ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μπάμπης Στεργίου - Δεκέμβριος 2016

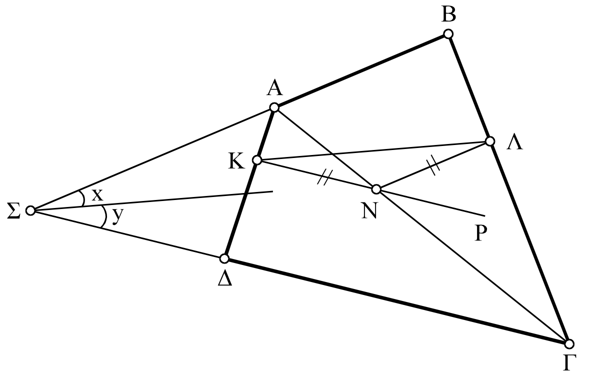
Στο παρόν αρχείο περιέχονται προτάσεις και ασκήσεις από τη μετρική γεωμετρία. Προορίζονται για μαθητές Λυκείου που συμμετέχουν στον διαγωνισμό **Ευκλείδης** *της ΕΜΕ και επιθυμούν να αποκτήσουν ένα καλό υπόβαθρο για τον επόμενο διαγωνισμό της ΕΜΕ , που είναι γνωστός με το όνομα* **Αρχιμήδης.** *Πολλές από τις ασκήσεις αυτές έχουν τεθεί σε διαγωνισμούς, άλλες δε είναι νέες δημιουργίες που έχουν παρουσιαστεί σε αξιόλογα ξενόγλωσσα μαθηματικά περιοδικά ή βιβλία διαγωνισμών και ολυμπιάδων.*

Εύχομαι καλή μελέτη και καλή επιτυχία στους διαγωνισμούς !!!

1.1 **Στις πλευρές ΑΔ, ΒΓ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα, ώστε $\frac{AK}{K\Delta}=\frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Αν οι ΒΑ , ΓΔ τέμνονται στο σημείο Σ, να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Sigma}$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΚΛ.**

Λύση

Αν Ν είναι σημείο της ΑΓ, ώστε $\frac{AN}{N\Gamma}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$, τότε $KN\,//\,\Gamma\Delta$ (διότι $\frac{AK}{K\Delta}=\frac{AN}{N\Gamma}$) και ΝΛ // ΑΒ (διότι $\frac{AN}{N\Gamma}=\frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}$).

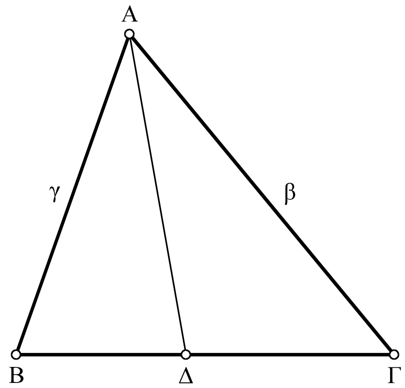


Το τρίγωνο ΝΚΛ είναι ισοσκελές και $\Lambda\hat{N}P=\hat{\Sigma}$ (παράλληλες πλευρές). Άρα η διχοτόμος της $\Lambda\hat{N}P$ είναι παράλληλη με τη διχοτόμο της $\hat{\Sigma}$ και η διχοτόμος της $\Lambda\hat{N}P$ είναι παράλληλη με την ΚΛ (βασική ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου).

1.2 **Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta+\gamma=2\alpha$. Αν ΑΔ είναι διχοτόμος του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AB}=2\mathrm{B\Delta}$ και $\mathrm{A\Gamma}=2\mathrm{\Gamma\Delta}$.**

Λύση

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε:



$$\frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\mathrm{B}+\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\gamma}{\gamma+\beta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta\mathrm{B}}{\alpha}=\frac{\gamma}{2\alpha}\Leftrightarrow\gamma=2\Delta\mathrm{B}$$

Επομένως:

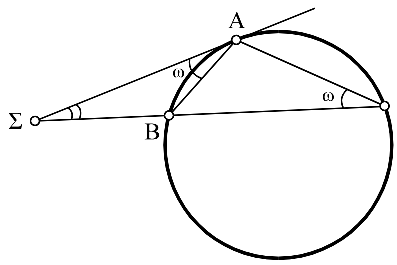
$$\beta=2\alpha-\gamma=2\alpha-2\Delta\mathrm{B}=2(\mathrm{B}\Gamma-\Delta\mathrm{B})=2\cdot\Delta\Gamma$$

Θεώρημα

Από εξωτερικό σημείο Σ ενός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ και μια τέμνουσα ΣΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{A}\Gamma^2}$.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΑΓ είναι όμοια, διότι η $\hat{\Sigma}$ είναι κοινή και $\Sigma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\hat{\Gamma}$. Επομένως:



$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Sigma}{\mathrm{A}\Sigma}=\frac{\mathrm{A}\Sigma}{\Sigma\Gamma}$$

Η σχέση αυτή δίνει τις σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\Sigma\mathrm{A}}{\Sigma\Gamma}\quad\text{και}\quad\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\mathrm{A}}$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν:

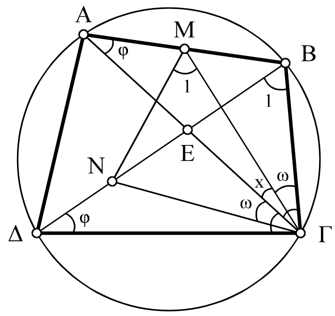
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\Sigma\mathrm{A}}{\Sigma\Gamma}\cdot\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\mathrm{A}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{A}\Gamma^2}=\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\Gamma}\Leftrightarrow\frac{\Sigma\mathrm{B}}{\Sigma\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{A}\Gamma^2}$$

1.3 **Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, με $AB = A\Delta$, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε. Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ και Ν το μέσο του ΔΕ, να αποδειχθεί ότι τα σημεία Β, Γ, Ν, Μ είναι ομοκυκλικά.**

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{M}_1 = \hat{B}_1$. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΒΑΓ είναι όμοια, διότι:

$E\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{A}B = \varphi$ και $E\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ $(A\Delta = AB)$



Είναι επομένως:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{E\Gamma} \Leftrightarrow \frac{MB}{NE} = \frac{B\Gamma}{E\Gamma} \qquad (1)$$

Επειδή όμως $M\hat{B}\Gamma = N\hat{E}\Gamma$, λόγω και της (1), τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΝΕΓ είναι όμοια. Άρα:

$$\frac{\Gamma B}{E\Gamma} = \frac{\Gamma M}{\Gamma N} \Leftrightarrow \frac{\Gamma B}{\Gamma M} = \frac{\Gamma E}{\Gamma N} \qquad (2)$$

Επειδή $E\hat{\Gamma}B = M\hat{\Gamma}N = \omega + x$, η (2) εξασφαλίζει ότι $\overset{\Delta}{EB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{M\Gamma N}$. Επομένως είναι $N\hat{M}\Gamma = N\hat{B}\Gamma$ και έτσι το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι εγγράψιμο.

1.4 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Σ στην πλευρά ΒΓ και τα μέσα Λ, Μ, Ν των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Οι ευθείες ΜΛ, ΝΛ τέμνουν την ευθεία ΑΣ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ΒΕ // ΓΔ.**

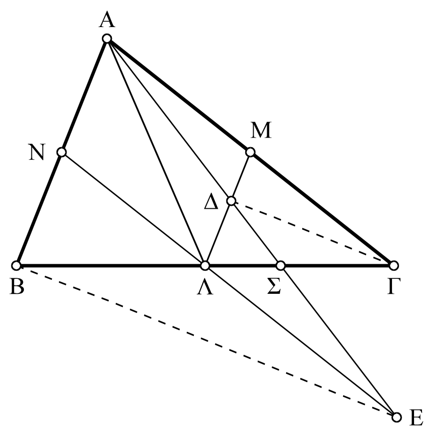
Λύση

- Επειδή ΛΕ // ΑΓ, έχουμε:

$$\frac{\Sigma\Lambda}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma E}{\Sigma A} \quad (1)$$

- Επειδή ΛΔ // ΑΒ, έχουμε:

$$\frac{\Sigma B}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma A}{\Sigma\Delta} \quad (2)$$



Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1), (2) και παίρνουμε:

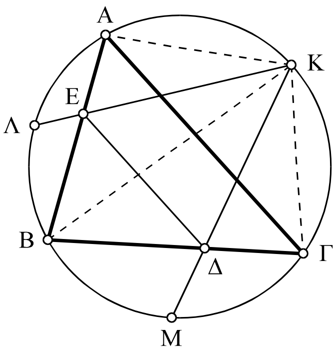
$$\frac{\Sigma B}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma E}{\Sigma\Delta} \Leftrightarrow BE \mathbin{//} \Gamma\Delta$$

1.5 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Κ, Λ, Μ τα μέσα των τόξων** $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ **αντιστοίχως. Αν η ΚΜ τέμνει τη ΒΓ στο Δ και η ΚΛ τέμνει την ΑΒ στο Ε, να αποδειχθεί ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΑΓ.**

Λύση

- Στο τρίγωνο ΚΑΒ η ΚΕ είναι διχοτόμος, οπότε:

$$\frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΚΑ}} = \frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΑ}} \quad (1)$$



- Στο τρίγωνο ΚΒΓ η ΚΔ είναι διχοτόμος, οπότε:

$$\frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}} \quad (2)$$

Επειδή $\text{ΚΑ} = \text{ΚΓ}$, οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

$$\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}$$

Από το τρίγωνο ΒΑΓ προκύπτει λοιπόν ότι ΔΕ // ΑΓ.

1.6 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε** $\text{ΒΔ} = \text{ΔΕ} = \text{ΕΓ}$ **. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ και η παράλληλη από το Ε προς την ΑΓ τέμνονται στο Θ. Να αποδειχθεί ότι το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.**

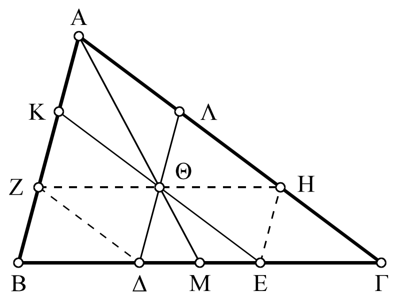
Λύση

Προεκτείνουμε τις ΔΘ, ΕΘ, οι οποίες τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα Λ, Κ αντίστοιχα, και παίρνουμε τα μέσα των ΒΚ, ΓΛ. Είναι:

$$\text{ΒΖ} = \text{ΖΚ} = \text{ΚΑ}$$

$$\text{ΓΗ} = \text{ΗΛ} = \text{ΛΑ}$$

$$\text{ΘΖ} = \text{ΔΕ} = \text{ΘΗ}$$

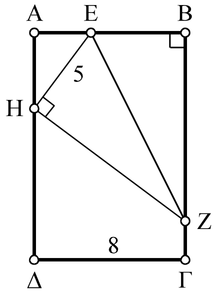


Η ΑΘ είναι διάμεσος του ΑΖΗ, οπότε η ΑΘ διχοτομεί τη ΒΓ (διότι ΖΗ // ΒΓ). Αφού $\text{ΑΖ} = 2\text{ΖΒ}$ και ΖΘ // ΒΜ, προκύπτει ότι $\text{ΑΘ} = 2\text{ΘΜ}$, οπότε το Θ είναι βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$.

1.7 **Ένα ορθογώνιο χαρτί ΑΒΓΔ διπλώνεται κατά μήκος της ΕΖ, ώστε η κορυφή Β να γίνει το σημείο Η της πλευράς ΑΔ. Αν:**

$$\Gamma\Delta = 8 \quad \textit{και} \quad EH = 5$$

να υπολογιστεί το τμήμα ΗΖ.



Λύση

Φέρνουμε $ZK \perp A\Delta$. Τα τρίγωνα ΑΕΗ, ΚΗΖ είναι όμοια, διότι $y + \omega = 90^o$ και $x + \omega = 90^o$. Αλλά $EB = EH = 5$ και αφού $AB = 8$, είναι $AE = 3$.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΗΕ δίνει:

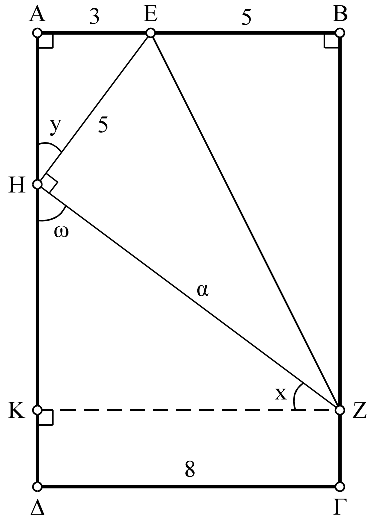
$$AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Η ομοιότητα δίνει:

$$\frac{HZ}{EH} = \frac{ZK}{AH} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{5} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \alpha = 10$$

Επομένως είναι $HZ = 10$.



Σημείωση

Είναι $\text{συν}x = \frac{8}{\alpha}$ *και* $\text{συν}y = \frac{4}{5}$. *Αφού* $x = y$, *παίρνουμε:* $\frac{8}{\alpha} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \alpha = 10$

1.8 **Έστω Ε, Ζ τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ. Αν οι ΑΖ, ΔΕ τέμνονται στο Ρ και οι ΓΕ, ΒΖ τέμνονται στο Σ, να αποδειχθεί ότι:**

α) ΡΣ // ΓΔ, ***β)*** $P\Sigma = \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{AB + \Gamma\Delta}$.

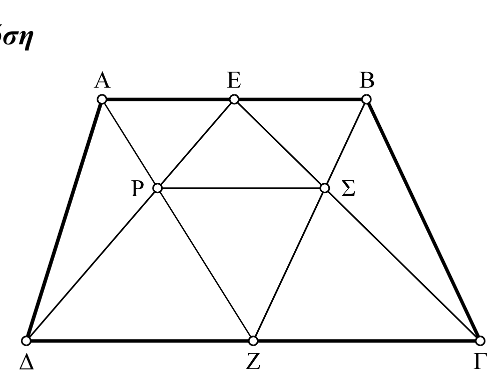
(Ρουμανία – 2008)

Λύση

α) Επειδή ΑΕ // ΔΖ και ΕΒ // ΖΓ, είναι $\overset{\Delta}{PAE} \sim \overset{\Delta}{P\Delta Z}$ και $\overset{\Delta}{\Sigma BE} \sim \overset{\Delta}{\Sigma Z\Gamma}$. Έτσι:

$$\frac{PE}{P\Delta} = \frac{AE}{\Delta Z} = \frac{EB}{Z\Gamma} = \frac{\Sigma E}{\Sigma\Gamma}$$

Άρα, από το τρίγωνο ΕΔΓ παίρνουμε ότι ΡΣ // ΓΔ.



β) Έχουμε:

$$\frac{\text{ΡΣ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΔ}},\quad \frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΡΔ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΔΖ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}}\quad \text{ή}\quad \frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΡ}+\text{ΡΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}$$

Έτσι:

$$\frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}\quad \text{και}\quad \frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΡΣ}}{\text{ΓΔ}}$$

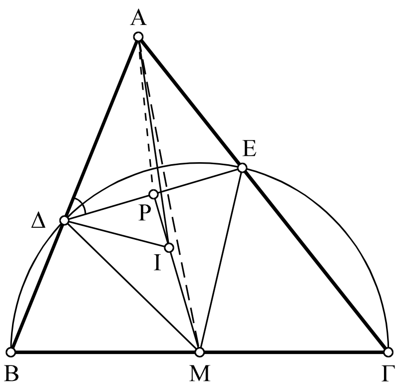
Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι:

$$\frac{\text{ΡΣ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}} \Leftrightarrow \text{ΡΣ}=\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}$$

1.9 **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\text{ΑΒ}\neq\text{ΑΓ}$. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$ και η διχοτόμος της γωνίας $\text{Δ}\hat{\text{Μ}}\text{Ε}$, όπου Μ είναι το μέσο του ΒΓ, τέμνονται στο Ι. Να αποδειχθεί ότι το Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΜΔΕ.**

Λύση

Επειδή $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε}=\hat{\text{Γ}}$ και $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ}=\hat{\text{Β}}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Έστω Ρ το μέσο της ΔΕ. Αφού οι ΑΡ, ΑΜ είναι ομόλογοι διάμεσοι, είναι $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ρ}=\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$.



Αφού η ΑΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$, η ΑΜ είναι τελικά διχοτόμος της $\text{Ρ}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$, οπότε:

$$\frac{\text{ΙΡ}}{\text{ΙΜ}}=\frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΑΜ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}}=$$

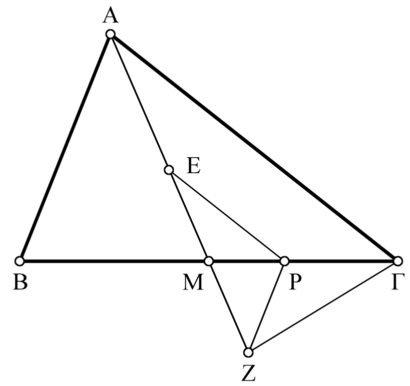
$$=\frac{2\text{ΔΡ}}{2\text{ΒΜ}}=\frac{\text{ΔΡ}}{\text{ΒΜ}}=\frac{\text{ΔΡ}}{\text{ΔΜ}}$$

Επειδή $\frac{\text{ΙΡ}}{\text{ΙΜ}}=\frac{\text{ΔΡ}}{\text{ΔΜ}}$, η ΔΙ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΔΡΜ. Επειδή η ΜΙ είναι διχοτόμος της $\text{Δ}\hat{\text{Μ}}\text{Ε}$, το Ι είναι έγκεντρο του τριγώνου ΜΔΕ.

1.10 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB \neq A\Gamma$, η διάμεσος ΑΜ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Οι παράλληλες από το Ρ προς τις ΑΓ, ΑΒ τέμνουν την ευθεία ΑΜ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $BE = \Gamma Z$.**

(Ρουμανία – 2008)

Λύση



Επειδή ΡΕ // ΑΓ, είναι, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{MP}{M\Gamma} = \frac{ME}{MA} \qquad (1)$$

Όμοια, επειδή ΡΖ // ΑΒ, παίρνουμε:

$$\frac{MP}{MB} = \frac{MZ}{MA} \qquad (2)$$

Επειδή $MB = M\Gamma$, οι σχέσεις (1) και (2) έχουν τα πρώτα μέλη ίσα. Άρα

$\frac{ME}{MA} = \frac{MZ}{MA} \Leftrightarrow ME = MZ$

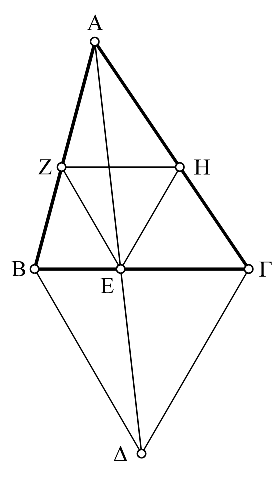
Στο τετράπλευρο ΒΕΓΖ οι διαγώνιες ΒΓ, ΕΖ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $BE = \Gamma Z$.

1.11 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ εκτός αυτού. Η ευθεία ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΔΒ, ΔΓ αντίστοιχα τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ζ, Η. Να αποδειχθεί ότι:**

α) ΖΗ // ΒΓ, ***β) το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.***

(Ρουμανία, Ţiţeica – 2008)

Λύση



α) Είναι:

$$\frac{AZ}{AB} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{AH}{A\Gamma}$$

και επειδή $\frac{AZ}{AB} = \frac{AH}{A\Gamma}$, θα είναι ΖΗ // ΒΓ.

β) Είναι:

$$\frac{ZE}{B\Delta} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{EH}{\Delta\Gamma}$$

και αφού $Β\Delta = \Delta\Gamma$, παίρνουμε ότι $ΖΕ = ΕΗ$.

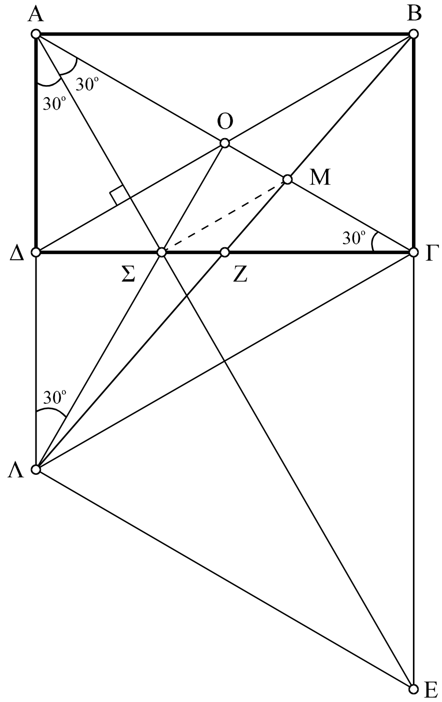
Είναι όμως και $Ζ\hat{Ε}Η = Β\hat{\Delta}\Gamma$, αφού οι πλευρές τους είναι παράλληλες. Άρα το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.

1.12 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $Α\Gamma = 2Α\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Α}\Gamma$ τέμνει τη ΓΔ στο Σ και την ευθεία ΒΓ στο Ε. Η ευθεία ΟΣ τέμνει την ΑΔ στο Λ, ενώ η ευθεία ΒΛ τέμνει την ΑΓ στο Μ. Να αποδειχθεί ότι:

α) ΣΜ // ΓΛ,

β) το τετράπλευρο ΑΓΕΛ είναι ρόμβος.

Λύση



α) • Επειδή $Α\Delta = \frac{Α\Gamma}{2}$, είναι $Α\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$ και έτσι $\Delta\hat{Α}\Sigma = \Sigma\hat{Α}\Gamma = 30^o$. Επειδή:

$$Α\Delta = \frac{Α\Gamma}{2} = \frac{Β\Delta}{2} = ΑΟ$$

το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και έτσι η ΑΣ είναι μεσοκάθετος της ΔΟ. Άρα $\Delta\hat{Ο}\Sigma = Ο\hat{\Delta}\Sigma = 30^o$ και έτσι:

$$\Sigma\hat{Ο}Α = \Sigma\hat{Ο}\Delta + \Delta\hat{Ο}Α = 30^o + 60^o = 90^o$$

Επομένως είναι $\SigmaΟ \perp Α\Gamma$, που σημαίνει ότι η ΛΟ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ. Άρα $\LambdaΑ = \Lambda\Gamma$ και αφού $\Lambda\hat{Α}\Gamma = 60^o$, το τρίγωνο ΛΑΓ είναι ισόπλευρο και έτσι το Σ είναι βαρύκεντρο, δηλαδή $\frac{\SigmaΟ}{\Sigma\Lambda} = \frac{1}{2}$.

• Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΛ είναι $\Gamma\Delta \perp Α\Lambda$, οπότε $\Delta\Lambda = \DeltaΑ = \GammaΒ$. Άρα το ΔΛΓΒ είναι παραλληλόγραμμο και έτσι οι ΓΔ, ΒΛ διχοτομούνται. Επομένως στο $\overset{\Delta}{Β\Gamma\Delta}$ οι ΒΖ, ΓΟ είναι διάμεσοι, οπότε το Μ είναι βαρύκεντρο. Άρα:

$$\frac{ΜΟ}{Μ\Gamma} = \frac{1}{2} = \frac{\SigmaΟ}{\Sigma\Lambda}$$

οπότε από το τρίγωνο ΟΓΛ και το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή συμπεραίνουμε ότι $\SigmaΜ \parallel \Gamma\Lambda$.

β) Επειδή $Β\hat{Ε}Α = Ε\hat{Α}\Lambda = 30^o = Ε\hat{Α}\Gamma$, το τρίγωνο ΓΑΕ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$\Gamma E = \Gamma A = A\Lambda$$

Επειδή $\Gamma E = // A\Lambda$, το ΑΛΕΓ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $A\Gamma = \Gamma E$, αυτό είναι ρόμβος.

Σχόλιο

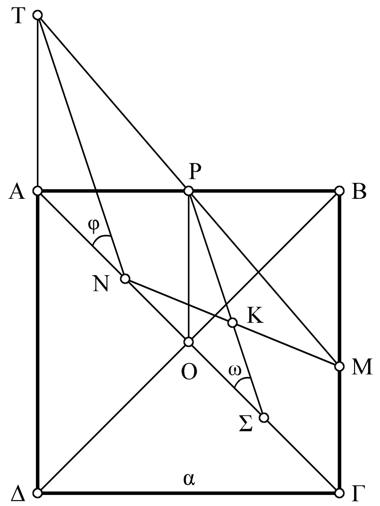
Αφού $\Sigma\hat{A}\Gamma = \Sigma\hat{\Gamma}A = 30^o$, *το* $\overset{\Delta}{\Sigma A \Gamma}$ *είναι ισοσκελές και επειδή η ΣΟ είναι διάμεσος, θα είναι* $\Sigma O \perp A\Gamma$. *Έτσι η ΛΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, οπότε τελικά το* $\overset{\Delta}{\Gamma A \Lambda}$ *είναι ισόπλευρο.*

1.13 **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, το μέσο Ρ του ΑΒ και σημεία Μ, Ν των τμημάτων ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα έτσι, ώστε $BM = \sqrt{2} \cdot AN$. Αν Σ είναι το μέσο του ΟΓ, να αποδειχθεί ότι η ΡΣ διχοτομεί το τμήμα ΜΝ.**

(Ρουμανία – 2008)

Λύση

Έστω ότι η ΜΡ τέμνει τη ΔΑ στο Τ. Είναι $\overset{\Delta}{ATP} = \overset{\Delta}{BPM}$, οπότε $AT = BM$. Έχουμε:



- $BM = \sqrt{2} \cdot AN \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AN} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{AT}{AN} = \sqrt{2}$

- $\dfrac{OP}{O\Sigma} = \dfrac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$

Επειδή $\dfrac{AT}{AN} = \dfrac{OP}{O\Sigma} = \sqrt{2}$ και $T\hat{A}N = P\hat{O}\Sigma = 135^o$, τα τρίγωνα ΑΤΝ και ΟΡΣ είναι όμοια. Επομένως:

$$A\hat{N}T = O\hat{\Sigma}P \ (\varphi = \omega) \Leftrightarrow NT \,//\, P\Sigma$$

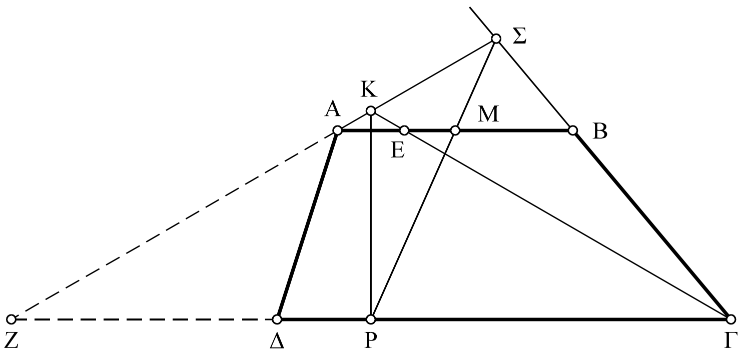
- Στο τρίγωνο ΜΤΝ το Ρ είναι μέσο του ΤΜ και επειδή ΡΣ // ΤΝ, η ΡΣ διχοτομεί το τμήμα ΜΝ, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΜΝ.

1.14 **Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με μικρή βάση την ΑΒ, το μέσο Μ του ΑΒ και σημείο Ρ της πλευράς ΓΔ. Η ευθεία ΡΜ τέμνει την ευθεία ΓΒ στο Σ. Η κάθετη από το Ρ προς τη ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΣ στο Κ. Να αποδειχθεί ότι $\Sigma\hat{A}B = K\hat{\Gamma}Z$.**

(Tuymaada – 2009)

Λύση

Αν η ευθεία ΣΑ τέμνει την ΓΔ στο Ζ, τότε το Ρ είναι μέσο του ΓΖ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ και ΑΒ // ΓΖ. Πιο συγκεκριμένα είναι:



$$\frac{AM}{ZP} = \frac{\Sigma M}{\Sigma P} = \frac{MB}{P\Gamma} \qquad (1)$$

διότι $\overset{\Delta}{\Sigma A}M \sim \overset{\Delta}{\Sigma Z}P$ και $\overset{\Delta}{\Sigma M}B \sim \overset{\Delta}{\Sigma P}\Gamma$. Επειδή $AM = MB$, η (1) δίνει $ZP = P\Gamma$. Το τρίγωνο λοιπόν ΚΖΓ είναι ισοσκελές, διότι η ΚΡ είναι διάμεσος και ύψος. Άρα και το $\overset{\Delta}{KAE}$ είναι ισοσκελές, οπότε:

$$\Sigma\hat{A}B = K\hat{A}M = K\hat{E}A = K\hat{\Gamma}Z$$

1.15 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, το ύψος ΑΔ και οι ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΑΒΓ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

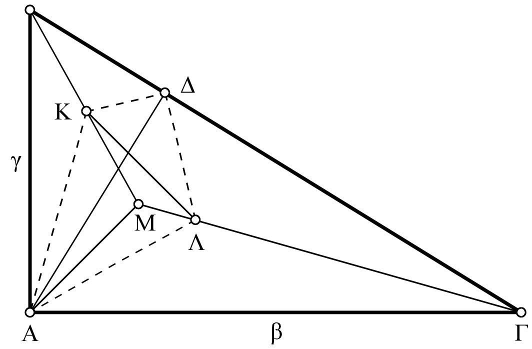
α) $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2$,

β) $K\Lambda = AM$***, όπου Κ, Λ, Μ είναι τα έγκεντρα των τριγώνων ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΑΒΓ αντίστοιχα.***

(ΕΜΕ, Ευκλείδης – 2009)

Λύση

α) Επειδή $\overset{\Delta}{A\Delta B} \sim \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} \sim \overset{\Delta}{AB\Gamma}$, έχουμε:



- $\dfrac{\rho_1}{\rho} = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- $\dfrac{\rho_2}{\rho} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Επομένως, επειδή $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, παίρνουμε:

$$\frac{\rho_1^2}{\rho^2}+\frac{\rho_2^2}{\rho^2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\rho_2}{\rho}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{\gamma^2+\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$$

Άρα $\rho_1^2+\rho_2^2=\rho^2$.

β) Φέρουμε $ΚΖ,\ ΛΗ \perp ΒΓ$. Τότε $ΚΖ=\rho_1,\ ΛΗ=\rho_2$ και έτσι έχουμε:

$$ΚΛ^2=ΚΔ^2+ΔΛ^2=2\rho_1^2+2\rho_2^2=2(\rho_1^2+\rho_2^2)=2\rho^2=ΑΜ^2$$

διότι τα τρίγωνα ΚΖΔ, ΛΗΔ είναι ορθογώνια και ισοσκελή και έτσι:

$$ΚΔ^2=2\rho_1^2,\ \ ΛΔ^2=2\rho_2^2,\ \ ΑΜ^2=2\rho^2$$

(αρκεί να φέρουμε $ΜΘ \perp ΑΓ$, οπότε $ΑΜ^2=2\rho^2$).

Σχόλιο

Στον διαγωνισμό τέθηκε το β′ ερώτημα, το οποίο όμως αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο.

1.16 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ=2ΕΒ$ και το μέσο Ζ της πλευράς ΓΔ. Αν οι ευθείες ΑΖ, ΓΕ τέμνουν τη διαγώνιο ΒΔ στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:

α)** $ΒΔ=4ΒΝ$ **και** $ΔΒ=3ΔΜ$**, β) τα τρίγωνα ΒΕΝ και ΔΜΖ είναι όμοια.

(Ρωσία – 1977)

Λύση

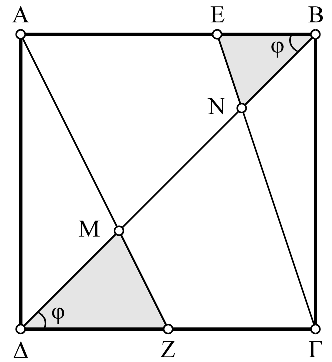
α) Είναι:

- ΒΕ // ΔΓ, οπότε $\overset{\Delta}{ΒΕΝ} \sim \overset{\Delta}{ΝΓΔ}$. Άρα:

$$\frac{ΒΝ}{ΝΔ}=\frac{ΕΒ}{ΓΔ}=\frac{ΕΒ}{ΑΒ}=\frac{1}{3} \qquad (1)$$

- ΔΖ // ΑΒ, οπότε $\overset{\Delta}{ΔΜΖ} \sim \overset{\Delta}{ΑΜΒ}$. Άρα:

$$\frac{ΔΜ}{ΜΒ}=\frac{ΔΖ}{ΑΒ}=\frac{ΔΖ}{ΔΓ}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$



Από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$BN = \frac{1}{3}N\Delta \Leftrightarrow BN = \frac{1}{3}(B\Delta - BN) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3BN = B\Delta - BN \Leftrightarrow 4BN = B\Delta \qquad (3)$$

Από τη σχέση (2) παίρνουμε:

$$\Delta M = \frac{1}{2}MB \Leftrightarrow 2\Delta M = \Delta B - \Delta M \Leftrightarrow 3\Delta M = \Delta B \qquad (4)$$

β) Τα τρίγωνα BEN και ΔMZ έχουν από μία γωνία ίση, τη φ (ως εντός εναλλάξ). Για να είναι όμοια, αρκεί να αποδείξουμε ακόμα ότι οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{BE}{\Delta M} = \frac{BN}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{BE}{BN} = \frac{\Delta M}{\Delta Z}$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

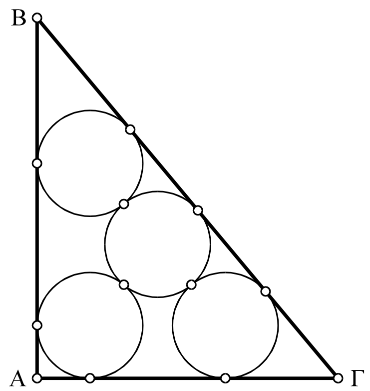
$$B\Delta^2 = A\Delta^2 + AB^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 2AB^2 \Leftrightarrow B\Delta = AB\sqrt{2}$$

Επομένως έχουμε:

- $$\frac{BE}{BN} \overset{(3)}{=} \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{4}B\Delta} = \frac{4}{3}\frac{AB}{B\Delta} = \frac{4}{3}\cdot\frac{AB}{AB\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- $$\frac{\Delta M}{\Delta Z} \overset{(4)}{=} \frac{\frac{1}{3}\Delta B}{\frac{1}{2}\Delta\Gamma} = \frac{2}{3}\frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $\frac{BE}{BN} = \frac{\Delta M}{\Delta Z} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.



1.17 Στο διπλανό σχήμα όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Τρεις εφάπτονται με τη ΒΓ, δύο με την ΑΒ και δύο με την ΑΓ.

α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογιστεί η ακτίνα των κύκλων, αν $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$.

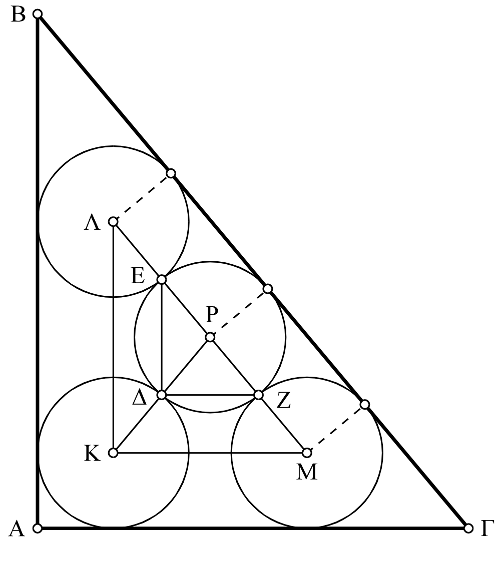
(Berkeley University)

Λύση

α) Επειδή οι ακτίνες των κύκλων είναι ίσες, τα τμήματα ΚΛ, ΚΜ, ΛΜ είναι παράλληλα προς τις πλευρές του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$.
Τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι μέσα των τμημάτων ΚΡ, ΡΛ, ΡΜ αντίστοιχα, οπότε:

$$\Delta\mathrm{E} \,//\, \mathrm{K}\Lambda \quad \text{και} \quad \Delta\mathrm{Z} \,//\, \mathrm{KM}$$

Στον κύκλο (Ρ) η ΕΖ είναι διάμετρος, οπότε $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^{o}$. Άρα $\Lambda\hat{\mathrm{K}}\mathrm{M} = 90^{o}$ και συνεπώς $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 90^{o}$.



β) Οι ευθείες ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ συντρέχουν στο έγκεντρο Ι του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Το Ι είναι επίσης έγκεντρο και του τριγώνου ΚΛΜ, αφού οι πλευρές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Είναι:

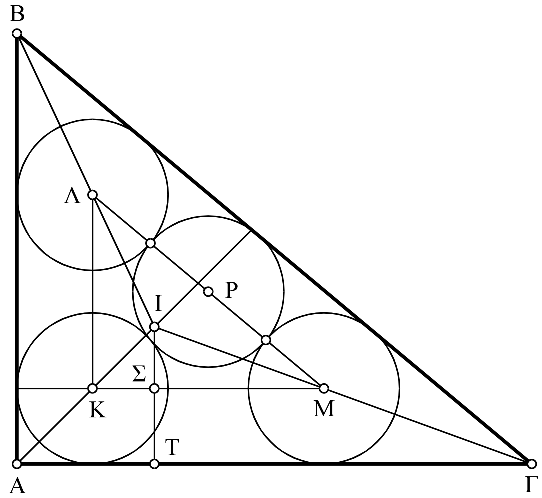
- $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

- Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \tau\rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}3 \cdot 4 = \frac{3+4+5}{2} \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = 1$$

- Αν x είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΛΜ και ρ′ η ακτίνα των ίσων κύκλων, η ομοιότητα των $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{K\Lambda M}}$ δίνει:



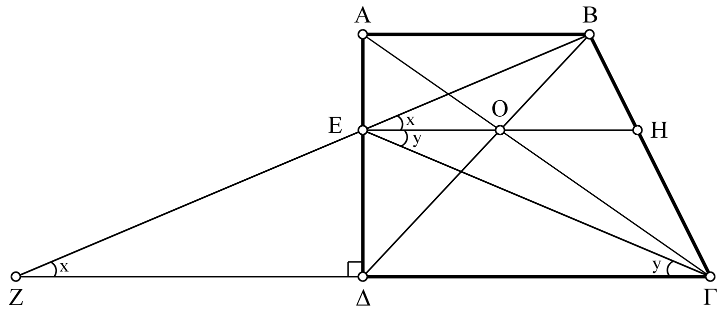
$$\frac{\Lambda\mathrm{M}}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \frac{4\rho'}{5} = \frac{1-\rho'}{1} \Leftrightarrow 4\rho' = 5 - 5\rho' \Leftrightarrow \rho' = \frac{5}{9}$$

διότι, αν η κάθετη από το Ι προς την ΑΓ τέμνει τις ΚΜ, ΑΓ στα σημεία Σ, Τ αντίστοιχα, τότε:

$$\mathrm{IT} = 1\,, \quad \mathrm{I}\Sigma = x \quad \text{και} \quad \Sigma\mathrm{T} = \rho'$$

1.18 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ και Ε η προβολή του Ο στην ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι $O\hat{E}B = O\hat{E}\Gamma$.

Λύση



Έστω ότι η ΒΕ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = y$.

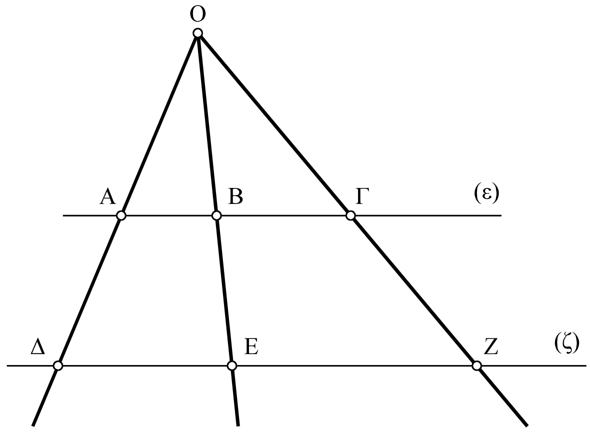
Επειδή ΟΕ // ΓΖ, είναι $x = \hat{Z}$ και $y = E\hat{\Gamma}Z$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισοσκελές. Προεκτείνουμε την ΕΟ μέχρι το Η. Επειδή:

$$\frac{EO}{\Delta\Gamma} = \frac{AO}{A\Gamma} = \frac{BO}{B\Delta} = \frac{OH}{\Gamma\Delta}$$

συμπεραίνουμε ότι $OE = OH$. Αφού λοιπόν ΕΗ // ΓΖ και $OE = OH$, είναι και $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Αλλά τότε στο τρίγωνο ΕΓΖ η ΕΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε αυτό είναι ισοσκελές. Άρα:

$$E\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Gamma}Z \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow O\hat{E}B = O\hat{E}\Gamma$$

ΜΕΘΟΔΟΣ



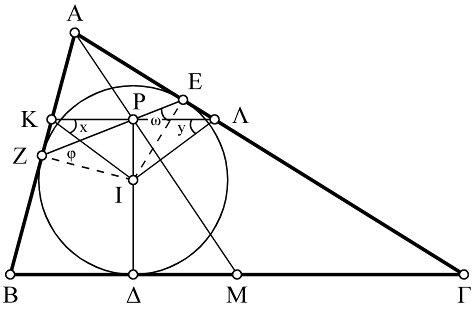
Αν (ε), (ζ) είναι παράλληλες ευθείες και τρεις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο Ο τέμνουν τις (ε), (ζ) στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \qquad (1)$$

- Αν είναι $AB = B\Gamma$, τότε η (1) δίνει $\Delta E = EZ$, δηλαδή το Ε είναι μέσο του ΔΖ.
- Αν είναι $\Delta E = EZ$, τότε η (1) δίνει $AB = B\Gamma$, δηλαδή το Β είναι μέσο του ΑΓ.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι μια ευθεία διέρχεται από το μέσο ενός τμήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο ενός άλλου τμήματος, παράλληλου προς το πρώτο, αρκεί φυσικά να σχηματίζεται κατάλληλη δέσμη.

1.19 **Ο εγγεγραμμένος κύκλος (Ι,ρ) ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν η ευθεία ΙΔ τέμνει το τμήμα ΕΖ στο σημείο Ρ, να αποδειχθεί ότι η ευθεία ΑΡ διέρχεται από το μέσο Μ της ΒΓ.**



Λύση

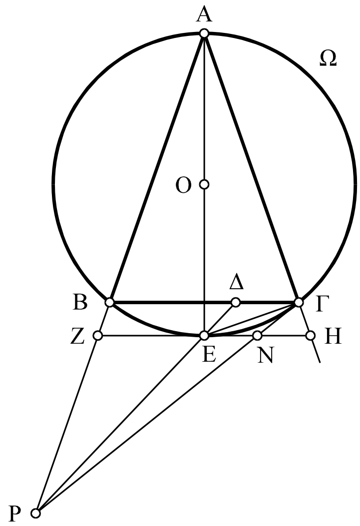
Από το Ρ θεωρούμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα.
Επειδή ΚΛ // ΒΓ, για να διέρχεται η ΑΡ από το μέσο Μ της ΒΓ, αρκεί το Ρ να είναι μέσο του ΚΛ, δηλαδή αρκεί να είναι $ΙΚ = ΙΛ$, αφού $ΙΡ \perp ΚΛ$. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $ΙΚ = ΙΛ$, δηλαδή ότι $x = y$.

Τα τετράπλευρα ΙΡΚΖ και ΙΡΕΛ είναι εγγράψιμα, διότι:

$$Ι\hat{Ρ}Κ = Ι\hat{Ζ}Κ = 90^o \text{ και } Ι\hat{Ρ}Λ = Ι\hat{Ε}Λ = 90^o$$

Επομένως $x = φ$ και $y = ω$. Αλλά $φ = ω$, διότι $ΙΖ = ΙΕ$. Άρα $x = y$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

1.20 **Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο Ω. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ρ. Αν η ΡΕ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, να αποδειχθεί ότι $ΔΒ = 2ΔΓ$.**



Λύση

Έστω ΖΕΗ η εφαπτομένη στο Ε, η οποία τέμνει τη ΡΓ στο Ν.
Αφού:

$$Α\hat{Γ}Ε = 90^o$$

στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΗ η ΓΝ είναι διάμεσος, διότι $ΝΕ = ΝΓ$. Άρα:

$$ΕΝ = \frac{ΕΗ}{2} = \frac{ΕΖ}{2}$$

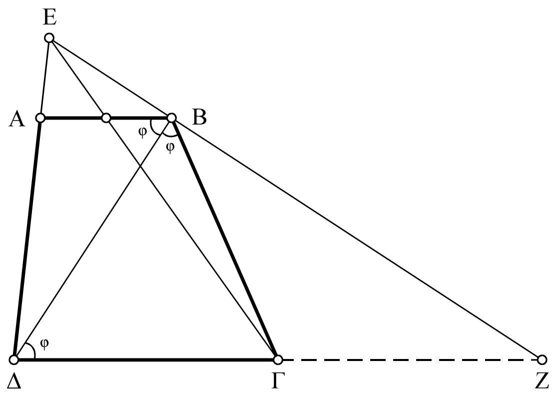
δηλαδή $ΕΖ = 2ΕΝ$. Αφού ΒΓ // ΖΝ και $ΖΕ = 2ΕΝ$, θα είναι και $ΒΔ = 2ΔΓ$.

1.21 **Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Β}$. Η κάθετη προς τη ΒΔ στο σημείο Β τέμνει την ευθεία ΔΑ στο σημείο Ε. Να αποδειχθεί ότι η ΕΓ διέρχεται από το μέσο του ΑΒ.**

Λύση

Έστω ότι η ΕΒ τέμνει τη ΔΓ στο Ζ. Επειδή:

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}A = B\hat{\Delta}\Gamma = \varphi$$



το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ισοσκελές. Άρα $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Αυτό σημαίνει ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ το Γ είναι μέσο του ΔΖ (διότι:

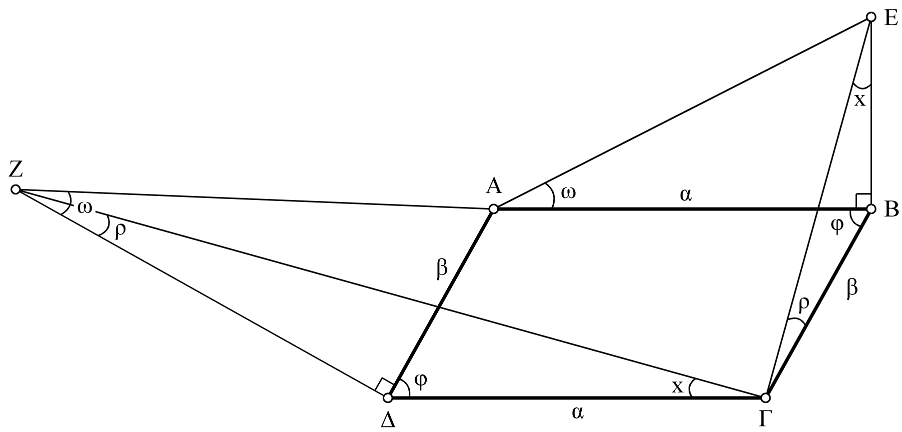
$$\hat{Z} = 90^o - B\hat{\Delta}Z = 90^o - \varphi \text{ και}$$

$$Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}\Delta - \Gamma\hat{B}\Delta = 90^o - \varphi$$

δηλαδή $\hat{Z} = Z\hat{B}\Gamma$ και έτσι $\Gamma Z = \Gamma B = \Gamma\Delta$).
Επειδή λοιπόν το Γ είναι μέσο του ΔΖ και ΑΒ // ΔΖ, η ΕΓ διχοτομεί το τμήμα ΑΒ.

1.22 Στο εξωτερικό ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ έτσι, ώστε $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}Z = 90^o$ και $B\hat{A}E = \Delta\hat{Z}A$. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma E \perp \Gamma Z$.

Λύση



Αφού $\overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{A\Delta Z}$, είναι:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{\Delta Z}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{\Gamma\Delta}{BE} = \frac{\Delta Z}{B\Gamma} \qquad (1)$$

Αλλά $\Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o + \varphi = \Gamma\hat{B}E$, οπότε λόγω της (1) τα τρίγωνα ΔΓΖ και ΒΓΕ είναι όμοια. Συνεπώς

$\Delta\hat{Z}\Gamma = B\hat{\Gamma}E = \rho$ και $\Delta\hat{\Gamma}Z = B\hat{E}\Gamma = x$. Είναι επομένως:

$$E\hat{\Gamma}Z = B\hat{\Gamma}\Delta - B\hat{\Gamma}E - \Delta\hat{\Gamma}Z =$$

$$= B\hat{\Gamma}\Delta - (B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}Z) = B\hat{\Gamma}\Delta - (\rho + x) =$$

$$\overset{\overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}}{=\!=} (180^o - \varphi) - (180^o - 90^o - \varphi) = 90^o$$

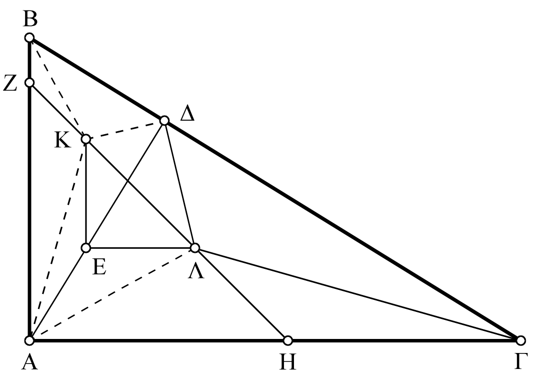
Τη λύση έκανε ο συνάδελφος Πάνος Γιαννόπουλος.

Σχόλιο

Η άσκηση μπορεί να αποδειχθεί επίσης με το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού χρησιμοποιήσουμε πρώτα τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα ΕΑΖ, ΕΒΓ, ΖΔΓ.

1.23 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, το ύψος ΑΔ και τα έγκεντρα Κ, Λ των τριγώνων ΑΔΒ, ΑΔΓ αντιστοίχως. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει το ύψος ΑΔ στο Ε. Να αποδειχθεί ότι ΛΕ // ΑΓ.

Λύση



Η ευθεία ΚΛ σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τις ΑΒ, ΑΓ (ΙΜΟ – 1988). Άρα:

$$E\hat{K}\Lambda = A\hat{Z}\Lambda = 45^o = E\hat{\Delta}\Lambda$$

Άρα το ΕΚΔΛ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$K\hat{E}\Lambda = 180^o - K\hat{\Delta}\Lambda = 90^o$$

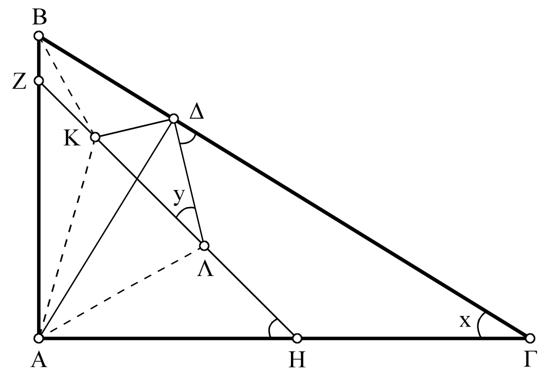
Αφού $E\Lambda \perp KE$ και ΚΕ // ΑΒ, είναι $E\Lambda \perp AB$. Άρα ΕΛ // ΑΓ.

Σχόλιο

- *Θα αποδείξουμε ότι* $A\hat{H}Z = 45^o$. *Προφανώς* $K\hat{\Delta}\Lambda = 90^o$. *Όμως* $\Delta K = \rho_1\sqrt{2}$ *και* $\Delta\Lambda = \rho_2\sqrt{2}$, *όπου* ρ_1, ρ_2 *είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ. Επομένως, αφού* $\overset{\Delta}{\Delta AB} \sim \overset{\Delta}{\Delta A\Gamma}$, *είναι:*

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta\Lambda} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overset{\Delta}{\Delta K\Lambda} \sim \overset{\Delta}{AB\Gamma} \Leftrightarrow x = y$$



Άρα το ΔΛΗΓ είναι εγγράψιμο, οπότε $A\hat{H}Z = \Lambda\hat{\Delta}\Gamma = 45^o$.

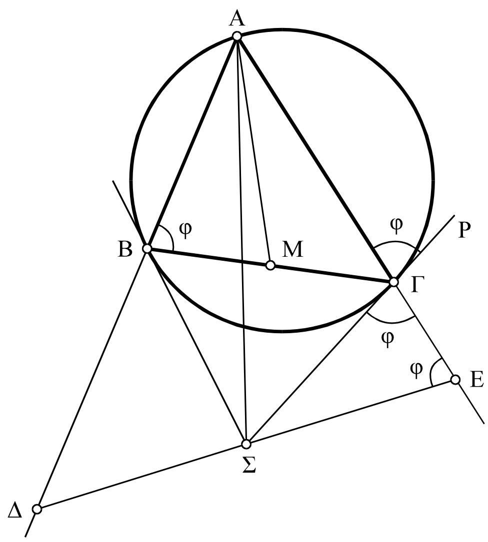
- *Είναι* $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma}{\beta}$, *διότι στα όμοια τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ ο λόγος ομοιότητας είναι* $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$.

1.24 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Β και Γ τέμνονται στο σημείο Σ. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

α) $\mathrm{B\hat{A}M} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Sigma$, ***β)*** $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A}\Sigma} = \text{συν}\hat{\mathrm{A}}$.

(IMO – 1985, short list)

Λύση



α) Στις ημιευθείες ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε έτσι, ώστε $\Sigma\Delta = \Sigma\mathrm{B}$ και $\Sigma\mathrm{E} = \Sigma\Gamma$. Προφανώς:

- $\Sigma\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \Sigma\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{P}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\Sigma\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Sigma\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\Gamma}$.
- $\Sigma\Delta = \Sigma\mathrm{B} = \Sigma\Gamma = \Sigma\mathrm{E}$.

Τα τρίγωνα λοιπόν $\overset{\Delta}{\mathrm{AB}\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}}$ είναι όμοια και οι ΑΜ, ΑΣ είναι αντίστοιχοι (ομόλογοι) διάμεσοι. Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{A}\Delta\Sigma} \sim \overset{\Delta}{\mathrm{AM}\Gamma}$.

Πραγματικά, είναι:

$$\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{2\Delta\Sigma}{2\Gamma\mathrm{M}} = \frac{\Delta\Sigma}{\Gamma\mathrm{M}} \quad \text{και}$$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Sigma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων αυτών παίρνουμε ότι:

$$\Sigma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Sigma$$

β) Η παραπάνω ομοιότητα δίνει επίσης ότι:

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A}\Sigma} = \frac{\Gamma\mathrm{M}}{\Delta\Sigma} = \frac{\Gamma\mathrm{M}}{\Sigma\Gamma} = \text{συν}\Sigma\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \text{συν}\hat{\mathrm{A}}$$

διότι το τρίγωνο ΣΜΓ είναι ορθογώνιο και έτσι $\Gamma\mathrm{M} = \Gamma\Sigma \cdot \text{συν}\Sigma\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \Gamma\Sigma \cdot \text{συν}\hat{\mathrm{A}}$.

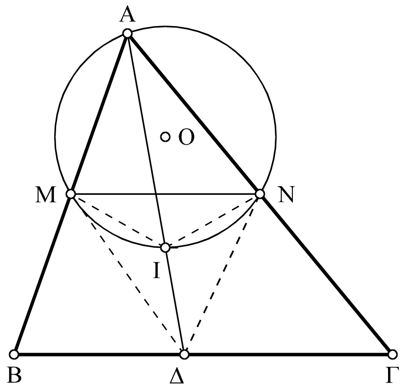
Σχόλιο

Για το ερώτημα (α) μπορούμε επίσης να πούμε ότι η ΑΣ είναι η συμμετροδιάμεσος για την κορυφή Α και αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ, είναι $\Sigma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

1.25 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta+\gamma=2\alpha$, η διχοτόμος ΑΔ και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΑΓ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΜΝ τέμνει την ΑΔ στο Ι και έχει κέντρο Ο. Να αποδειχθεί ότι το Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και $ΟΙ \perp ΘΙ$, όπου Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Είναι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Leftrightarrow \frac{ΔΒ+ΔΓ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ+ΑΓ}{ΑΓ}$, απ' όπου παίρνουμε ότι



$ΒΔ = ΒΜ$ και $ΓΔ = ΓΝ$. Είναι όμως $ΙΜ = ΙΝ$ και:

$$Μ\hat{Α}Ν = 180^o - Μ\hat{Δ}Β - Ν\hat{Δ}Γ =$$

$$=180^o - \frac{180^o-\hat{Β}}{2} - \frac{180^o-\hat{Γ}}{2} =$$

$$=\frac{\hat{Β}+\hat{Γ}}{2} = \frac{180^o-\hat{Α}}{2} = \frac{Μ\hat{Ι}Ν}{2}$$

οπότε το Ι είναι περίκεντρο του $\overset{\Delta}{ΔΜΝ}$. Προφανώς $\overset{\Delta}{ΙΒΜ} = \overset{\Delta}{ΙΒΔ}$

($ΙΜ = ΙΔ$, $ΒΜ = ΒΔ$), οπότε η ΒΙ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Β}$. Άρα το Ι είναι έγκεντρο του $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ (δείτε και 6.41).

Επειδή $\frac{ΙΔ}{ΙΑ}=\frac{ΒΔ}{ΒΑ}=\frac{1}{2}=\frac{ΘΜ}{ΘΑ}$, είναι ΙΘ // ΒΓ // ΜΝ. Αλλά $ΙΟ \perp ΜΝ$, διότι $ΙΜ = ΙΝ$ και $ΟΜ = ΟΝ$. Άρα $ΙΟ \perp ΙΘ$.

1.26 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, με $ΑΒ > ΑΓ$, φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Η κάθετη από το Γ προς την ΑΔ τέμνει την ΑΜ στο σημείο Ε και την ΑΔ στο σημείο Ν. Να αποδειχθεί ότι:

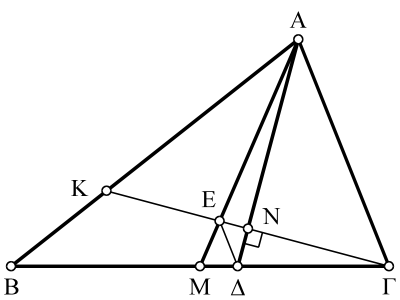
α) ΕΔ // ΑΓ,

β) το τμήμα ΜΝ διχοτομεί το τμήμα ΔΕ.

(JBMO – 2008, short list)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η κάθετος προς τη διχοτόμο μιας γωνίας σχηματίζει με τις πλευρές της γωνίας ισοσκελές τρίγωνο. Προεκτείνουμε λοιπόν τη ΓΕ μέχρι να συναντήσει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Κ. Το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές και το Ν είναι μέσο του ΚΓ. Για να είναι ΕΔ // ΑΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι:



$$\frac{\text{ΕΜ}}{\text{ΕΑ}}=\frac{\text{ΔΜ}}{\text{ΔΓ}} \quad (1)$$

- Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος, οπότε:

$$\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} \quad (2)$$

- Είναι ΜΝ // ΑΒ, οπότε $\overset{\Delta}{\text{ΕΜΝ}} \sim \overset{\Delta}{\text{ΕΚΑ}}$. Έτσι:

$$\frac{\text{ΕΜ}}{\text{ΕΑ}}=\frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΚΑ}} \quad (3)$$

- Στο τρίγωνο ΓΒΚ, το ΜΝ ενώνει μέσα δύο πλευρών, οπότε:

$$\text{ΜΝ}=\frac{\text{ΚΒ}}{2}=\frac{\text{ΑΒ}-\text{ΑΚ}}{2}=\frac{\text{ΑΒ}-\text{ΑΓ}}{2} \qquad (4)$$

Έχουμε επομένως:

$$\frac{\text{ΕΜ}}{\text{ΕΑ}}\overset{(3)}{=}\frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΚΑ}}\overset{(4)}{=}\frac{\frac{\text{ΑΒ}-\text{ΑΓ}}{2}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}-1\right)\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}-1\right)=$$

$$=\frac{\text{ΔΒ}-\text{ΔΓ}}{2\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΔΜ}+\text{ΜΒ}-\text{ΔΓ}}{2\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΔΜ}+(\text{ΜΓ}-\text{ΔΓ})}{2\text{ΔΓ}}=$$

$$=\frac{\text{ΔΜ}+\text{ΜΔ}}{2\text{ΔΓ}}=\frac{2\text{ΔΜ}}{2\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΔΜ}}{\text{ΔΓ}}$$

Αποδείχθηκε λοιπόν η (1), οπότε ΔΕ // ΑΓ.

β) Αφού ΔΕ // ΑΓ, ΜΝ // ΑΒ και η ΜΝ περνάει από το μέσο του ΑΓ, συμπεραίνουμε ότι η ΜΝ περνάει και από το μέσο του ΔΕ.

Άλλος τρόπος

Έστω ότι η ΜΝ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ρ. Σύμφωνα με το θεώρημα Cevá για το τρίγωνο ΑΜΓ, είναι:

$$\frac{\text{ΡΑ}}{\text{ΡΓ}}\cdot\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔΜ}}\cdot\frac{\text{ΕΜ}}{\text{ΕΑ}}=1$$

Όμως $\text{ΡΑ}=\text{ΡΓ}$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔΜ}}=\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΜ}}\Leftrightarrow \text{ΔΕ} \mathbin{//} \text{ΑΓ}$$

Άλλος τρόπος

Προεκτείνουμε τη ΝΡ κατά τμήμα $\text{ΡΣ}=\text{ΡΝ}$. Το ΝΑΣΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΕΝ // ΑΣ και ΝΔ // ΣΓ. Έτσι:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΜ}=\frac{ΝΣ}{ΝΜ}=\frac{ΔΓ}{ΔΜ}$$

Η σχέση $\frac{ΕΑ}{ΕΜ}=\frac{ΔΓ}{ΔΜ}$ εξασφαλίζει ότι $ΕΔ \parallel ΑΓ$.

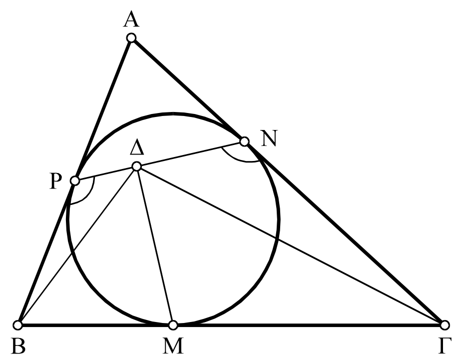
1.27 Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Μ, Ν, Ρ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΡΝ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\frac{ΔΡ}{ΔΝ}=\frac{ΒΡ}{ΓΝ}$. Να αποδειχθεί ότι $ΔΜ \perp ΡΝ$.

(JBMO – short list, 2007)

Λύση

Είναι $ΑΡ = ΑΝ$, οπότε $Α\hat{Ρ}Ν = Α\hat{Ν}Ρ$. Άρα:

$$Β\hat{Ρ}Δ = Γ\hat{Ν}Δ \qquad (1)$$



Επειδή επιπλέον έχουμε:

$$\frac{ΡΔ}{ΝΔ}=\frac{ΡΒ}{ΝΓ}$$

τα τρίγωνα ΡΒΔ και ΝΔΓ είναι όμοια. Επομένως:

- $Ρ\hat{Δ}Β = Ν\hat{Δ}Γ \qquad (2)$
- $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΒΡ}{ΓΝ}=\frac{ΒΜ}{ΓΜ} \qquad (3)$

Από την (3) $\left(\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΒΜ}{ΓΜ}\right)$ συμπεραίνουμε ότι στο τρίγωνο ΔΒΓ η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Δ}Γ$.

Επειδή λοιπόν:

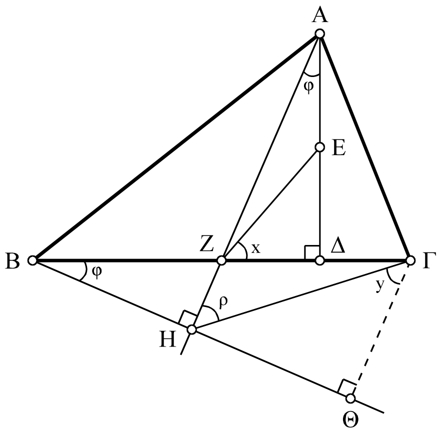
$Β\hat{Δ}Ρ = Γ\hat{Δ}Ν$ και $Β\hat{Δ}Μ = Γ\hat{Δ}Μ$, η ΔΜ είναι κάθετη στη ΡΝ, δηλαδή $ΔΜ \perp ΡΝ$.

1.28 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $ΑΒ \neq ΑΓ$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Ε, Ζ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα και Η η προβολή του Β στην ΑΖ. Να αποδειχθεί ότι η ΕΖ εφάπτεται στον κύκλο (Η,Ζ,Γ).

Λύση

Έστω Θ η προβολή του Γ στην ευθεία ΒΗ. Επειδή ΖΗ, $ΓΘ \perp ΒΗ$ είναι $ΖΗ \parallel ΓΘ$ και αφού το Ζ είναι μέσο του ΒΓ, το Η είναι μέσο του ΒΘ. Φέρουμε τις ΖΕ, ΓΗ. Είναι:

$$\Delta\hat{A}Z = H\hat{B}Z$$



από το εγγράψιμο ΑΔΗΒ (ή έχουν κάθετες πλευρές και είναι οξείες), οπότε τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΓΘ είναι όμοια. Αλλά οι ΖΕ, ΓΗ είναι αντίστοιχοι διάμεσοι, οπότε:

$$E\hat{Z}\Delta = H\hat{\Gamma}\Theta \Leftrightarrow x = y$$

(Αφού τα τρίγωνα ΔΖΑ, ΘΒΓ είναι όμοια, είναι και:

$$\frac{\Delta Z}{\Gamma\Theta} = \frac{\Delta A}{\Theta B} = \frac{2\Delta E}{2\Theta H} = \frac{\Delta E}{\Theta H}$$

Επειδή $E\hat{\Delta}Z = H\hat{\Theta}\Gamma = 90^o$, τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΘΓΗ είναι όμοια. Έτσι $x = y$).

Είναι επομένως:

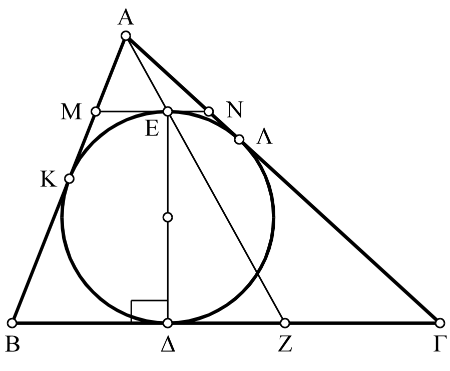
$$Z\hat{H}\Gamma = H\hat{\Gamma}\Theta = \Gamma\hat{Z}E \quad (\rho = x)$$

Άρα, αφού $\rho = x$, συμπεραίνουμε ότι η ΖΕ θα εφάπτεται στον κύκλο (Η,Ζ,Γ) στο σημείο Ζ, αφού η εγγεγραμμένη γωνία ρ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{Z}E$.

1.29 Ο εγγεγραμμένος κύκλος Ω ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται με τη ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε το αντιδιαμετρικό του Δ ως προς τον Ω. Αν η ευθεία ΑΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ, να αποδειχθεί ότι $B\Delta = \Gamma Z$.

Λύση

Η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Μ, Ν. Προφανώς είναι $MN \perp E\Delta$, οπότε η ΜΝ εφάπτεται με τον εγγεγραμμένο κύκλο Ω στο Ε.



Έχουμε:

$$AK = A\Lambda \Leftrightarrow AM + MK = AN + N\Lambda \Leftrightarrow$$

$$AM + ME = AN + NE \qquad (1)$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων (ΑΜΕ, ΑΒΖ) και (ΑΕΝ, ΑΖΓ) έχουμε:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{ME}{BZ} = \frac{AE}{AZ} = \frac{EN}{Z\Gamma} = \frac{AN}{A\Gamma} = \lambda$$

Επομένως είναι:

$$AM = \lambda AB, \quad ME = \lambda BZ, \quad EN = \lambda Z\Gamma, \quad AN = \lambda A\Gamma$$

Έτσι η σχέση (1) δίνει:

$$\lambda AB + \lambda BZ = \lambda A\Gamma + \lambda Z\Gamma \Leftrightarrow AB + BZ = A\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma + (\alpha - Z\Gamma) = \beta + \Gamma Z \Leftrightarrow \Gamma Z = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = \tau - \beta$$

Είναι όμως και $B\Delta = \tau - \beta$ (θεμελιώδης σχέση), οπότε $B\Delta = \Gamma Z = \tau - \beta$.

Σημείωση

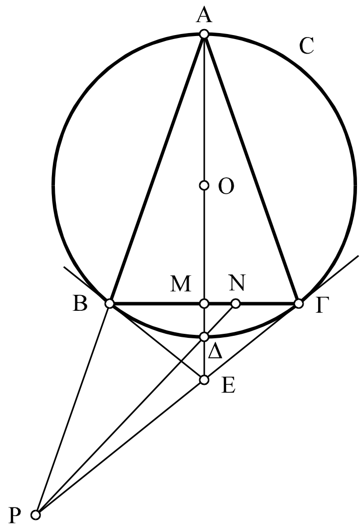
Αφού $\Gamma Z = \tau - \beta$, το Ζ είναι το σημείο επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου που αντιστοιχεί στη γωνία $\hat{A}$ με τη ΒΓ.

Μια άλλη λύση προκύπτει θεωρώντας την ομοιοθεσία που απεικονίζει το Ε στο Ζ. Επειδή ΜΝ // ΒΓ, ο κύκλος Ω απεικονίζεται σε κύκλο που θα εφάπτεται με τη ΒΓ στο Ζ. Αλλά η εικόνα (το ομοιόθετο) του Ω είναι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε θα είναι $Z\Gamma = \tau - \beta = B\Delta$.

1.30 **Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ** $(AB = A\Gamma)$ **είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο C. Η εφαπτομένη του C στο Γ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ρ. Αν Δ είναι το μέσο του τόξου** $\overset{\frown}{B\Gamma}$**, που δεν περιέχει το Α, και η ΡΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ν, να αποδειχθεί ότι** $BN = 2N\Gamma$**.**

Λύση

Έστω ότι η εφαπτομένη στο Β τέμνει τη ΓΡ στο Ε. Η ΒΓ είναι η πολική του Ε και έτσι η τετράδα Ε, Δ, Μ, Α είναι αρμονική. Η δέσμη λοιπόν Ρ(Ε,Δ,Μ,Α) είναι αρμονική και αφού οι ακτίνες ΡΕ, ΡΔ, ΡΜ, ΡΑ τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Γ, Ν, Μ, Β συμπεραίνουμε ότι η τετράδα Β, Μ, Ν, Γ είναι αρμονική. Άρα:



$$\frac{MB}{MN} = \frac{\Gamma B}{\Gamma N} \Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - \Gamma N} = \frac{\alpha}{\Gamma N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha - 2\Gamma N} = \frac{1}{\Gamma N} \Leftrightarrow \Gamma N = \frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\Gamma = 3\Gamma N \Leftrightarrow BN + N\Gamma = 3N\Gamma \Leftrightarrow BN = 2N\Gamma$$

Σχόλιο

Επειδή $OB^2 = OM \cdot OE$ *(από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΕ) είναι* $OA^2 = OM \cdot OE$. *Αφού το Ο είναι μέσο του ΑΔ, η σχέση* $O\Delta^2 = OM \cdot OE$ *δίνει ότι η τετράδια Α, Μ, Δ, Ε είναι αρμονική (από τη σχέση Newton).*

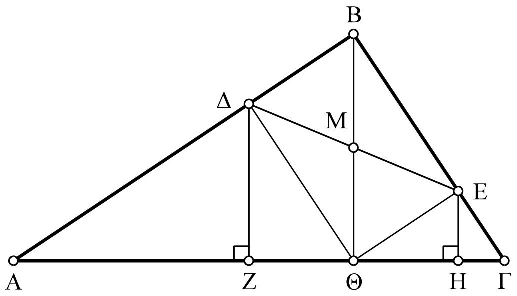
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε επίσης αν θεωρήσουμε το σημείο τομής Σ των ΡΝ και ΑΓ. Στο τρίγωνο ΓΜΕ η ΓΔ είναι προφανώς διχοτόμος και επειδή $\Gamma\mathrm{A} \perp \Gamma\Delta$*, τα Δ, Α είναι αρμονικά συζυγή των Ε, Μ. Η συνέχεια είναι όπως και στην παραπάνω λύση.*

1.31 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{\mathrm{B}} = 90^{\circ}$ **. Φέρνουμε το ύψος ΒΘ, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ. Από το Θ φέρνουμε τη ΘΕ κάθετη στη ΒΓ και τη ΔΘ κάθετη στην ΑΒ. Έπειτα από το Ε φέρνουμε την ΕΗ κάθετη στην ΑΓ και από το Δ φέρνουμε τη ΔΖ κάθετη στην ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι** $\mathrm{Z}\Theta = \Theta\mathrm{H}$ **.**

Λύση

Φέρνουμε τη ΔΕ. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων ΒΘ, ΔΕ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΒΔΘΕ. Τότε το Μ είναι μέσο του ΔΕ.

Αφού η ΜΘ είναι κάθετη στη ΖΗ, είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΖΗΕ, οπότε $\mathrm{Z}\Theta = \mathrm{H}\Theta$.



Άλλος τρόπος

Αφού τα τρίγωνα ΒΘΔ, ΒΘΕ είναι ίσα, έπεται ότι το ύψος από το Δ του πρώτου είναι ίσο με το ύψος από το Ε του δευτέρου. Αλλά τα ύψη αυτά είναι ίσα με ΖΘ και ΗΘ αντίστοιχα.

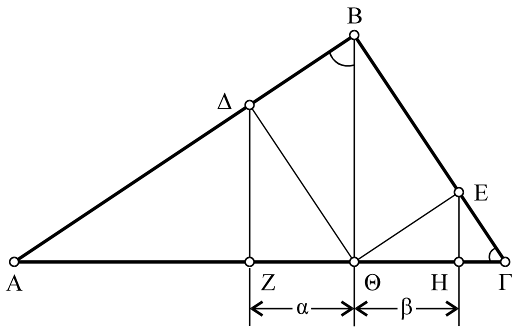
Άλλος τρόπος

Επειδή $\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{Z}\Theta} \sim \overset{\Delta}{\mathrm{B}\Delta\Theta} = \overset{\Delta}{\mathrm{B}\Theta\mathrm{E}} \sim \overset{\Delta}{\mathrm{E}\Theta\mathrm{H}}$, ισχύουν:

$$\frac{\mathrm{Z}\Theta}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\Delta\Theta}{\mathrm{B}\Theta} \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{H}\Theta}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{E}\Theta}{\mathrm{B}\Theta} \quad (2)$$

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{E}\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{\mathrm{BE}} = 1 \quad (3)$$



Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\mathrm{Z}\Theta \cdot \mathrm{BE}}{\mathrm{B}\Delta \cdot \mathrm{H}\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{\mathrm{E}\Theta} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Z}\Theta}{\mathrm{H}\Theta} = \frac{\mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\Theta}{\mathrm{BE} \cdot \mathrm{E}\Theta} \overset{(1)}{=} 1 \Leftrightarrow \mathrm{Z}\Theta = \mathrm{H}\Theta$$

Άλλος τρόπος

Η άσκηση είναι πολύ καλή εφαρμογή του τύπου της προβολής διανύσματος.

Έστω $\overrightarrow{\Theta Z}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Theta H}=\vec{\beta}$. Έχουμε:

$$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\overrightarrow{\Theta B}=0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\overrightarrow{\Theta E}+\overrightarrow{\Theta \Delta})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Theta E}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Theta \Delta}-\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{\Theta E}-\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{\Theta \Delta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\overrightarrow{\Theta E}+\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\overrightarrow{\Theta \Delta}-\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\overrightarrow{\Theta E}-\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\overrightarrow{\Theta \Delta}=0 \Leftrightarrow$$

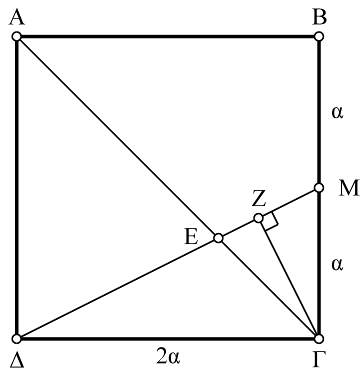
$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \Theta Z=\Theta H$$

1.32 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το μέσο Μ του ΒΓ, το σημείο τομής Ε της ΑΓ με τη ΔΜ και η προβολή Ζ του Γ στη ΔΜ. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma Z=3ZE$.

Λύση

Αν θέσουμε $AB=2\alpha$, τότε $\Delta M=\alpha\sqrt{5}$ και αφού:

$$\frac{EM}{E\Delta}=\frac{M\Gamma}{A\Delta}=\frac{1}{2}$$



είναι $E\Delta=\dfrac{2\alpha\sqrt{5}}{3}$ και $EM=\dfrac{\alpha\sqrt{5}}{3}$. Όμως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΜ είναι:

$$\Gamma M^2=M\Delta\cdot MZ \Leftrightarrow \alpha^2=\alpha\sqrt{5}\cdot MZ \Leftrightarrow MZ=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$$

Άρα:

$$EZ=EM-ZM=\frac{\alpha\sqrt{5}}{3}-\frac{\alpha}{\sqrt{5}}=\frac{2\alpha}{3\sqrt{5}} \qquad (1)$$

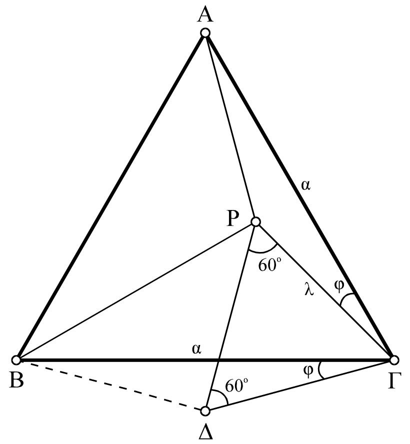
Στο $\overset{\Delta}{\Gamma M\Delta}$ είναι:

$$M\Delta\cdot\Gamma Z=\Gamma\Delta\cdot\Gamma M \Leftrightarrow \alpha\sqrt{5}\cdot\Gamma Z=2\alpha^2 \Leftrightarrow \Gamma Z=\frac{2\alpha}{\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Από τη (2) παίρνουμε $\Gamma Z=3EZ$.

1.33 Στο εσωτερικό ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $B\hat{P}\Gamma=105^o$. Αν $PB^2=PA^2+P\Gamma^2$, να αποδειχθεί ότι $PB\perp A\Gamma$.

Λύση



Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΡΓΔ, όπως δείχνει το σχήμα. Είναι τότε $\overset{\Delta}{\mathrm{AP\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$, οπότε $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AP}$. Έχουμε:

$$\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{P\Gamma}^2 \Leftrightarrow \mathrm{PB}^2 = \mathrm{B\Delta}^2 + \mathrm{P\Delta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 90^{o}$$

Είναι επίσης:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{P}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{P}}\Gamma - \Delta\hat{\mathrm{P}}\Gamma = 105^{o} - 60^{o} = 45^{o}$$

οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΡΒΔ είναι και ισοσκελές.
Έτσι:

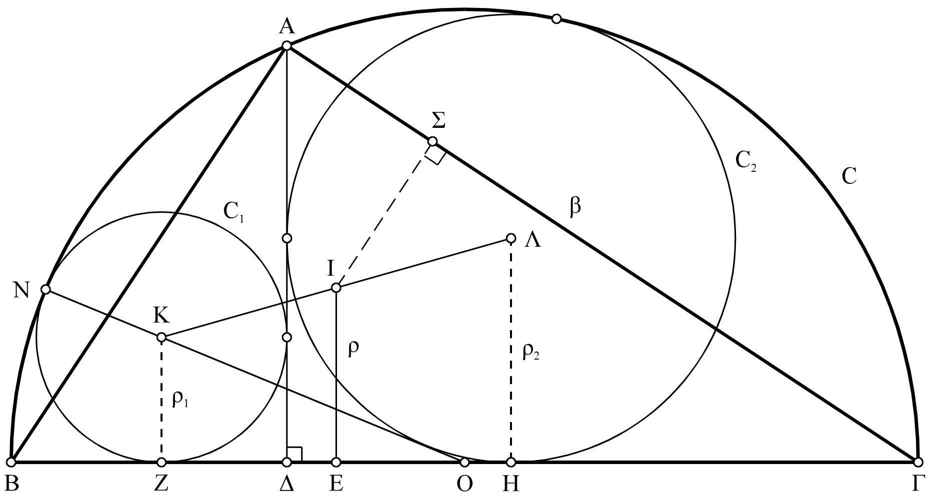
$$\mathrm{PA} = \mathrm{B\Delta} = \mathrm{P\Delta} = \mathrm{P\Gamma}$$

Αφού $\mathrm{PA} = \mathrm{P\Gamma}$ και $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$, είναι $\mathrm{BP} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

1.34 Σε ημικύκλιο C διαμέτρου ΒΓ θεωρούμε σημείο Α και έστω Δ η προβολή του Α στη ΒΓ. Ένας κύκλος C_1 εφάπτεται με τον C και με τα τμήματα ΔΒ, ΔΑ. Ένας κύκλος C_2 εφάπτεται με τον C και με τα τμήματα ΔΑ, ΔΓ. Έστω Ω ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι οι τρεις αυτοί κύκλοι C_1, C_2, Ω έχουν και άλλη κοινή εφαπτομένη, εκτός από την ευθεία ΒΓ.

(IMO – 1969)

Λύση



Έστω ρ_1, ρ_2, ρ οι ακτίνες των κύκλων C_1, C_2, Ω αντίστοιχα, Ι το έγκεντρο του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\mathrm{IE} \perp \mathrm{B\Gamma}$. Ισχύει κατά τα γνωστά ότι:

- $\mathrm{BE} = \tau - \beta$, $\Gamma\mathrm{E} = \tau - \gamma$, $\rho = \mathrm{I\Sigma} = \mathrm{A\Sigma} = \tau - \alpha$

- $KZ=\rho_1$, $OK=ON-KN=\frac{\alpha}{2}-\rho_1$, $OZ=O\Delta+\Delta Z=\left(\Gamma\Delta-\frac{\alpha}{2}\right)+\rho_1=(\Gamma\Delta+\rho_1)-\frac{\alpha}{2}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΖ παίρνουμε:

$$OK^2=KZ^2+ZO^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}-\rho_1\right)^2=\rho_1^2+\left[(\Gamma\Delta+\rho_1)-\frac{\alpha}{2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4}+\rho_1^2-\alpha\rho_1=\rho_1^2+(\Gamma\Delta+\rho_1)^2+\frac{\alpha^4}{4}-\alpha\cdot\Gamma\Delta-\alpha\rho_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\Gamma\Delta=(\Gamma\Delta+\rho_1)^2 \Leftrightarrow \Gamma B\cdot\Gamma\Delta=(\Gamma\Delta+\rho_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma A^2=(\Gamma\Delta+\rho_1)^2 \Leftrightarrow \beta=\Gamma\Delta+\rho_1 \Leftrightarrow \rho_1=\beta-\Gamma\Delta \qquad (1)$$

Όμοια, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΗ, βρίσκουμε:

$$\rho_2=\gamma-B\Delta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

- $BZ=B\Delta-Z\Delta=B\Delta-\rho_1\overset{(1)}{=}B\Delta-\beta+\Gamma\Delta=\alpha-\beta$
- $BH=B\Delta+\Delta H=B\Delta+\rho_2\overset{(2)}{=}B\Delta+\gamma-B\Delta=\gamma$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το Ε είναι μέσο του ΖΗ. Έχουμε:

- $ZE=BE-BZ=(\tau-\beta)-(\alpha-\beta)=\tau-\alpha$ (3)
- $EH=BH-BE=\gamma-(\tau-\beta)=\beta+\gamma-\tau=\beta+\gamma-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\tau-\alpha$ (4)

Από τις (3) και (4) παίρνουμε ότι $ZE=EH$. Είναι όμως επίσης:

$$KZ+\Lambda H=\rho_1+\rho_2=(\beta-\Gamma\Delta)+(\gamma-B\Delta)=$$

$$=\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)=2\rho=2IE$$

Στο τραπέζιο λοιπόν ΚΖΗΛ το Ε είναι μέσο του ΖΗ, ΕΙ // ΚΖ // ΛΗ και αφού $IE=\frac{KZ+\Lambda H}{2}$, το Ι είναι το μέσο του ΚΛ.

Αφού τα Κ, Ι, Λ είναι συνευθειακά, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, Ω έχουν και δεύτερη κοινή εφαπτομένη μια και η ΒΓ είναι κοινή εφαπτομένη.

Σχόλιο

Τα σημεία Κ, Ι, Λ είναι συνευθειακά, ακόμα και στην περίπτωση που το $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *είναι τυχαίο τρίγωνο και το Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ.*
(Δες: Iśtran Reiman, International Olympiad 1959 – 1999, problem 1969/4, σελίδα 142.)

1.35 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Από το Α θεωρούμε την ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ, που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της ΑΒ που είναι το σημείο Γ. Στην Αx παίρνουμε σημεία Δ, Ε, ώστε το ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος και το Ε να βρίσκεται ανάμεσα στα Α, Δ. Η κάθετη προς τη ΔΓ στο Δ τέμνει την ευθεία ΒΑ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}Z}$**.**

(ΕΜΕ, Θαλής – 2007)

Λύση

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

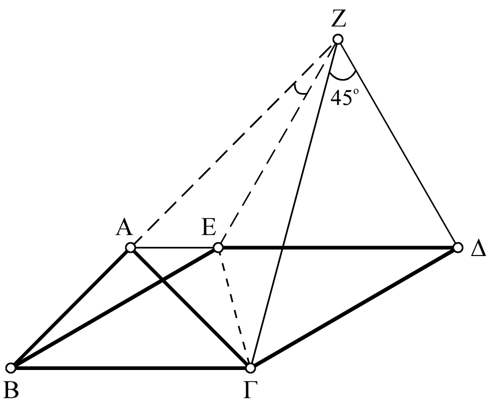
Αν θέσουμε $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \alpha$, τότε $\mathrm{B\Gamma} = \alpha\sqrt{2}$. Επίσης το ΑΓΔΖ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 45^{\circ}$$

Επομένως το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές και έτσι

$$\Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma = \alpha\sqrt{2}\,.$$

Με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΓΖ βρίσκουμε ότι $\Gamma\mathrm{Z} = 2\alpha = 2\mathrm{A}\Gamma$.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ προκύπτει τώρα ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 30^{\circ}$ και έτσι



$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 30^{\circ}$. Αφού $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z} = \alpha\sqrt{2}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 30^{\circ}$, το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

Παρατηρούμε ότι:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\Delta - \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 60^{\circ} - 45^{\circ} = 15^{\circ} = \frac{1}{2}\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$$

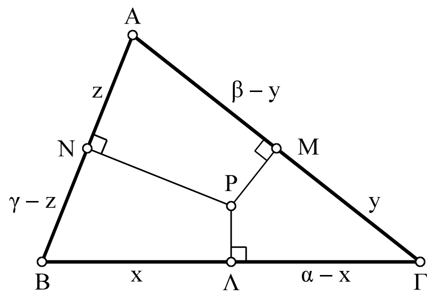
οπότε η ΖΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$. Αλλά και η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΖΓ. Άρα η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$.

1.36 Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο. Να προσδιοριστεί το εσωτερικό σημείο Ρ του τριγώνου ΑΒΓ, για το οποίο η παράσταση $S = B\Lambda^2 + \Gamma M^2 + AN^2$ είναι η ελάχιστη, όπου Λ, Μ, Ν είναι οι προβολές του Ρ στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.

(IMO – 1987, short list)

Λύση

Έστω $B\Lambda = x$, $\Gamma M = y$, $AN = z$. Από το θεώρημα Carnot παίρνουμε:



$$\Lambda\Gamma^2 + MA^2 + NB^2 = B\Lambda^2 + \Gamma M^2 + AN^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Η ισότητα αυτή επιτρέπει να γράψουμε:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + (\alpha - x)^2}{2} + \frac{y^2 + (\beta - y)^2}{2} + \frac{z^2 + (\gamma - z)^2}{2}$$

Όμως:

$$x^2 + (\alpha - x)^2 = \frac{2x^2 + 2(\alpha - x)^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\alpha - 2x)^2}{2} \geq \frac{\alpha^2}{2}$$

με ισότητα όταν $\alpha - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}$.

Όμοια, έχουμε ότι:

$$y^2 + (\beta - y)^2 \geq \frac{\beta^2}{2} \quad \text{και} \quad z^2 + (\gamma - z)^2 \geq \frac{\gamma^2}{2}$$

Έτσι:

$$S = B\Lambda^2 + \Gamma M^2 + AN^2 \geq \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}$$

με ισότητα για $x=\frac{\alpha}{2}$, $y=\frac{\beta}{2}$, $z=\frac{\gamma}{2}$. Η ελάχιστη λοιπόν τιμή της παράστασης S είναι η $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}$ και παρουσιάζεται αν τα Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, δηλαδή όταν το Ρ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

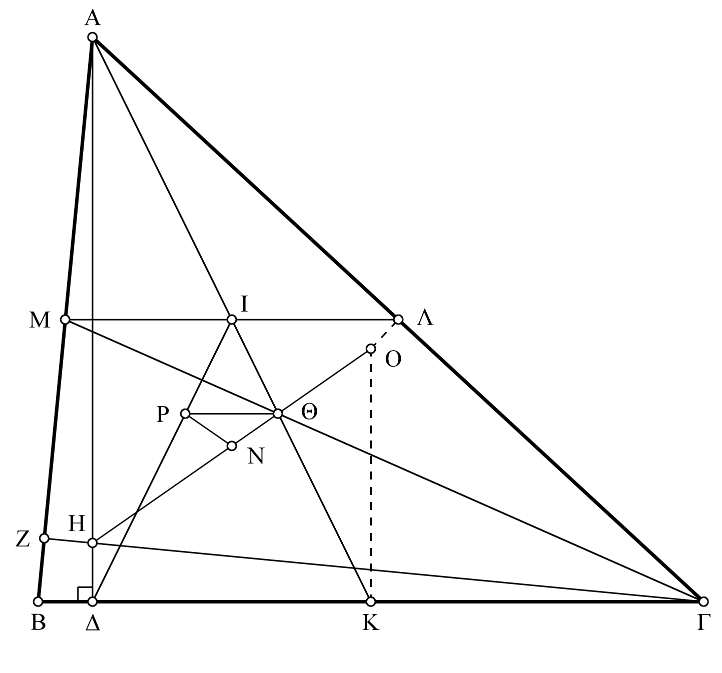
1.37 **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν Θ, Ρ, Σ, Τ είναι τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΜΛ, ΕΚΜ, ΖΚΛ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα σημεία Θ, Ρ, Σ, Τ είναι ομοκυκλικά.**

Λύση

Ας είναι Ρ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΜΛ. Προφανώς το σημείο τομής Ι των ΜΛ και ΑΚ είναι μέσο των ΜΛ, ΑΚ και έτσι το Ρ βρίσκεται στη διάμεσο ΔΙ του τριγώνου ΔΜΛ. Είναι:

$$\frac{\text{ΡΙ}}{\text{ΡΔ}}=\frac{\text{ΘΙ}}{\text{ΘΚ}}=\frac{1}{2}$$

οπότε ΘΡ // ΚΔ. Αν Ν είναι το μέσο του ΟΗ, όπου Ο είναι το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο, θα αποδείξουμε ότι $\text{ΝΡ}=\text{ΝΘ}$, οπότε τα σημεία Ρ, Σ, Τ, Θ ισαπέχουν από το σημείο Ν, μέσο του ΗΟ.



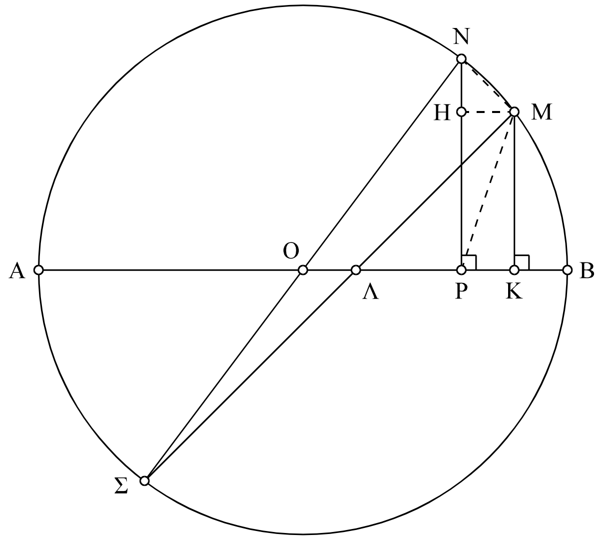
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΚ η ΔΙ είναι διάμεσος και έτσι $\text{ΙΔ}=\text{ΙΚ}$. Επειδή $\text{ΝΔ}=\text{ΝΚ}$, αφού το Ν είναι το κέντρο του κύκλου Euler του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ και $\text{ΙΔ}=\text{ΙΚ}$, θα είναι $\text{ΙΝ}\perp\text{ΘΡ}$. Έτσι η ΙΝ είναι μεσοκάθετος του ΘΡ, οπότε $\text{ΝΡ}=\text{ΝΘ}$.

Όμοια λοιπόν είναι $\text{ΝΣ}=\text{ΝΘ}$, $\text{ΝΤ}=\text{ΝΘ}$, οπότε τα σημεία Θ, Ρ, Σ, Τ είναι ομοκυκλικά.

1.38 Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΟΒ και σημείο Ρ της ακτίνας ΟΒ, ώστε $2OP = 3PB$. Από το μέσο Κ του ΡΒ και από το σημείο Ρ υψώνουμε κάθετες προς την ΑΒ, που τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Αν Λ είναι σημείο του τμήματος ΟΒ, ώστε $O\Lambda = KB$, να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΜΛ και ΝΟ τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΜΝ.

Λύση

Βρίσκουμε:



- $AP = AO + OP = R + \frac{3R}{5} = \frac{8R}{5}$, $PK = KB = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}\cdot\frac{2R}{5} = \frac{R}{5}$

- $AK = AP + PK = \frac{8R}{5} + \frac{R}{5} = \frac{9R}{5}$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΝΒ, ΑΜΒ παίρνουμε:

- $NP^2 = PA \cdot PB = \frac{8R}{5}\cdot\frac{2R}{5} = \frac{16R^2}{25}$ και $NP = \frac{4R}{5}$

- $MK^2 = KA \cdot KB = \frac{9R}{5}\cdot\frac{R}{5} = \frac{9R^2}{25}$ και $MK = \frac{3R}{5}$

Φέρουμε $MH \perp NP$. Αφού $NH = NP - HP = \frac{R}{5} = KP$, είναι $M\hat{N}P = 45^o = M\hat{\Lambda}P$, διότι:

$$K\Lambda = OB - O\Lambda - KB = R - \frac{R}{5} - \frac{R}{5} = \frac{3R}{5} = KM$$

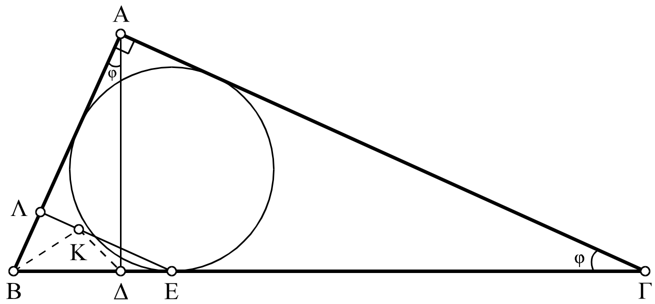
Αφού λοιπόν το ΛΝΜΡ είναι εγγράψιμο, είναι:

$$N\hat{M}\Lambda = N\hat{P}\Lambda = 90^o$$

Άρα η ΝΣ είναι διάμετρος, δηλαδή οι ΜΛ, ΝΟ τέμνονται πάνω στον κύκλο (Ο).

1.39 Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^o$, εφάπτεται με την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν Κ είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΔΒ, να αποδειχθεί ότι $EK \perp AB$.

Λύση



Φέρουμε $K\Lambda \perp AB$. Τότε:

$$B\Lambda = \frac{BA + B\Delta - A\Delta}{2} \qquad (1)$$

διότι το Λ είναι σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου (Κ) του $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ με την πλευρά ΑΒ.
Είναι επίσης:

$$BE = \frac{BA + B\Gamma - A\Gamma}{2} \qquad (2)$$

Όμως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{BA}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \lambda \Leftrightarrow (BA = \lambda B\Gamma,\ B\Delta = \lambda AB,\ A\Delta = \lambda A\Gamma)$$

Άρα οι σχέσεις (1) και (2) με διαίρεση δίνουν:

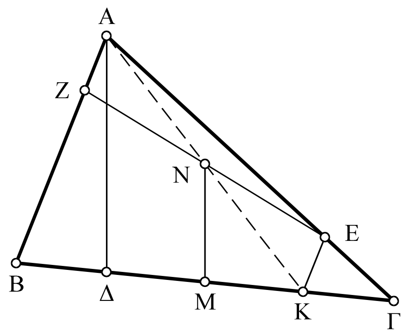
$$\frac{B\Lambda}{BE} = \frac{BA + B\Delta - A\Delta}{BA + B\Gamma - A\Gamma} = \frac{\lambda B\Gamma + \lambda AB - \lambda A\Gamma}{BA + B\Gamma - A\Gamma} = \lambda = \frac{BA}{B\Gamma}$$

Αφού $\frac{B\Lambda}{BE} = \frac{BA}{B\Gamma}$, είναι ΛΕ // ΑΓ και έτσι $E\Lambda \perp AB$. Επειδή $K\Lambda \perp AB$, τα σημεία Ε, Κ, Λ είναι συνευθειακά. Επομένως $EK \perp AB$.

1.40 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα για τα οποία ισχύει $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΒ}}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ν το μέσο του τμήματος ΖΕ, να αποδειχθεί ότι ΜΝ // ΑΔ.

(Ρουμανία – 2006)

Λύση



Έστω Κ το συμμετρικό του Δ ως προς το σημείο Μ, δηλαδή $\text{ΜΚ} = \text{ΜΔ}$. Τότε $\text{ΚΓ} = \text{ΒΔ}$ και $\text{ΚΒ} = \text{ΔΓ}$. Έχουμε:

$$\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΚΒ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}$$

δηλαδή:

$$\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΚΒ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}}$$

Η σχέση αυτή δίνει ότι ΚΕ // ΑΒ. Από την άλλη μεριά είναι $\overset{\Delta}{\text{ΓΚΕ}} \sim \overset{\Delta}{\text{ΓΑΒ}}$ και έτσι:

$$\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}}$$

διότι:

$$\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΒ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΕ}+\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΖ}+\text{ΖΒ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}}$$

Επομένως:

$$\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}} \Leftrightarrow \text{ΚΕ} = \text{ΑΖ}$$

Επειδή ΚΕ // ΑΖ και $\text{ΚΕ} = \text{ΑΖ}$, το ΑΖΚΕ είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς η ΑΚ διέρχεται από το μέσο Ν του ΖΕ (αφού οι διαγώνιες ΖΕ, ΑΚ διχοτομούνται). Στο τρίγωνο λοιπόν ΚΑΔ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΚΔ, ΚΑ. Άρα ΜΝ // ΑΔ.

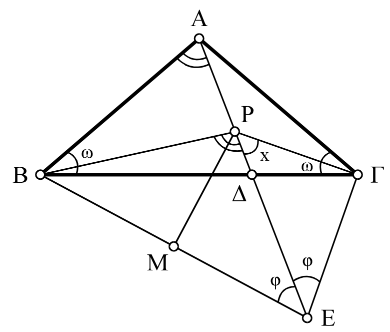
Τη λύση αυτή έκανε ο αρχιτέκτονας Κώστας Βήττας.

1.41 **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ** $(AB = A\Gamma)$ **και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε** $B\Delta = 2\Delta\Gamma$**. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε** $B\hat{P}\Delta = \hat{A}$**. Να αποδεχθεί ότι** $\hat{A} = 2\Delta\hat{P}\Gamma$**.**

Λύση

Πρόκειται για εξαιρετικό θέμα, με έμπνευση και φαντασία.

Στην προέκταση του ΑΔ, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $PE = PB$. Το τρίγωνο ΡΒΕ είναι ισοσκελές και επειδή $B\hat{P}E = \hat{A}$, το τρίγωνο αυτό είναι όμοιο με το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Επομένως $A\hat{E}B = \hat{\Gamma}$ $(\varphi = \omega)$, που εξασφαλίζει ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι εγγράψιμο. Έτσι:



$$A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = \omega$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι η ΕΔ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΕΒΓ. Το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΕΒΓ δίνει: $\dfrac{EB}{E\Gamma} = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = 2$

δηλαδή $EB = 2E\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΒΕ, τότε $ME = \dfrac{EB}{2} = E\Gamma$

και επειδή $P\hat{E}M = P\hat{E}\Gamma$, τα τρίγωνα ΡΕΜ και ΡΕΓ θα είναι ίσα. Επομένως:

$$B\hat{P}E = 2M\hat{P}E = 2E\hat{P}\Gamma \quad \text{, δηλαδή } \hat{A} = 2\Delta\hat{P}\Gamma.$$

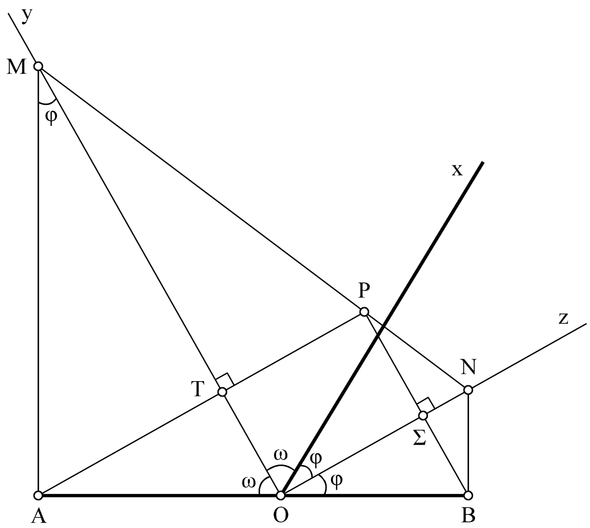
1.42 **Από σημείο Ο ενός τμήματος ΑΒ φέρουμε ημιευθεία Οx και τις διχοτόμους Oy, Oz των γωνιών** $A\hat{O}x$, $B\hat{O}x$**. Οι κάθετες προς την ΑΒ στα σημεία Α, Β τέμνουν τις Oy, Oz στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Οι κάθετες από τα Α, Β προς τις ΟΜ, ΟΝ αντίστοιχα τέμνονται στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Μ, Ρ, Ν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.**

(Ρουμανία – 2008)

Λύση

Προφανώς είναι $OM \perp ON$ και το ΟΤΡΣ είναι ορθογώνιο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΤΡ και ΜΟΝ είναι όμοια, δηλαδή ότι:

$$\frac{MT}{MO} = \frac{TP}{ON} \qquad (1)$$



- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΜ παίρνουμε:

$$AM^2 = MT \cdot MO \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM^2}{MT^2} = \frac{MT \cdot MO}{MT^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{MO}{MT} = \left(\frac{AM}{MT}\right)^2$$

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΝ έχουμε:

$$OB^2 = O\Sigma \cdot ON \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{OB^2}{ON^2} = \frac{O\Sigma \cdot ON}{ON^2} \Leftrightarrow \frac{O\Sigma}{ON} = \left(\frac{OB}{ON}\right)^2 \Leftrightarrow \qquad \frac{TP}{ON} = \left(\frac{OB}{ON}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{ON}{TP} = \left(\frac{ON}{OB}\right)^2$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{AM}{MT} = \frac{ON}{OB} \quad (2)$$

οπότε θα είναι και:

$$\frac{MO}{MT} = \frac{ON}{TP}$$

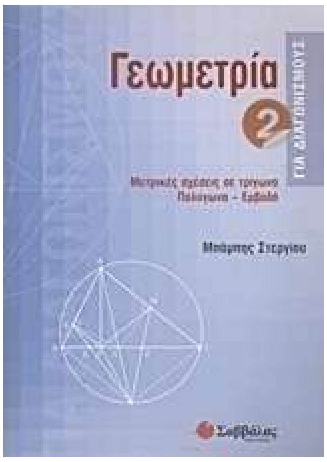
Είναι όμως $A\hat{M}T = N\hat{O}B = \varphi$, οπότε $\overset{\Delta}{ATM} \sim \overset{\Delta}{OBN}$ και έτσι η (2) ισχύει. Άρα ισχύει και η σχέση:

$$\frac{MO}{MT} = \frac{ON}{TP}$$

οπότε $\overset{\Delta}{MTP} \sim \overset{\Delta}{MON}$ και έτσι $O\hat{M}N = T\hat{M}P$. Έτσι τα σημεία M, P, N είναι συνευθειακά.

Βιβλιογραφία

Το παρόν αρχείο είναι ένα μέρος από το διπλανό βιβλίο :



Μπάμπης Στεργίου :

Γεωμετρία για Διαγωνισμούς,

Τόμος 2 , Εκδόσεις Σαββάλας

Άλλα βιβλία για διαγωνισμούς :