 2

(Χρήστος Ντάβας)

Έστω

$$\frac{z_1+2z_2}{3z_3}=a,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$\frac{z_2+2z_3}{3z_1}=b,\quad b\in\mathbb{R}$$

$$\frac{z_1}{z_3}=w,\quad w\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$$

τότε

$$\begin{cases} z_1+2z_2=a3z_3 \\ z_2+2z_3=b3z_1 \\ z_1=wz_3 \end{cases} \Rightarrow (6b+1)w=3a+4$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι αδύνατη γιατί έρχεται σε αντίφαση με τα δεδομένα, δεν έχει μοναδική λύση γιατί τότε $w\in\mathbb{R}$.

Άρα πρέπει να είναι αόριστη το οποίο συμβαίνει όταν:

$$b=-\frac{1}{6},a=-\frac{4}{3}.$$

Με αντικατάσταση στις αρχικές ισότητες:

$$\begin{cases} z_1+2z_2=b3z_3 \\ z_2+2z_3=a3z_1 \end{cases} \Rightarrow z_1+2z_2+4z_3=0$$

ΛΥΣΗ 3

(Ρ. Μπόρης)

Είναι

$$\frac{z_1+2z_2}{3z_3}=a\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1-az_3=2(az_3-z_2)\quad (1)$$

και αντίστοιχα

$$2(z_3-bz_1)=bz_1-z_2\ (2)$$

Αν A, B, C, D, E είναι οι εικόνες αντίστοιχα των

$z_1, z_2, z_3, az_3, bz_1$ τότε

1. $z_1 / z_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow$ οι ευθείες OA, OC είναι διαφορετικές
2. $a \in \mathbb{R} \Rightarrow O, C, D$ συνευθειακά ,

   $b \in \mathbb{R} \Rightarrow O, A, E$ συνευθειακά
3. $(1) \Rightarrow A, D, B$ συνευθειακά και

   $AD = 2DB$
4. Ομοίως από (2) έχουμε C, E, B συνευθειακά και $2CE = EB$

από το Θ. Μενελάου στο EAB με διατέμνουσα την

$$COD \Rightarrow \frac{OE}{OA}\frac{AD}{DB}\frac{CB}{CE} = 1$$

αντικαθιστώντας $|b| = \frac{1}{2}$ με $b < 0$ αφού το O

ανάμεσα στα A, E έπεται $b = -\frac{1}{2}$ και από την (2)

το ζητούμενο.

Θεώρησα τα A, B, C σε γενική θέση δηλαδή να σχηματίζουν τρίγωνο. Αν μετατρέψουμε τις σχέσεις (1), (2) σε διανυσματικές φαίνεται καθαρά γιατί τα D, E βρίσκονται πάνω στις πλευρές και όχι στις προεκτάσεις τους

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 19.

Αν $|z-4i| \le 2$ και $|z-2i| = 2$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου του $z \in \mathbb{C}$.

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικότων του z στο μιγαδικό επίπεδο κυκλικός δακτύλιος;

Προτείνει ο Ν. Ζαφειρόπουλος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=10002

ΛΥΣΗ

(chris)

Η σχέση $|z-4i| \le 2$ δηλώνει οτι ο γ.τ του z είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή στην περιφέρεια του κύκλου C_1 με κέντρο $K_1(0,4)$ και ακτίνα $R_1 = 2$.

Η σχέση $|z-2i| = 2$ δηλώνει ότι ο γ.τ του z είναι κύκλος κέντρου $K_2(0,2)$ και $R_2 = 2$.

Τελικά ο γ.τ του z είναι όλα τα σημεία του τόξου AB συμπεριλαμβανομένων και των A,B

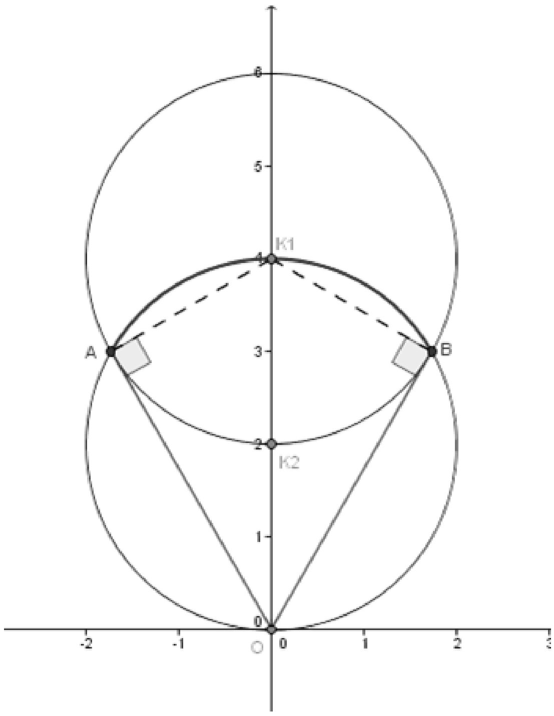
Είναι $|z|_{max} = (OK_1) = 4$ για $z = 4i$

Επίσης

$$|z|_{min} = (OA) = (OB) = \sqrt{(OK_1)^2 - R_1^2} = 2\sqrt{3}$$
$$z = \pm\sqrt{3} + 3i$$

(Προκύπτει εύκολα από το σύστημα των δύο κύκλων)

Άρα $2\sqrt{3} \le |z| \le 4$.



ΑΣΚΗΣΗ 20.

Αν *A, B, C* είναι οι εικόνες των μιγαδικών

z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα και *O* η αρχή των αξόνων, να αποδειχθεί ότι :

$$(OA)(BC) \le (OB)(AC) + (OC)(AB)$$

Προτείνει ο Γ.Κ77

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=19890

ΛΥΣΗ

(Χ. Κυριαζής)

Αν είναι $z_1 = 0$ είναι προφανές.

Έστω $z_1 \neq 0$.Τότε αρκεί:

$$|z_1||z_2 - z_3| \le |z_2||z_1 - z_3| + |z_3||z_1 - z_2|$$

Αρκεί

$$|z_2 - z_3| \le |z_2|\left|\frac{z_1 - z_3}{z_1}\right| + |z_3|\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1}\right|$$

Αρκεί

$$|z_2 - z_3| \le |z_2|\left|1 - \frac{z_3}{z_1}\right| + |z_3|\left|1 - \frac{z_2}{z_1}\right|$$

Αρκεί

$$|z_2 - z_3| \le \left|z_2 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right| + \left|z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right|$$

το οποίο αληθεύει (είναι άμεση εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας)

$$|z_2 - z_3| = \left|z_2 - \frac{z_2 z_3}{z_1} - \left(z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right)\right| \le$$
$$\left|z_2 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right| + \left|z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right|$$

ΑΣΚΗΣΗ 21.

Έστω ABC ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $a = \sqrt{3}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο *M* του επιπέδου του ισχύει $MA + MB + MC \ge 3$

Προτείνει η Κωνσταντίνα Κυριακοπούλου.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=3471

ΛΥΣΗ 1

(Α. Συνεφακόπουλος)

Το σημείο M που ελαχιστοποιεί το άθροισμα

$$MA + MB + MC$$

είναι το σημείο Fermat (ή Toricelli) *P* του τριγώνου, δηλ. το σημείο τέτοιο ώστε

$$\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 120^o$$

(Για επτά (7) αποδείξεις αυτού του θεωρήματος δείτε τη σελίδα

http://www.cut-the-knot.org/Generalizat ... oint.shtml

Για το ισόπλευρο τρίγωνο, το σημείο του Fermat P είναι το περίκεντρο.

Εφόσον $x = \sqrt{3}$, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ισούται με 1.

$$MA + MB + MC \geq PA + PB + PC = 3$$

ΛΥΣΗ 2

(Ν. Μαυρογιάννης)

Κατ' αρχάς μπορούμε να πάρουμε το τρίγωνο μας σε μία βολική θέση: Με κορυφές τις εικόνες των αριθμών

$$1, \omega = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

που ανήκουν όλες στο μοναδιαίο κύκλο και επομένως το εγγεγραμμένο τρίγωνο έχει πλευρά $\sqrt{3}$.

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο μας M αντιστοιχεί στο z

Θέλουμε:

$$|z-1| + |z-\omega| + |z-\omega^2| \geq 3 \quad (1)$$

Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση όπου $|z| \neq 0$.

Τότε

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| + \left|\frac{1}{z} - \omega\right| + \left|\frac{1}{z} - \omega^2\right|$$
$$\geq \left|3\frac{1}{z} - 1 - \omega - \omega^2\right| = \left|3\frac{1}{z}\right| = 3\left|\frac{1}{z}\right|$$

δηλαδή

$$|1-z| + |1-z\omega| + |1-z\omega^2| \geq 3$$

Αλλά

$$|1-z| + |1-z\omega| + |1-z\omega^2| =$$
$$|1-z| + |\omega|\left|\frac{1}{\omega} - z\right| + |\omega^2|\left|\frac{1}{\omega^2} - z\right| =$$
$$|1-z| + |\omega^2 - z| + |\omega - z| =$$
$$|z-1| + |z-\omega| + |z-\omega^2|$$

Επομένως η (1) αληθεύει.

Απομένει η περίπτωση όπου z=0 που τότε

$$|z-1| + |z-\omega| + |z-\omega^2| = 3$$

ΛΥΣΗ 3

(Α. Συνεφακόπουλος)

Ας δώσουμε μια άλλη με μιγαδικούς που χρησιμοποιεί το ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο μόνο στο τέλος.

(από το βιβλίο του Ramon Gonzalez Calvet, *A treatise of plane geometry through geometric algebra*):

Έστω

$$\xi = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$$

Αν $M(z)$,$M'(z)$ δύο σημεία του επιπέδου του τριγώνου ABC, όπου $A(a)$,$B(b)$,$C(c)$ τότε

$$\overrightarrow{MA}\xi^2+\overrightarrow{MB}\xi+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{M'A}\xi^2+\overrightarrow{M'B}\xi+\overrightarrow{M'C}$$

δηλ.

$$\begin{aligned}&(a-z)\xi^2+(b-z)\xi+(c-z)\\&=(a-z')\xi^2+(b-z')\xi+(c-z')\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$(z'-z)(\xi^2+\xi+1)=0$$

που ισχύει.

Άρα

$$\overrightarrow{MA}\xi^2+\overrightarrow{MB}\xi+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{WC}$$

για κάποιο $W(w)$, δηλαδή,

$$(a-z)\xi^2+(b-z)\xi+(c-z)=w-c$$

Τα διανύσματα $MA\xi^2, MB\xi, MC$ «σχηματίζουνε» μια τεθλασμένη γραμμή από το W στο C.

Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$|a-z|+|b-z|+|c-z|\geq|w-c|$$

Αν το P συμπίπτει με το σημείο Fermat $F(d)$, τα διανύσματα $FA\xi^2, FB\xi, FC$ είναι συγγραμμικά και «σχηματίζουνε» το ευθύγραμμο τμήμα WC.

Άρα

$$\begin{aligned}&|a-z|+|b-z|+|c-z|\geq\\&|w-c|=\\&|a-d|+|b-d|+|c-d|=1+1+1=3\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ 4

(Κωνσταντίνα Κυριακοπούλου)

Θεωρούμε ως κέντρο βάρους του τριγώνου την αρχή των αξόνων και τις κορυφές του A, B, Γ να είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Θα είναι

$$\begin{aligned}&AB=|z_1-z_2|, BC=|z_2-z_3|, AC=|z_1-z_3|\\&OA=|z_1|, OB=|z_2|, OC=|z_3|\\&z_1+z_2+z_3=0\end{aligned}$$

Αν M η εικόνα του μιγαδικού z είναι

$$\begin{aligned}&\text{MA+MB+MΓ}=\\&|z-z_1|+|z-z_2|+|z-z_3|=\\&|z-\frac{1}{\overline{z_1}}|+|z-\frac{1}{\overline{z_2}}|+|z-\frac{1}{\overline{z_3}}|=\\&|\frac{z\overline{z_1}-1}{\overline{z_1}}|+|\frac{z\overline{z_2}-1}{\overline{z_2}}|+|\frac{z\overline{z_3}-1}{\overline{z_3}}|=\\&|z\overline{z_1}-1|+|z\overline{z_2}-1|+|z\overline{z_3}-1|\geq\\&\geq|z\overline{z_1}-1+z\overline{z_2}-1+z\overline{z_3}-1|=\\&|z(\overline{z_1}+\overline{z_2+z_3})-3|=|-3|=3.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22.

Να δείξετε ότι

$$|z+w|\geq\frac{1}{2}(|z|+|w|)\left(\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right),\quad \forall z,w\in\mathbb{C}^*$$

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=56029&p=269491#p269491

ΛΥΣΗ 1

(Σ. Παπαδόπουλος)

Θέτουμε $z_1 = \dfrac{z}{|z|}$ και $w_1 = \dfrac{w}{|w|}$, $|z_1| = |w_1| = 1 \quad (1)$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$|z_1 + w_1|(|z| + |w|) \le 2\big||w|w_1 + |z|z_1\big|.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}&|z_1 + w_1|(|z| + |w|) = \\ &= \big||z|z_1 + |w|w_1 + |w|z_1 + |z|w_1\big|.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τριγωνική το δεξιό μέλος της τελευταίας είναι μικρότερο η ίσο από

$$\begin{aligned}&\big||z|z_1 + |w|w_1\big| + \big||w|z_1 + |z|w_1\big| = \\ &2\big||z|z_1 + |w|w_1\big|\end{aligned}$$

Γιατί λόγω της (1) ισχύει

$$\big||z|z_1 + |w|w_1\big| = \big||w|z_1 + |z|w_1\big| \qquad (2)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατηρήσεις.

1. Η ισότητα (2) είναι καθαρά γεωμετρική

2. Η αρχική ανισότητα ισχύει (όπως φαίνεται και από την απόδειξη) για χώρους με εσωτερικό γινόμενο.

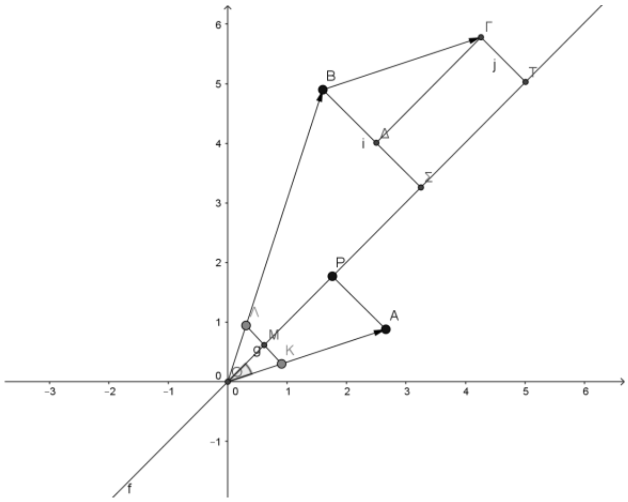
ΛΥΣΗ 2

(Ρ. Μπόρης)

Έστω *Α, Β* οι εικόνες των *z*,*w* αντιστοίχως

Κ, Λ οι εικόνες των $\dfrac{z}{|z|}, \dfrac{w}{|w|}$

Αντιστοίχως *Γ* η εικόνα του $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, *Ρ, Σ, Τ* οι προβολές των *Α, Β, Γ* στην διχοτόμο της $A\hat{O}B$, *Μ* το μέσον του *ΚΛ* και *Δ* η προβολή του *Γ* στην *ΒΣ*.



$$|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Lambda}| \Leftrightarrow$$

$$|\overrightarrow{OK}|\cos u = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right)$$

Τα τρίγωνα *ΟΡΑ*, ΒΓΔ είναι ίσα, άρα

$$\mathrm{O}\mathrm{P} + \mathrm{O}\Sigma = \Sigma\mathrm{T} + \mathrm{O}\Sigma = \mathrm{OT}$$

$$\mathrm{OA}\cdot\cos u + OB\cdot\cos u = OT \le \mathrm{O}\Gamma.$$

Άρα έχουμε το αποδεικτέο.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ - ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 23.

Αν για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 ισχύει:

$$|z_1|^4+|z_2|^4+|z_3|^4+|z_4|^4=4|z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4|$$

να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους είναι ομοκυκλικά σημεία.

Προτείνει ο Ν. Αποστολάκης

ΛΥΣΗ

(Θ. Μάγκος)

Ισχύει η ισότητα στην ανισότητα ΑΜ-ΓΜ.

Επομένως, ισχύει

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|.$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών είναι ομοκυκλικά σημεία.

ΑΣΚΗΣΗ 24.

Έστω μη μηδενικό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και ρίζες ανά δύο συζυγείς. Να δείξετε ότι οι εικόνες των συντελεστών είναι συνευθειακά σημεία του μιγαδικού επιπέδου.

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=32743

ΛΥΣΗ

(Μ. Λάμπρου)

Αν A ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, τότε το πολυώνυμο γράφεται

$$A(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n).$$

Από την υπόθεση οι ρίζες είναι ανά δύο συζυγείς, οπότε η συμβολή τους στο γινόμενο αυτό είναι της μορφής

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib))=(x-a)^2+b^2.$$

Ο παράγοντας αυτός έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές, οπότε και όλο το γινόμενο έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές. Συνεπώς οι συντελεστές είναι σε ευθεία (την πραγματική ευθεία), οπότε το ίδιο συμβαίνει αν ξαναβάλουμε τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή μέσα στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου (στρίβει την εν λόγω ευθεία)

ΑΣΚΗΣΗ 25.

Έστω κανονικό n-γωνο ακτίνας r. Ας δειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών και των διαγωνίων του είναι $(nr)^2$.

Προτείνει ο Α. Κοτρώνης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=1552

ΛΥΣΗ 1

(Ρ. Μπόρης)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $r=1$ και ότι κάποια κορυφή του πχ η A_0 είναι εικόνα του 1 άρα οι υπόλοιπες εικόνες των νιοστών ριζών της μονάδας $\zeta_k, k=1,2,...,n-1$

στο κατάλληλο σύστημα αξόνων.

Έστω *s* το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων μιας κορυφής *B* από τις υπόλοιπες n-1 κορυφές.

Λόγω συμμετρίας όποια κορυφή και αν πάρουμε βγαίνει πάντα το ίδιο οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $B=A_0$.

Αν πάρουμε όλες τις κορυφές και προσθέσουμε τα s τελικό αποτέλεσμα θα είναι το ns, αλλά τότε θα έχουμε μετρήσει κάθε πλευρά και κάθε διαγώνιο 2 φορές, συνεπώς το ζητούμενο είναι το $S=\frac{ns}{2}$

Ας υπολογίσουμε το s τώρα

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=1}^{n-1}|1-\zeta_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(1+|\zeta_k|^2-2Re(\bar{1}\zeta_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(2-2Re\zeta_k) = \\ & 2n-2-2Re\left(\sum_{k=1}^{n-1}\zeta_k\right) \end{aligned}$$

Όμως από τις σχέσεις Vieta για το πολυώνυμο z^n-1 του οποίου ρίζες είναι τα $\zeta_k, k=1,2,...,n-1$ και η μονάδα έχουμε

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\zeta_k=0$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη παίρνουμε $s=2n$ άρα $S=n^2$ που είναι και το ζητούμενο.

ΛΥΣΗ 2

(Ν. Μαυρογιάννης)

Ας ξεκινήσουμε λίγο πιο γενικά:

Θεωρούμε *n* οποιαδήποτε σημεία $A_1,...,A_n$ και το κέντρο βάρους τους *G* δηλαδή το μοναδικό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{GA_1}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0} \qquad (1)$$

Με *S* συμβολίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων όλων των $A_1,...,A_n$ (n^2 αποστάσεις)

Με $1\le k\le n$ συμβολίζουμε με S_k το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του A_k από τα $A_1,...,A_n$ (συμπεριλαμβανομένου και του A_k).

Ισχύει:

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_kA_i}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{GA_i}-\overrightarrow{GA_k}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{GA_i}^2+\overrightarrow{GA_k}^2-2\overrightarrow{GA_i}\cdot\overrightarrow{GA_k}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_k}-2\overrightarrow{GA_k}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2+n\overrightarrow{GA_k}^2 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τα S_k βρίσκουμε ότι

$$2S = 2n\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$S^2 = n\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2 \quad (2)$$

Η άσκηση προκύπτει ως πόρισμα της (2):

Αν τα $A_1,...,A_n$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου τότε από γνωστή άσκηση το περίκεντρο του ικανοποιεί την (1) άρα είναι κέντρο βάρους. Έτσι το μεν α' μέλος της (2) είναι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών και των διαγωνίων ενώ το β' μέλος είναι n^2r^2.

ΑΣΚΗΣΗ 26.

Να αποδειχθεί ότι αν

$|az^2+bz+c|=d, \forall z:|z|=1, a\neq 0$ με $a,b,c\in C$

τότε $b=c=0, |a|=d$.

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=988

ΛΥΣΗ 1

(Μ. Λάμπρου)

Να μία γεωμετρική λύση. Πιστεύω ότι μπορεί να βελτιωθεί η περιπτωσιολογία της, αλλά δεν βλέπω αμέσως πώς...

Αν z_1, z_2 οι τις ρίζες του τριωνύμου, έχουμε

$|a(z-z_1)(z-z_2)|=d$ για κάθε z με $|z|=1$, οπότε

$|(z-z_1)(z-z_2)|=\dfrac{d}{|a|}$ = σταθερό (*).

Δεν μπορεί $z_1\neq z_2$ γιατί αν γράψουμε κύκλο κέντρου z_1 που τέμνει τον $|z|=1$ σε δύο σημεία *A*, *B* τότε από την (*) τα δύο αυτά σημεία θα ισαπέχουν από το z_2.

Δηλαδή τα z_1, z_2 είναι στην μεσοκάθετο του *AB*. Τότε όμως υπάρχουν σημεία *w* του τόξου *AB* με απόσταση

$d(w,z_1) > d(A,z_1)$ και $d(w,z_2) > d(A,z_2)$ (**)

(π.χ. αν τα z_1, z_2 είναι από την ίδια πλευρά του *AB* και εξωτερικά του κύκλου, τότε το μέσο ενός από τα τόξα *AB* μας κάνει. Όμοια οι άλλες περιπτώσεις.

Όμως η (**) αντιβαίνει στη (*). Τελικά $z_1=z_2$.

Όμοια δείχνουμε ότι τα z_1, z_2 είναι το κέντρο του κύκλου, δηλαδή $z_1=z_2=0$, γιατί αλλιώς υπάρχουν σημεία του $|z|=1$ σε μεγαλύτερη απόσταση από ότι το πλησιέστερο.

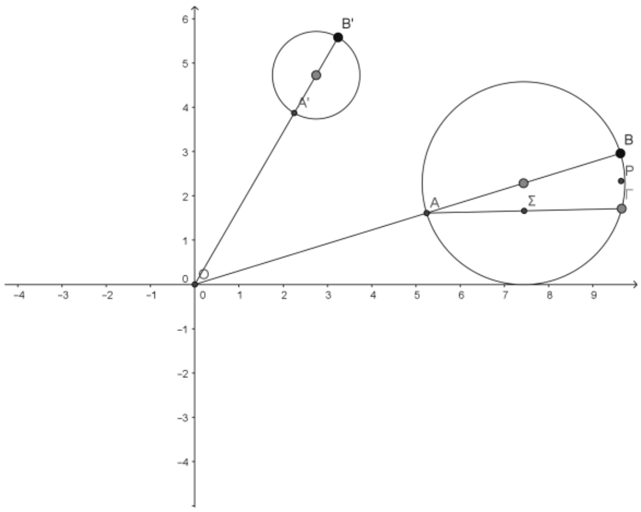
Άρα

$$az^2+bz+c=$$
$$a(z-z_1)(z-z_2)=a(z-0)(z-0)=az^2$$

δηλαδή $b=c=0$, οπότε $|az^2|=d$ για κάθε z με $|z|=1$, δηλαδή $|a|=d$.

ΛΥΣΗ 2

(Ρ. Μπόρης)



$$|az^2+bz+c|=d$$
$$a\neq 0$$

$\left|(z-k)^2+m\right|=\dfrac{d}{|a|}$ (με $k=-\dfrac{b}{2a}$ $m=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$)

αν θέσουμε $w=z-k$ και επειδή $|z|=1$ τότε έχουμε: $|w+k|=1$

Έστω $k\neq 0$

Ονομάζουμε με V: $v=w^2$

Γνωρίζουμε ότι οι εικόνες των *w* ανήκουν σε κύκλο κέντρου $-k\neq 0$ και θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι οι εικόνες των *v* δεν μπορούν να ανήκουν και αυτές σε κύκλο.

Αφού τα *w* ανήκουν σε κύκλο που δεν έχει κέντρο το μηδέν, τότε υπάρχουν ένα μοναδικό *min* $|w|=\left|\vec{OA}\right|$ και ένα μοναδικό *max* $|w|=\left|\vec{OB}\right|$

Είναι $v=w^2 \Rightarrow |v|=|w|^2$ και επειδή η συνάρτηση που αντιστοιχίζει το x στο x^2 με $x>0$ είναι γνήσια αύξουσα, το ελάχιστο x αντιστοιχίζεται στο ελάχιστο x^2 και αντίστοιχα για το μέγιστο.

Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα, το *A* αντιστοιχεί στο A' και το *B* στο B'.

Αν οι εικόνες των *v* σχημάτιζαν κύκλο τότε θα έπρεπε τα A',B' να είναι αντιδιαμετρικά σημεία αυτού του κύκλου, οπότε αν Γ' σημείο αυτού του κύκλου (εικόνα κάποιου *Γ*) η $A'\hat{\Gamma}'B'=\dfrac{\pi}{2}$. Άρα

$$\frac{v_A-v_\Gamma}{v_B-v_\Gamma}\in I \Leftrightarrow \frac{w_A^2-w_\Gamma^2}{w_B^2-w_\Gamma^2}\in I$$

όμως και

$$\frac{w_A-w_\Gamma}{w_B-w_\Gamma}\in \mathrm{I}$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{w_A+w_\Gamma}{w_B+w_\Gamma}\in R \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{O\Gamma}=x(\vec{OB}+\vec{O\Gamma}) \Leftrightarrow$$

$2\vec{O\Sigma}=2x\vec{OP} \Leftrightarrow$ *O,Σ,P* συνευθειακά,

που είναι άτοπο αφού τα *Σ,P* είναι τα μέσα των *ΓΑ, ΓΒ* αντιστοίχως.

Άρα $\kappa=0$.

Τότε έχουμε $\left|z^2+m\right|=\frac{d}{|a|}\Leftrightarrow|v+m|=\frac{d}{|a|}$ όταν

$|v|=|z|^2=1$ που σημαίνει

ότι οι εικόνες των v ανήκουν σε δυο διαφορετικούς κύκλους και αυτό δεν μπορεί να ισχύει για άπειρα v. Τα κέντρα αυτών των κύκλων είναι αντίστοιχα τα $-m$, 0 και πρέπει φυσικά να ταυτίζονται οπότε προκύπτει ότι: $m=0$.

Μετά τις εύκολες πράξεις παίρνουμε:

$b=0$, $c=0$, $d=|a|$.

ΛΥΣΗ 3

(Γ. Μπαλόγλου)

Όπως και στην λύση του Μιχάλη, παραγοντοποιούμε σε $\alpha\left(\zeta-z_1\right)\left(\zeta-z_2\right)$ και υποθέτουμε αρχικά ότι τα σημεία z_1, z_2 είναι διαφορετικά.

Επιλέγουμε δυο σημεία Σ, T επί του $|\zeta|=1$ τέτοια ώστε η $\Sigma\mathrm{T}$ να είναι κάθετη στην z_1z_2: αυτό είναι δυνατόν όπου και να κείνται τα z_1, z_2.

Η επιλογή αυτή των Σ, T σημαίνει ότι

είτε $|\Sigma Z_1|>|\mathrm{T}Z_1|$ και $|\Sigma Z_2|>|\mathrm{T}Z_2|$

είτε $|\Sigma Z_1|<|\mathrm{T}Z_1|$ και $|\Sigma Z_2|<|\mathrm{T}Z_2|$...

εκτός και αν τα Σ, T είναι συνευθειακά με το κέντρο του $|\zeta|=1$, μια περίπτωση που θα εξετάσαμε χωριστά.

Όμως η αρχική υπόθεση δίνει

$|\Sigma Z_1|\cdot|\Sigma Z_2|=|\mathrm{T}Z_1|\cdot|\mathrm{T}Z_2|$, όποτε είτε

$$\frac{|\Sigma Z_1|}{|\mathrm{T}Z_1|}<1<\frac{|\Sigma Z_2|}{|\mathrm{T}Z_2|}$$

είτε $\frac{|\Sigma Z_2|}{|\mathrm{T}Z_2|}<1<\frac{|\Sigma Z_1|}{|\mathrm{T}Z_1|}$,

άρα έχουμε αντίφαση.

Συνεπώς τα Z_1 και Z_2 ταυτίζονται, οπότε έχουμε

$$\left|\zeta-z_1\right|^2=\frac{d}{|\alpha|}$$

για όλα τα σημεία ζ επί του κύκλοι $|\zeta|=1$,

επομένως οι κύκλοι $|\zeta|=1$ και $\left|\zeta-z_1\right|=\frac{d}{|a|}$ είναι ομόκεντροι, κλπ.

Απομένει η περίπτωση όπου τα Z_1, Z_2 και το κέντρο O του $|\zeta|=1$ είναι συνευθειακά είναι πιο δυσάρεστη απ' ότι νόμιζα, οπότε μάλλον καταφεύγουμε στην μέθοδο του Μιχάλη.

ΑΣΚΗΣΗ 27.

Δίνονται οι θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ με $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Έστω $M_1, M_2, \ldots, M_n$ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, \ldots, z_n$, P η εικόνα του μιγαδικού $w = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n$. Αν το πολύγωνο $M_1 M_2 \ldots M_n$ είναι κυρτό, τότε το P βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου.

Προτείνει ο Ο. Γκότσης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=31344&p=145381#p145381

ΛΥΣΗ 1

(Ν. Μαυρογιάννης)

Η άσκηση στην ουσία στηρίζεται σε ένα γνωστό χαρακτηρισμό των κυρτών σχημάτων: Περιέχουν τους κυρτούς γραμμικούς συνδυασμούς των σημείων τους. Μάλιστα επειδή δεν υπεισέρχεται ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών ουσιαστικά είναι άσκηση διανυσμάτων και με αλλαγή στην ορολογία μπορεί να γίνει και στην κατεύθυνση της Β' Λυκείου. Η άσκηση δεν είναι δύσκολη νομίζω όμως πως υπάρχει κάποια δυσκολία να δοθεί μία μια αμιγώς σχολική λύση εναρμονισμένη με όσα είναι γνωστά στους μαθητές από την Γεωμετρία. Το επιχειρώ:

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε ένα ημιεπίπεδο και δύο διάφορα σημεία του τότε το τμήμα με άκρα αυτά τα σημεία περιέχεται στο ημιεπίπεδο. Επίσης γνωστό είναι ότι ένα πολύγωνο είναι κυρτό αν και μόνο αν για κάθε πλευρά του s περιέχεται σε ένα μόνο ημιεπίπεδο από εκείνα που ορίζει ο φορέας της. Επομένως αν ένα πολύγωνο είναι κυρτό τότε περιέχεται σε στην τομή των ημιεπιπέδων. Άρα αν ένα κυρτό πολύγωνο περιέχει δύο σημεία αυτά περιέχονται σε κάθε ημιεπίπεδο επομένως όλα τα ημιεπίπεδα περιέχουν το τμήμα που ορίζουν τα δύο αυτά σημεία. Άρα κάθε κυρτό πολύγωνο αν περιέχει δύο σημεία περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα τους. Ισχύει και το αντίστροφο αλλά εδώ δεν το χρειαζόμαστε.

Θα χρειασθούμε ακόμη μια πολύ γνωστή και εύκολη πρόταση που διδάσκεται στα διανύσματα ως άσκηση. Την προσαρμόζω στους μιγαδικούς: Αν p, q θετικοί με $p + q = 1$ και u, v διάφοροι μιγαδικοί τότε ο μιγαδικός $pu + qv$ ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζουν οι εικόνες των u, v.

Απόδειξη

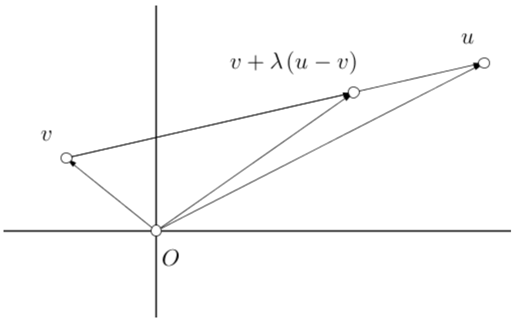
Είναι

$$pu + qv - v = (1 - q)u + qv - v = \\ = (1 - q)(u - v)$$

Επομένως

$$pu + qv = v + \lambda(u - v), 0 < \lambda < 1$$

που είναι αρκετό για να εξασφαλίσει ότι η εικόνα του $pu + qv$ είναι μεταξύ των εικόνων των u, v.



Για την κυρίως απόδειξη τώρα έχουμε:

$$w = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = a_n z_n + \left(a_1 + \ldots + a_{n-1}\right) w_1$$

όπου

$$w_1 = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n-1} z_{n-1}$$

Με

$$b_i = \frac{a_i}{a_1 + \ldots + a_{n-1}}$$

Άρα η εικόνα του w είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος που ορίζουν οι εικόνες των z_n, w_1

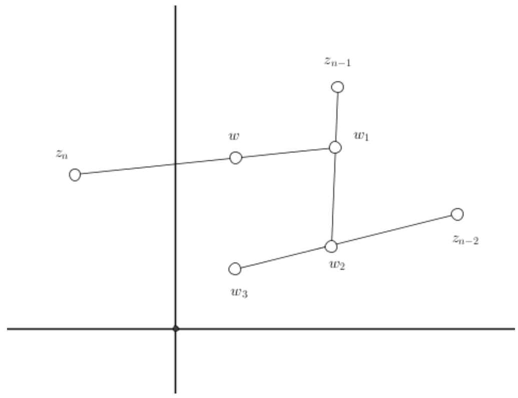
'Ομοια:

$$w_1 = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n-1} z_{n-1} = \\ b_{n-1} z_{n-1} + \left(b_1 + \ldots + b_{n-1}\right) w_2$$

όπου

$$w_2 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_{n-2} z_{n-2}, \\ c_i = \frac{b_i}{b_1 + \ldots + b_{n-1}}.$$

Άρα η εικόνα του w_1 είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος που ορίζουν οι εικόνες των z_{n-1}, w_2.



Συνεχίζοντας έτσι θα έχουμε βρει μιγαδικούς $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ ώστε ο wi να είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος που ορίζουν οι z_{n-i} , w_{i+1} και $w_{n-1} = z_1$.

Η εικόνα του w_{n-1} είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου επομένως και η εικόνα του w_{n-2} και τελικά καταλήγουμε στο ότι και η εικόνα του w είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου.

Η διαδικασία αυτή απλουστεύεται αν δουλέψουμε με επαγωγή (που τώρα είναι συγκαλυμμένη). Για $n=2$ καταχρηστικά πολύγωνο (: ευθύγραμμο τμήμα) και το αποδεικτέο ισχύει από την πρόταση που προηγήθηκε. Υποθέτουμε ότι ισχύει για πολύγωνα με $n-1$ κορυφές και θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές. Γράφουμε πάλι

$$w = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = a_n z_n + \left(a_1 + \ldots + a_{n-1}\right) w_1$$

όπου

$$w_1 = b_1 z_1 + b_2 z_2 + ... + b_{n-1} z_{n-1},$$
$$b_i = \frac{a_i}{a_1 + ... + a_{n-1}}.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής ο w_1 είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου που ορίζουν οι $z_1,...,z_{n-1}$ το οποίο προφανώς είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου των $z_1,...,z_{n-1},z_n$ και το αποδεικτέο έπεται από την βοηθητική πρόταση.

ΛΥΣΗ 2

(Ο. Γκότσης)

Κάνοντας χρήση ενός άλλου ορισμού του κυρτού πολυγώνου έχουμε:

Έστω

$$z_k = x_k + y_k i \left(x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,\dots,n\right)$$

οι δοσμένοι μιγαδικοί και $(e): ax + by + c = 0$ η ευθεία που περνάει από τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$. Επειδή το πολύγωνο είναι κυρτό όλες οι άλλες κορυφές του θα βρίσκονται προς το αυτό ημιεπίπεδο με ακμή την (e) και τότε οι αριθμοί:

$$m_3 = ax_3 + by_3 + c, \dots, m_n = ax_n + by_n + c \,(1)$$

θα έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ο $w = x_0 + y_0 i$ θα έχει συντεταγμένες:

$x_0 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ και $y_0 = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$

Είναι, τότε:

$$ax_0 + by_0 + c = a\left(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\right) + b\left(a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n\right) + c\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n\right) =$$

$$= a_1\left(ax_1 + by_1 + c\right) + a_2\left(ax_2 + by_2 + c\right) + \cdots + a_n\left(ax_n + by_n + c\right)$$

Όμως $ax_1 + by_1 + c = 0$ και $ax_2 + by_2 + c = 0$, οπότε

$$ax_0 + by_0 + c = a_3\left(ax_3 + by_3 + c\right) + \cdots + a_n\left(ax_n + by_n + c\right) \overset{(1)}{=} a_3 m_3 + \cdots + a_n m_n \;(2)$$

Όμως οι αριθμοί $m_3, \dots, m_n$ είναι ομόσημοι και οι $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι θετικοί, οπότε από την *(2)* προκύπτει ότι και ο αριθμός $ax_0 + by_0 + c$ είναι ομόσημος με τους $m_3, \dots, m_n$, άρα το σημείο *P* βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ανήκουν οι κορυφές $M_3, \dots, M_n$.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει, αν εργαστούμε όμοια για κάθε πλευρά.

Άρα το *P* βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 28.

Έστω $m > 1, n > 1$ πραγματικοί και οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί

$$b, c, d, e : c = mb, d = ne$$

και *BC* όχι παράλληλη με *DE*.

Αν W η εικόνα του $w=\dfrac{be-cd}{b-c-d+e}$ και τα

BC,DE τεμνονται στο $O(0,0)$,

να δειχθεί ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι πραγματικοί:

$$\frac{w}{b}\frac{b-d}{w-d},\frac{w}{c}\frac{c-e}{w-e},\frac{w-c}{p-c}\frac{p-d}{w-d},\frac{w-b}{p-b}\frac{p-c}{w-c}$$

όπου p ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο τομής των BD,CE.

Ποιο θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκφράζει το παραπάνω;

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=35994&p=165785#p165785

ΛΥΣΗ

(Ρ. Μπόρης)

Λήμμα

Αν $A(a),B(b),C(c),D(d)$ οι εικόνες των μιγαδικών a,b,c,d τότε

$$ABCD \text{ εγγράψιμο } \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c}\frac{b-d}{a-d}\in R$$

Απόδειξη:

$$ABCD \text{ εγγράψιμο}$$

$$\Leftrightarrow \measuredangle ACB=\measuredangle ADB \Leftrightarrow$$

$$arg(\frac{a-c}{b-C})=arg(\frac{a-d}{b-d})+2k\pi$$

Όμως

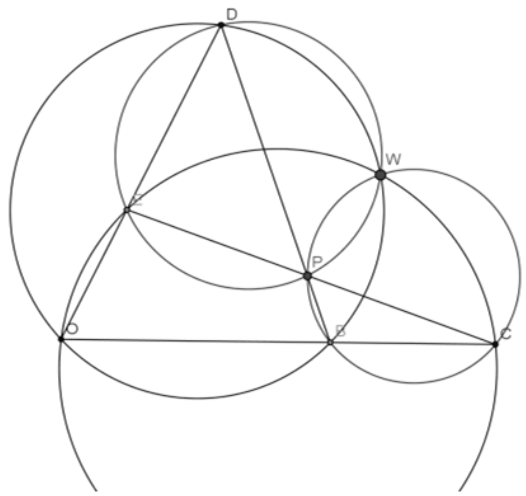
$$\frac{a-c}{b-c}\frac{b-d}{a-d}\in R \Leftrightarrow$$

$$arg(\frac{a-c}{b-c})+arg(\frac{b-d}{a-d})=2k\pi \Leftrightarrow$$

$$arg(\frac{a-c}{b-c})=-arg(\frac{b-d}{a-d})+2k\pi=$$

$$=arg(\frac{a-d}{b-d}) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Πάμε τώρα στην άσκηση:



Αναγνωρίζουμε με την βοήθεια του λήμματος ότι ζητούμενο είναι:

τα τετράπλευρα $OBWD,OCWE$ είναι εγγράψιμα καθώς και τα $EPWD,BCWP$.

Έτσι έχουμε αντικαθιστώντας $c=mb,d=ne$

$$\frac{w}{b}\frac{b-d}{w-d}=...=\frac{mn-1}{n-1}\in R$$

όμοια βρίσκουμε ότι

$$\frac{w}{c}\frac{c-e}{w-e}\in\mathbb{R}$$

άρα το W είναι το σημείο τομής των κύκλων *OCE,OBD* δηλαδή το σημείο **Miquel** του πλήρους τετραπλεύρου οπότε και οι κύκλοι *EDP*, *BCP* διέρχονται από το W συνεπώς τα τετράπλευρα *DEPW, BCWP* είναι εγγράψιμα άρα οι μιγαδικοί $\frac{w-c}{p-c}\frac{p-d}{w-d}, \frac{w-b}{p-b}\frac{p-c}{w-c}$ είναι πραγματικοί.

ΑΣΚΗΣΗ 29.

Έχουμε ένα χάρτη Α. Τον βγάζουμε μια μικρή φωτοτυπία Β. Ρίχνουμε τον Β πάνω στον Α ώστε να μην περισσεύει κανένα κομμάτι του Β έξω από τον Α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο στους Α,Β , το ένα πάνω από το άλλο που παριστάνουν την ίδια τοποθεσία.

Προτείνει ο Ρ. Μπόρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=55963&p=269148#p269148

ΛΥΣΗ

(Ρ. Μπόρης)

Μεταφέρω το *B(ABCD)* κατά το διάνυσμα *AA΄*

τότε ο z γίνεται $z+b, b\in C$

στρέφω τον *B* κατά γωνία *θ* γύρω από την κορυφή *A΄* του *A(A΄B΄C΄D΄)* ώστε το *B* να βρεθεί στην *A΄B΄* τοτε ο $z+b$ γίνεται

$$(z+b)z_1, |z_1|=1, z_1\neq 1, z_1\in\mathbb{R}$$

Μεγεθύνω τον $z_1(z+b)$ κατά την αναλογία του λόγου των πλευρών $AB/A'B'>1$ ο $(z+b)z_1$ γίνεται

$$(z+b)z_1a, a>1, a\in\mathbb{R}$$

Θελουμε ο Α να ταυτιστεί με τον Β ή $z=w$ όμως

$$w=(z+b)z_1a, a>1, a\in\mathbb{R} .$$

Άρα $z=(z+b)z_1a,$ ή $(1-z_1a)z=baz_1$.

Η εξίσωση είναι 1ου βαθμου, με $1\neq z_1a$ αφού $|z_1a|>1$, επομένως έχει ακριβώς μια λύση.