

Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος Ι

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Α.Π.
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου θεωρούνται από τους περισσότερους μαθητές το δυσκολότερο μάθημα που καλούνται να δώσουν ώστε να επιτύχουν την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το τρέχον σχολικό βιβλίο έχει γραφεί σχεδόν 20 χρόνια πριν και σε πολλές περιπτώσεις, με βάση τα θέματα των εξετάσεων, φαίνεται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων. Επιπλέον και σε επίπεδο θεωρίας, στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να γίνουν χρήσιμες βελτιώσεις και συμπληρώσεις, οι οποίες αφορούν: ορισμούς, παραδείγματα, προτάσεις και αποδείξεις προτάσεων. Ειδικά για τις προτάσεις που δεν υπάρχουν ούτε ως αναφορά στο σχολικό βιβλίο, είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν είτε χωρίς απόδειξη (με άμεσο αποτέλεσμα βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις) είτε να τις αποδεικνύουν χάνοντας πολύτιμο χρόνο. Με την εργασία αυτή προτείνουμε βελτιώσεις για τη θεωρία του σχολικού βιβλίου.

Abstract

Most students believe that mathematics in the last class of Lyceum is the most difficult subject for their entry to university. The current school book was written almost 20 years ago and in many cases, in relation to exam topics, needs to be revised. Furthermore the theory in this book needs improvement in definitions, examples, propositions and proofs. Especially with regard to propositions not mentioned in the book students are obliged to prove them and waste valuable time during the examination or obtain a lower score for not proving them. In this paper we propose improvements about the theory of the school book.

Εισαγωγή

Η ενασχόληση των συναδέλφων μαθηματικών με τα μαθηματικά της Γ' Λυκείου και η χρήση του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά. 2016) ως κύριου οδηγού της διδασκαλίας αναδεικνύει τις ελλείψεις που έχει σε επίπεδο θεωρίας. Ασάφειες σε ορισμούς, απουσία παραδειγμάτων για την αποσαφήνιση λεπτών και κρίσιμων σημείων, έλλειψη χρήσιμων προτάσεων αλλά και αποδείξεων σε προτάσεις του βιβλίου είναι μερικά από τα στοιχεία που συνθέτουν τις εν λόγω ελλείψεις. Πολλά από αυτά διδάσκονται από τον καθηγητή, ο οποίος υποδεικνύει στους μαθητές να τα γνωρίζουν ως θεωρία, ενώ στην περίπτωση χρήσης προτάσεων που δεν υπάρχουν στο σχολικό οι μαθητές επιβάλλεται να τις αποδείξουν, αν θέλουν να είναι σίγουροι ότι δεν θα έχουν βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές. Αν συνυπολογίσουμε πως τα παιδιά βάζονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τα κάνει να λειτουργούν μηχανικά, τότε μπορούμε να πούμε πως αλλοιώνεται η ουσιαστική σημασία του μαθήματος των μαθηματικών, αφού οι μαθητές δεν μαθαίνουν να σκέπτονται σωστά, ενώ και οι γνώσεις που αποκτούν συχνά δεν είναι επαρκείς για να τους συνοδεύσουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρούμε πως ένα σωστό θεωρητικό υπόβαθρο χωρίς κενά, που θα δομηθεί σταδιακά και ας μοιραστεί σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, θα είναι αρωγός στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Και αυτό πρέπει να έχει ως αρχή και βασικό θεμέλιο του το σχολικό εγχειρίδιο.

Χωρίς καμία διάθεση κριτικής αλλά με τη ματιά του παρατηρητή, θέλουμε μέσω αυτής της εργασίας να επισημάνουμε κάποιες ελλείψεις που θεωρούμε σημαντικές για την κατανόηση του μαθήματος. Ίσως κάποιες από αυτές που θα επισημάνουμε φανούν υπερβολικές αλλά θεωρούμε ότι η πληρότητα ενός σχολικού βιβλίου επιβάλλει τέτοιες παρατηρήσεις. Δυστυχώς, η έλλειψη χώρου μας αναγκάζει αυτό να γίνει σε συνέχειες.

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Σχόλιο 1: Στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά. 2016) εξηγείται ο συμβολισμός

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

αλλά όχι επαρκώς, κατά τη γνώμη μας. Πουθενά δεν διευκρινίζεται ο ακριβής ρόλος του $\mathbb{R}$. Κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι μας δείχνει ότι έχουμε πραγματική συνάρτηση και σε ποιο σύνολο παίρνει τιμές το $y = f(x)$. Επίσης, και ο ρόλος του συνόλου A δεν είναι απολύτως σαφής.

Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \sqrt{x} . \quad (2)$$

Αν δεν δοθεί κάτι επιπλέον θα γράφαμε

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} . \quad (3)$$

Όμως τι συμβαίνει αν μας δοθεί

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} ; \quad (4)$$

Είναι σαφές στον μαθητή ότι θέλουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι το $[0, 3]$;

Σχόλιο 2: Επιπλέον, δεν δίνεται καμία ερμηνεία για τον συμβολισμό

$$f : A \rightarrow B . \quad (5)$$

Θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει μια διευκρίνηση ότι το A είναι το πεδίο ορισμού, ανεξαρτήτως αν η συνάρτηση μπορεί να ορισθεί σε ευρύτερο σύνολο και ότι γενικά το B είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου τιμών. Εδώ να σημειώσουμε ότι το βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά. 2015) έχει καλύτερη αναφορά και στα δύο παραπάνω σχόλια, στο σημείο όμως που βρίσκεται νομίζουμε ότι «χάνεται» και επιβάλλεται να υπάρξει αντίστοιχη αναφορά στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου.

Σχόλιο 3: Το σχολικό βιβλίο πρέπει να έχει μια παρατήρηση ότι είναι απαραίτητο πρώτα να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και μετά να κάνουμε τυχόν απλοποίηση του τύπου συνάρτησης, διότι αυτό μπορεί να αλλοιώσει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Κατσαργύρης κ.ά. 1992).

Για παράδειγμα η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} \quad (6)$$

έχει πεδίο ορισμού

$$A_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} , \quad (7)$$

ενώ αν κάποιος έκανε πρώτα την απλοποίηση

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \quad (8)$$

υπήρχε περίπτωση να γράψει (λανθασμένα) ότι

$$A_f = \mathbb{R} - \{2\} !!! \quad (9)$$

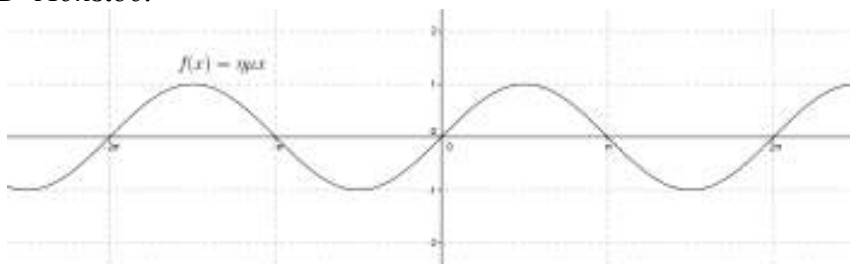
Σχόλιο 4: Επίσης, είναι αναγκαίο ο μαθητής να καταλάβει πλήρως ότι η έννοια της συνάρτησης δεν αφορά μόνο τον τύπο της, αφού μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται πλήρως από τον τύπο και το πεδίο ορισμού της (Βλάμος 1997). Η ύπαρξη ενός παραδείγματος στο βιβλίο θα βοηθούσε πολύ. Η συνάρτηση f με

$$f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

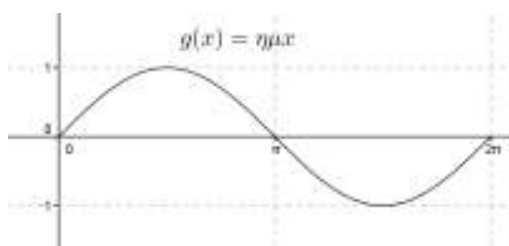
είναι διαφορετική από τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]. \quad (11)$$

Οι γραφικές παραστάσεις θα βοηθούσαν στην αποσαφήνιση της έννοιας, παρόλο που στο σχολικό εγχειρίδιο είναι στην επόμενη ενότητα, δεδομένου ότι οι συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις είναι γνωστές από την Β' Λυκείου.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της g με $g(x) = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Σχόλιο 5: Από τα γραφόμενα στο βιβλίο, ο μαθητής μάλλον θεωρεί δεδομένο ότι μπορεί να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης (Μάστακας και Γαραζιώτης 2008, Σπαθάρης 2016) Κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές, αφού για παράδειγμα η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases} \quad (12)$$

αποτελείται από σημεία της μορφής $(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{Q}, (\beta, 1), \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, αλλά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f !!!

Σχόλιο 6: Στο σχολικό βιβλίο, για τη γραφική παράσταση της $|f|$ αναφέρεται ότι αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Και τι γίνεται με τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$;

Ισότητα συναρτήσεων

Σχόλιο 7: Στις Πανελλήνιες εξετάσεις του 2016 ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τον ορισμό της ισότητας δύο συναρτήσεων. Πολλοί μαθητές έγραψαν ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο. Πού είναι το λάθος σε αυτό;

Ο ορισμός της ισότητας των δύο συναρτήσεων f, g είναι:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} A_f = A_g \\ f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in A_f = A_g \end{cases} \quad (13)$$

Κάποιος μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = x^2, g(x) = x^4, \quad (14)$$

όταν ορίζονται στο

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad (15)$$

είναι ίσες (Βλάμος 1997), αφού ικανοποιούν τον ορισμό της ισότητας των συναρτήσεων, αλλά δεν ικανοποιούν τον «ορισμό» της ισότητας που συχνά δίνουν οι μαθητές. Βέβαια, το βιβλίο αναφέρει ρητά πως θα μιλάμε για συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων. Όμως αυτή η απλούστευση κάνει καλό τελικά; Οι μαθητές πολύ συχνά συγχέουν την ισότητα των τιμών για κάθε x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού με την ισότητα των τύπων, κάτι το οποίο είναι απόρροια της υπόθεσης ότι μιλάμε για συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων.

Σχόλιο 8: Από τα πιο χαρακτηριστικά λάθη στην ισότητα των συναρτήσεων είναι η χρήση ισοτήτων χωρίς κάποιος να λαμβάνει υπόψη του τα πεδία ορισμού (τους περιορισμούς).

Για παράδειγμα είναι συχνό φαινόμενο ο μαθητής να χαρακτηρίζει ως ίσες (Σπαθάρas 2016) τις συναρτήσεις f, g και h, φ με

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, g(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad (16)$$

και

$$h(x) = \ln x^2, \varphi(x) = 2 \ln x, \quad (17)$$

σκεπτόμενος τις αντίστοιχες ιδιότητες από προηγούμενες τάξεις χωρίς να θυμάται και τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν. Ένα σχόλιο ότι η εύρεση του πεδίου ορισμού είναι το πρώτο βήμα σε κάθε περίπτωση που εμπλέκεται συνάρτηση, είναι απαραίτητο.

Σχόλιο 9: Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο A . Δεν ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x)g(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in A \text{ ή } g(x) = 0, \forall x \in A. \quad (18)$$

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}, \quad (19)$$

τότε το γινόμενο τους ισούται με μηδέν, χωρίς να είναι οι μηδενικές συναρτήσεις.

Η σωστή ισοδυναμία είναι:

$$f(x)g(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, x \in B \\ \text{και} & \text{με } B \cup \Gamma = A, \\ g(x) = 0, x \in \Gamma \end{cases} \quad (20)$$

αφού σε κάποια στοιχεία του A (στα στοιχεία του $B \subseteq A$) μηδενίζεται η f και σε κάποια στοιχεία του A (στα στοιχεία του $\Gamma \subseteq A$) μηδενίζεται η g .

Σχόλιο 10: Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο A . Λανθασμένη είναι η χρήση των ακόλουθων δύο ισοδυναμιών:

$$f^2(x) = g^2(x), \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x), \forall x \in A \quad (21)$$

και

$$|f(x)| = |g(x)|, \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x), \forall x \in A. \quad (22)$$

Πράγματι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}, \quad (23)$$

έχουμε ότι οι απόλυτες τιμές τους είναι ίσες ενώ οι συναρτήσεις δεν είναι ούτε ίσες ούτε αντίθετες.

Η σωστή ισοδυναμία είναι:

$$f^2(x) = g^2(x), \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), x \in B \\ \text{και} & \text{με } B \cup \Gamma = A, \\ f(x) = -g(x), x \in \Gamma \end{cases} \quad (24)$$

αφού σε κάποια στοιχεία του A (στα στοιχεία του $B \subseteq A$) οι τιμές των f, g είναι ίσες και σε κάποια στοιχεία του A (στα στοιχεία του $\Gamma \subseteq A$) είναι αντίθετες.

Κάτι αντίστοιχο ζητήθηκε στις φετινές Πανελλήνιες εξετάσεις και οδήγησε πολλούς μαθητές σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Σχόλιο 11: Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο A . Ισχύει η ισοδυναμία

$$f^2(x) + g^2(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \forall x \in A \\ \text{και} \\ g(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}, \quad (25)$$

αφού το άθροισμα δύο μη αρνητικών πραγματικών ποσοτήτων κάνει μηδέν μόνο όταν οι ποσότητες μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Είναι φανερό ότι τα λάθη στα σχόλια 9, 10, 11 προκύπτουν διότι αφενός μεν οι μαθητές επεκτείνουν τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών στις πραγματικές συναρτήσεις, αφετέρου δε η χρήση των συνδέσμων «ή», «και» είναι ουσιώδης. Παρατηρείστε ότι παρανοήσεις προκύπτουν εκεί που στους πραγματικούς αριθμούς οι ιδιότητες έχουν «ή» ...

Πράξεις συναρτήσεων

Σχόλιο 12: Όταν θέλουμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση ως πράξη δύο γνωστών συναρτήσεων f, g , είναι απαραίτητη η εύρεση των πεδίων ορισμού των f, g , για να έχουμε τη δυνατότητα να διερευνήσουμε αν μπορεί να ορισθεί η πράξη ανάμεσα στις f, g , βρίσκοντας την τομή των πεδίων ορισμού. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \ln x, g(x) = \sqrt{-x}, \quad (26)$$

έχουμε

$$A_f = (0, +\infty), A_g = (-\infty, 0], \quad (27)$$

άρα

$$A_f \cap A_g = \emptyset, \quad (28)$$

δηλαδή δεν ορίζονται πράξεις ανάμεσα στις f, g .

Είναι χρήσιμο να καταλάβουν οι μαθητές ότι υπάρχει λάθος αν γράψουν:

$$A_{f+g} = A_f \cap A_g = \emptyset, \quad (29)$$

άρα δεν ορίζονται πράξεις ανάμεσα στις f, g , διότι έχουν γράψει ότι το πεδίο ορισμού της πρόσθεσης είναι το κενό σύνολο!!!

Σύνθεση συναρτήσεων

Σχόλιο 13: Ένα ανύποπτο πρόβλημα αφορά τον ορισμό της σύνθεσης δύο συναρτήσεων. Στο σχολικό βιβλίο, χρησιμοποιείται μπλε πλαίσιο και τίτλος για τον ορισμό, μέσα στο οποίο δεν υπάρχει αναφορά στο πεδίο ορισμού της σύνθεσης. Παρόμοιο πρόβλημα υπάρχει και στον ορισμό των πράξεων δύο συναρτήσεων, κάτι το οποίο δεν είναι τόσο έντονο, αφού οι εν λόγω ορισμοί δεν έχουν τοποθετηθεί σε γκρι πλαίσιο.

Σχόλιο 14: Επιπλέον, όπως και στις πράξεις των συναρτήσεων, πρέπει να προσέξουμε πώς θα γράψουμε το πεδίο ορισμού. Πρώτα πρέπει να διερευνήσουμε αν μπορεί να ορισθεί η σύνθεση ανάμεσα στις f, g , βρίσκοντας το κατάλληλο σύνολο

$$\{x \in A_g : g(x) \in A_f\} \quad (30)$$

ή

$$\{x \in A_f : f(x) \in A_g\}. \quad (31)$$

Για παράδειγμα για τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \ln(-x), g(x) = \sqrt{x}, \quad (32)$$

έχουμε

$$A_f = (-\infty, 0), A_g = [0, +\infty), \quad (33)$$

άρα

$$\{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 : \sqrt{x} < 0\} = \emptyset, \quad (34)$$

δηλαδή δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g .

Προσέξτε ότι είναι λάθος να γράψουμε:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 : \sqrt{x} < 0\} = \emptyset, \quad (35)$$

οπότε δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g , διότι έχουμε γράψει ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το κενό σύνολο.

Μονοτονία

Σχόλιο 15: Μιλώντας για τη μονοτονία θα διατυπώσουμε καταρχήν το ερώτημα: γιατί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης (ή της γνησίως φθίνουσας) να δίνεται σε διάστημα (Κατσαργύρης κ.ά. 1992, Παντελίδης 1998); Αφού ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο ...

Γνωρίζουμε (από τον ορισμό του σχολικού βιβλίου) ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (36)$$

Προτείνουμε την προσθήκη των προτάσεων 1 ως 5 μαζί με τις αντίστοιχες αποδείξεις, για την καλύτερη κατανόηση της μονοτονίας.

Πρόταση 1: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ με $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2. \quad (37)$$

Απόδειξη

Έστω ότι $x_1 \geq x_2$.

Τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ προκύπτει ότι:
 $f(x_1) \geq f(x_2)$, που είναι άτοπο, άρα $x_1 < x_2$.

Από την πρόταση 1 και τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης ισχύει η πρόταση 2.

Πρόταση 2: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ με $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (38)$$

Με παρόμοια διαδικασία αποδεικνύονται οι προτάσεις 3, 4, 5.

Πρόταση 3: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ με $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad (39)$$

Πρόταση 4: Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (40)$$

Πρόταση 5: Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (41)$$

Οι προτάσεις (2), (3), (4), (5) μας επιτρέπουν να λύνουμε ανισώσεις της μορφής

$$f(g(x)) > f(h(x)) \text{ ή } f(g(x)) \geq f(h(x)), \quad (42)$$

όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το σχολικό έτος 2016-2017 που διανύουμε, μετά από πολλά χρόνια, οι εξεταζόμενοι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις προτάσεις αυτές χωρίς απόδειξη, κατόπιν οδηγίας από το Υπουργείο Παιδείας (ΥΠΕΠΘ 2016).

Σχόλιο 16: Με αφορμή το σχόλιο 15, έχουμε ακούσει αλλά είναι και γραμμένο σε επίσημα έντυπα ότι όταν σε ορισμό υπάρχει η λέξη «όταν» (συνεπαγωγή) αυτό έχει την έννοια του «αν και μόνο αν» (ισοδυναμία). Αυτό προφανώς και δεν ισχύει. Όταν κάπου γράφεται «όταν» σημαίνει όταν. Αν ισχύει το «αν και μόνο αν», αυτό προκύπτει μόνο με απόδειξη. Θεωρούμε χρήσιμο αφενός μεν να υπάρξει η προσθήκη των προτάσεων 1 ως 5, αφετέρου δε να γίνει καταγραφή μερικών παραδειγμάτων τα οποία να αναδεικνύουν τη διαφορά των ορισμών των γνησίως μονότονων συναρτήσεων με τις προτάσεις 1 ως 5.

Σχόλιο 17: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο Δ . Δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει διάστημα της μορφής (α, β) στο οποίο η συνάρτηση f να είναι γνησίως μονότονη (Brand 1984, Ντζιώρας 1993). Κάτι τέτοιο δεν «φαίνεται φυσιολογικό». Όμως για τη συνάρτηση f με τύπο

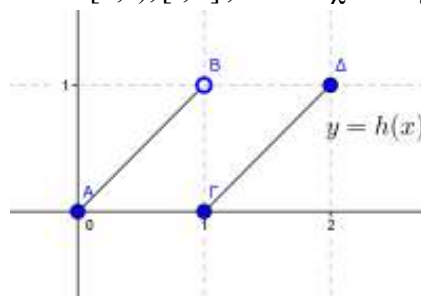
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases} \quad (43)$$

δεν υπάρχει αυτή η «ιδιότητα».

Σχόλιο 18: Επίσης, αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα A και B δεν είναι γνησίως αύξουσα και στο $A \cup B$ (Μπουνάκης 2009, Παντελίδης 1998). Η συνάρτηση h με

$$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (44)$$

είναι γνησίως αύξουσα στα $[0, 1)$, $[1, 2]$, αλλά όχι στο $[0, 2]$.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της h

Πρόταση 6: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μία το πολύ ρίζα για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = k$ έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, δηλαδή

$$f(x_1) = f(x_2) = k, \quad (45)$$

που είναι άτοπο, αφού λόγω του ορισμού της γνησίως αύξουσας συνάρτησης θα έπρεπε να ισχύει η (36), οπότε εξίσωση $f(x) = k$ έχει μία το πολύ ρίζα για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{R}$.

Ομοίως αποδεικνύεται αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση 7: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο A και η εξίσωση $f(x) = k$, με $k \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το $x_0 \in A$, αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Πρόταση 8: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Απόδειξη

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2), \quad (46)$$

δηλαδή η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η πρόταση 9.

Πρόταση 9: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Πρόταση 10: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Απόδειξη

Αφού οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2), \quad (47)$$

δηλαδή η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Πρόταση 11: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Απόδειξη

Αφού οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2), \quad (48)$$

αφού $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Συνεπώς η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Παρόμοιες προτάσεις με τις 10, 11 ισχύουν αν έχουμε γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις ή οποιονδήποτε επιτρεπτό συνδυασμό πράξεων.

Οι προτάσεις 8, 9, 10, 11 είναι πολύ χρήσιμες, διότι σε πολλές περιπτώσεις μπορεί εύκολα να αποφανθεί ο μαθητής για τη μονοτονία μιας συνάρτησης, χωρίς τη συνεχή χρήση ορισμού.

Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που θεμελιώνεται σταδιακά. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να αποκομίζουν αυτή τη γνώση από το σχολείο. Είναι αναγκαία η δόμηση της προσφερόμενης μαθηματικής ύλης, ίσως και από μικρότερες τάξεις, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρουσιάζει συνοχή. Η μη αναφορά βασικών γνώσεων και προτάσεων μόνο κακό κάνει στα μαθηματικά. Ο «χαρακτηρισμός» βασικών προτάσεων ως «απαγορευμένες» (οπότε η χρήση τους είναι στη «μαύρη αγορά») δημιουργεί πολλούς κινδύνους στη βαθμολόγηση γραπτών και βλάπτει τον επιθυμητό από τους περισσότερους, ενιαίο και αμερόληπτο χαρακτήρα της. Γι' αυτό πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία πρέπει να δίνουν τα απαραίτητα εφόδια στον οποιοδήποτε να πετύχει το σκοπό του. Σε αυτά στηρίζεται το πρώτο μέρος της πρότασής μας για το σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ. (2015). *Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Λυκείου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βλάμος Π. (1997). *Όριο και συνέχεια συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".
- Brand L. (1984). *Μαθηματική ανάλυση*. Εκδόσεις ΕΜΕ. Αθήνα.
- Κατσαργύρης Β., Μεντής Κ., Παντελίδης Γ., Σουρλάς Κ. (1992). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Ανάλυση*, ΟΕΔΒ.
- Μάστακας Π., Γαρατζιώτης Ι. (2008). *Μαθηματικά για τη θετική-τεχνολογική κατεύθυνση Γ' Λυκείου, Α' τόμος*, εκδόσεις Κέρδος.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, συναρτήσεις-όρια-συνέχεια*, Ηράκλειο, Οκτώβριος 2009.
- Ντζιώρας Β. Ηλ. (1993). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ' Λυκείου, Α' τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.
- Παντελίδης Ν. Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ' Λυκείου*, εκδόσεις Ζήτη.
- Σπαθάρης Δ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης ΓΕΛ, Κατανοώντας βαθύτερα το σχολικό βιβλίο και γνωρίζοντας λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξουμε*, τεύχος 1ο.
- ΥΠΕΠΘ. (2016). *Διαχείριση της Διδακτέας-Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ' τάξης*, Αρ. πρωτ. 150662/Δ2/15-9-2016.