Επιμέλεια: *Χατζόπουλος Μάκης* mac190604@gmail.com

«Τετράδιο Επανάληψης»

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ά ΛΥΚΕΙΟΥ

- *Συνοπτική θεωρία*
- *Ερωτήσεις θεωρίας*
- *Θέματα Εξετάσεων*
- *Συνδυαστικά θέματα*
- *Θέματα του ΟΕΦΕ 2006 – 2010*

…αφιερωμένο στα μέλη του www.mathematica.gr

Ζάκυνθος 2010 – 11

Άλγεβρα Ά Λυκείου – Θεωρία – Ασκήσεις

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

⇨ $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$

⇨ $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

⇨ $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

⇨ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ $\quad \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ $\quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ αx+β=0

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha = 0$ τότε έχει ➔αν $\beta \neq 0$ είναι αδύνατη.➔αν $\beta = 0$ είναι αόριστη (ταυτότητα).

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός: $|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Ιδιότητες:

- Αν θ>0 τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- Αν θ<0 τότε η εξίσωση $|x| = \theta$ είναι αδύνατη.
- $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ όπου θ>0
- $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή x>θ, όπου θ>0

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

$A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$
στο επίπεδο

⇨ $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση με πεδίου ορισμού το Α λέγεται άρτια αν:
i) για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$ και
ii) για κάθε $x \in A$ είναι $f(-x) = f(x)$.

Προσοχή: Οι γραφικές παραστάσεις άρτιων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον κατακόρυφο άξονα y΄y.

ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το Α λέγεται περιττή αν:
i) για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$ και
ii) για κάθε $x \in A$ είναι $f(-x) = -f(x)$.

Προσοχή: Οι γραφικές παραστάσεις περιττών συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την αρχή Ο(ο,ο) του συστήματος συντεταγμένων.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

- Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτηση f(x) με τον άξονα x΄x είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0.

  Οι τεταγμένες των σημείων αυτών είναι προφανώς μηδέν.

- Η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτηση f(x) με τον άξονα y΄y είναι η τιμή f(0).

  Η τετμημένη του σημείου αυτού είναι προφανώς μηδέν

ΛΥΣΗ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \qquad D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, \qquad D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$$

- Αν $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$
- Αν $D=0$ και $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $D=0$ και $D_x=0=D_y$ το σύστημα είναι αόριστο εκτός αν α=β=α΄=β΄=0 και $\gamma\neq 0$ ή $\gamma'\neq 0$ οπότε είναι αδύνατο.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta>0$ έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, τότε η παραγοντοποιημένη της μορφή είναι $\alpha(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$
- Αν $\Delta=0$ έχει μια διπλή ρίζα την $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε η παραγοντοποιημένη της μορφή είναι $\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0$
- Αν $\Delta<0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται στο R.

Άθροισμα ριζών της αx²+βx+γ=0 $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$

Γινόμενο ριζών της αx²+βx+γ=0 $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

Τύποι του Vieta

Ισχύει ότι: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=αx²+βx+γ, $\alpha\neq 0$

ΜΕΛΕΤΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f(x)	↘	$-\frac{\Delta}{4\alpha}$ ελάχιστο	↗

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f(x)	↗	$-\frac{\Delta}{4\alpha}$ μέγιστο	↘

ΜΕΛΕΤΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ:

Το τριώνυμο αx²+βx+γ, $\alpha\neq 0$ γίνεται:

- Ετερόσημο του α, αν είναι Δ>0 και για τις τιμές του x, που βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες.
- Μηδέν αν x είναι κάποια από τις ρίζες.
- Ομόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

(Α) ΜΕΡΟΣ:
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ – ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

i. Αν $\theta > 0$, να δείξετε ότι $x < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

ii. **α.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται άρτια;

β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

iii. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (\lambda-3)x + 5$, $\varepsilon_2 : y = 4\lambda x-1$ είναι παράλληλες, όταν το λ είναι:

α) 3 β) 2 γ) -1 δ) 0

ΘΕΜΑ 2ο

i. Να συμπληρώσετε τους τύπους : Δ =…….. χ_1, χ_2 =…….. όπου χ_1, χ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης : $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$,$\alpha \neq 0$ και κατόπιν να συμπληρώσετε τις προτάσεις :

α) Αν $\Delta \geq 0$, τότε οι ρίζες ………………

β) Αν $\Delta = 0$, τότε οι ρίζες ……………

ii. Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Η εξίσωση $\alpha x = \beta$ είναι αόριστη (ταυτότητα) , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.

β) Αν $\lambda_1 = \lambda_2$,τότε οι ευθείες $y = \lambda_1\chi + \beta_1$ και $y = \lambda_2\chi + \beta_2$ είναι παράλληλες.

γ) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο δυο αριθμών , τότε η εξίσωση που έχει ρίζες αυτούς τους δυο αριθμούς είναι η :

$$\chi^2 + Sx + P = 0.$$

δ) Εάν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

ΘΕΜΑ 3ο

i. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης τιμής ενός θετικού αριθμού α

ii. Αν $\theta > 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|\chi| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

iii. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $|\chi| = \alpha \Leftrightarrow$ …………….

β) Έστω τα σημεία Α(x, y) και Β(x, y). Η απόσταση του Α από το Β δίνεται από τον τύπο : d (AB) = ………………….

γ) Έστω $f(x) = αx^2 + βx + γ$, με $α \neq 0$. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου τότε η f(x) γίνεται γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με τον τύπο :
f(χ) = …………

ΘΕΜΑ 4ο

i. Να αποδείξετε ότι : $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

ii. Τι λέγεται απόσταση δύο αριθμών α και β;

iii. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Ισχύει : $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha.\beta}$

β) Ισχύει : $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$

γ) Οι ευθείες $ε_1$: ψ = 3λχ +2 και $ε_2$: $ψ = \dfrac{1}{3}λχ + 2$ είναι παράλληλες

δ) Αν x ∈ R , τότε $\sqrt{\chi^2} = \chi$ για κάθε χ πραγματικό αριθμό.

ΘΕΜΑ 5ο

i. Αν οι ρίζες της εξίσωσης , $χ^2 + βx + γ =0$ με $α \neq 0$ είναι οι $ρ_1$ και $ρ_2$ δείξετε ότι : S = $\rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ και P = $\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ (τύποι Vieta)

ii. Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

1) Η εξίσωση α x = β έχει μοναδική λύση όταν $α \neq 0$

2) Όταν $α \geq 0$, τότε η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη λύση της εξίσωσης $x^2 = α$

3) Γι α κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $-|α| \leq α \leq |α|$

4) Δίνεται το σύστημα : αx +βy = γ και α΄x + β΄y = γ΄

Αν ισχύουν D = Dy =0 και $Dx \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο .

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται η εξίσωση ε : $αx^2 + βx + γ = 0$, όπου $α \neq 0$.

α. Να γράψετε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (ε) και ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η Δ , ώστε η (ε) να έχει πραγματικές ρίζες (χωρίς απόδειξη)

β. Αν η εξίσωση ε έχει πραγματικές ρίζες, τότε να γράψετε τους τύπους των ριζών της σε σχέση με τα α, β, γ (χωρίς απόδειξη)

γ. Αν η εξίσωση ε έχει πραγματικές ρίζες ίσες τότε να γράψετε τους τύπους των ριζών της σε σχέση με τα α, β (χωρίς απόδειξη)

ΘΕΜΑ 7^o

i. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς :

α) Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης

β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια και πότε περιττή ;

γ) Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα **;**

δ) Πότε η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της συνάρτησης f ;

ii. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός αριθμού α;

iii. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα του θετικού αριθμού α;

iv. Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα του θετικού αριθμού α;

ΘΕΜΑ 8^o

i. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ιδιότητες των απολύτων τιμών:

α) $\left|\alpha^2\right| = \ldots\ldots$

β) $|\chi| = \theta \iff \ldots\ldots..$

γ) $|\chi| \le \theta \iff \ldots\ldots\ldots$

ii. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) τις επόμενες προτάσεις :

α) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

β) Αν $\alpha \ge 0$, τότε : $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$

γ) Αν $\alpha, \beta \ge 0$, τότε : $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

δ) $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

ΘΕΜΑ 9^o

Α. Να δείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για κάθε α, β ∈R.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**)

α) Αν x, ψ ≥ 0 , τότε $\sqrt{\chi + \psi} \ge \sqrt{\chi} + \sqrt{\psi}$

β) Για κάθε x ∈R ισχύει : $\sqrt{(-\chi)^2} = |\chi|$

γ) Γι α κάθε x, y∈R ισχύει **:** $\chi^2 + y^2 \ge 2 \cdot x \cdot y$

δ) Αν $x + y < y$, τότε : $x < 0$
ε) Η εξίσωση $α\cdot x = 0$ είναι αδύνατη

ΘΕΜΑ 10ο

i. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής του πραγματικού αριθμού α.

ii. Να αποδείξετε ότι: αν $θ > 0$, $|x| < θ \Leftrightarrow -θ < x < θ$.

iii. Να γράψετε αν είναι σωστοί (**Σ**) ή λάθος (**Λ**), οι παρακάτω ισχυρισμοί:

α. $|α + β| = |α| + |β|$, $\forall α, β \in R$.
β. $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in R$
γ. $|x + 1| + 3 = 0$ είναι αδύνατη , $\forall x \in R$
δ. Αν $|α| + |β| = 0$, τότε : $α = 0$ ή $β = 0$
ε. $|x| > -2$, $\forall x \in R$

ΘΕΜΑ 11ο

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $α , β \in R$ ισχύει : $|α\cdot β| = |α|\cdot|β|$.

ii. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού α

iii. Να γράψετε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις :

α) Αν $α \neq 0$, τότε η εξίσωση $αχ+β=0$, δεν έχει μία λύση
β) Για $χ \in R$ και $θ > 0$, ισχύει : $|x| = θ \Leftrightarrow x = \pm θ$.
γ) Η ευθεία $χ = α$ είναι παράλληλη στον άξονα χχ΄ .
δ) Αν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης : $αχ^2 + βχ + γ = 0$,α $a \neq 0$
είναι θετική , τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

ΘΕΜΑ 12ο

i. Να αποδείξετε ότι: δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις
$ε_1 : y = α_1 x + β_1$ και $ε_2 : y = α_2 x + β_2$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες μόνο όταν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών είναι ίσοι.

ii. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

α) Μία ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x σχηματίζει με τον άξονα των χχ΄ γωνία 90°

β) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $ε : y = αx + β$ με τον άξονα των χχ΄, τότε $εφω = β$

γ) Οι συντελεστές διεύθυνσης δύο κάθετων ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1

δ) ευθεία y = αx δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 13ο (ΟΕΦΕ 2006/ Θ.1)

α. Αν θ>0 να αποδείξετε ότι $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ **Μονάδες 13**

β. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0.$ Να αποδείξετε ότι:

i) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ **Μονάδες 12**

Θέμα 14ο (ΟΕΦΕ 2007/ Θ. 1)

Α. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης τιμής. **Μονάδες 5**

Β. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **Μονάδες 6**

Γ. Να συμπληρωθούν στο τετράδιο σας τα κενά στους τύπους:

1. αν θ>0 και $|\chi| \leq \theta \Leftrightarrow \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
2. αν $|\chi| = \alpha \Leftrightarrow \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ ή $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **Μονάδες 4**

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σημειώνοντας στο τετράδιό σας το αντίστοιχο γράμμα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

1. αν $\alpha \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \beta \geq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
2. ο αριθμός –x είναι αρνητικός για κάθε $x \in R$
3. αν $d(x,2) < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7$
4. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha \in R$
5. αν α<1<β τότε (1-α)(1-β)(α-β)β > 0 **Μονάδες 10**

Θέμα 15ο (ΟΕΦΕ 2008/ Θ.1)

Α. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0.$ Να αποδείξετε ότι:

i. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ ii. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Μονάδες 9

Β. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. Οι $\varepsilon_1: y = 2x + 5\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon_2: y = \lambda x + 2008$ είναι παράλληλες αν:

α. λ=5
β. λ=2008
γ. $\lambda = -\frac{1}{2}$
δ. λ=2

ii. Αν η εξίσωση $x^2 - 5x + \kappa = 0$ έχει ρίζα το 2 τότε:

α. κ=6
β. κ=0
γ. $\kappa = \sqrt{2}$
δ. κ=-6

iii. Αν D=0 και $D_x=D_y=5$ τότε το σύστημα:

α. έχει άπειρο πλήθος λύσεων
β. είναι αδύνατο
γ. έχει μοναδική λύση (x,y)=(0,0)
δ. έχει μοναδική λύση (x,y)=(5,5)

Μονάδες 6

Γ. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Αν $x \geq 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $|x| = x$

ii. Η εξίσωση $x^2 + \alpha x - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in IR$

iii. $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2,$ για κάθε $\alpha \in R$

iv. $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha - \beta}, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha > \beta > 0$

v. $xy = x^2 \Leftrightarrow x = y, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x, y \in R$ **Μονάδες 10**

<u>Θέμα 16^o (ΟΕΦΕ 2009/ Θ.1)</u>

Α. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.

Μονάδες 5

Β. Αν $\alpha, \beta \geq 0,$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ **Μονάδες 10**

Γ. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει : $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$

β) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει κάθε κατακόρυφη ευθεία σε ένα το πολύ σημείο.

γ) Αν D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, με $D=D_x=D_y=0$, τότε το σύστημα έχει πάντα άπειρο πλήθος λύσεων.

δ) Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0,$ ισχύει $\alpha \cdot \gamma < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ε) Αν $\gamma \neq 0,$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma.$ **Μονάδες 10**

<u>Θέμα 17^o (ΟΕΦΕ 2010/ Θ.1)</u>

Α. Αν θ>0 να αποδείξετε ότι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta.$ **Μονάδες 10**

Β. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να γράψετε τον τύπο, με τον οποίο υπολογίζεται η απόσταση ΑΒ.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha, \beta \in R$, τότε ισχύει: $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|.$

β) Αν $\alpha \cdot \gamma < 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει τη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

γ) Ισχύει πάντοτε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, όπου ν θετικός ακέραιος και $\alpha \in R$.

δ) Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε πάντοτε ισχύει: $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$.

ε) Αν x>0, τότε $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ **Μονάδες 10**

<u>Θέμα 18ο (3ο Γενικό Λύκειο Νέας Ιωνίας)</u>

Α. Αν $\theta > 0$ και x πραγματικός αριθμός να δείξετε ότι:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

Β. Να δώσετε τον ορισμό της απολύτου τιμής ενός πραγματικού αριθμού α.

Γ. Να γράψετε στην κόλλα σας ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος σημειώνοντας με Σ κάθε σωστή και με Λ κάθε λανθασμένη πρόταση.

α. Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $|x - |x|| = |x| - x$

β. Για κάθε $\alpha, \beta < 0$ ισχύει: $\sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

γ. Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

δ. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με $\alpha < 0$ και ν άρτιο έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$

ε. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση μετασχηματίζεται στην $x^2 - Sx + P = 0$ όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

(Β) ΜΕΡΟΣ:
ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ

1. Συμπληρώστε τα κενά:

i. $d(x,y)=.......$

ii. $d(-3,5)=.......$

iii. $|x|=.......\Leftrightarrow x=\pm\theta \quad \theta\geq 0$

iv. $|x|=0\Leftrightarrow x=.......$

v. $|x|<-5$ είναι ....

vi. $|x-1|\geq -1$ είναι ....

vii. $2|x|=-3|1-6x|$ είναι ....

viii. $|x+y|....|x|+|y|$

ix. $||x|-|y||\leq ....+.....$

x. $|x|+|y|=0\Leftrightarrow x=y=......$

xi. $|x|\cdot|y|=......$

xii. $|x|^2=.......$

xiii. $\frac{\alpha}{-2}>\frac{\beta}{-2}\Leftrightarrow ....>....$

xiv. $\sqrt{\alpha\cdot\beta^2}=.....\cdot.....$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, β > 0.

2. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

i. $d(x,y)=d(y,x)$

ii. $|x-y|=|y-x|$

iii. $|-x|=|x|$

iv. $|2x|=2|x|$

v. $0x>-1$ αδύνατη

vi. $0x<-2$ αόριστη

vii. $x^2+y^2\geq 0$ για κάθε χ, y∈$\mathcal{R}$

viii. $0x=0$ αδύνατη

ix. $|x|>0$

x. $|x|\geq x$

xi. αν α < β τότε -3α > -3β

xii. 0x > -5 είναι αδύνατη

xiii. $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α∈$\mathcal{R}$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $|2x-1|=5$

ii. $|2x-1|=-5$

iii. $|1-x|=|x|$

iv. $2\cdot|1-x|=|x|$

v. $2\cdot|1-x|=3|x|$

vi. $2|1-x|-3|x|=0$

vii. $\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$

viii. $\frac{|x-1|-4}{2}+\frac{5}{3}=\frac{|1-x|}{3}$

ix. $\frac{|x-2|}{2}-\frac{|2-x|-3}{4}=1$

x. $\frac{2-|3-x|}{2}-\frac{5-2|x-3|}{6}=\frac{1}{3}+\frac{|x-3|-2}{2}$

xi. $\frac{|x-2|+4}{3}-\frac{3|2-x|}{15}=\frac{|x-2|-4}{5}+2$

4. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

i. $|x-1|\le 4$

ii. $|x-1|>4$

iii. $|x-1|>-4$

iv. $|x-1|\le -4$

v. $1\le|2x-5|\le 3$

vi. $\frac{|x-1|-4}{2}-\frac{5-|1-x|}{3}<\frac{1}{6}$

vii. $\frac{|x-2|+1}{2}-\frac{|x-2|-1}{3}>\frac{|x-2|}{3}-1$

5. Αν $-1<\chi<y<1$ τότε να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $A=|1-x|-|y+1|+3|x-y|-2y+4x+5$

ii. $A=|2-x-y|$

iii. $A=3-3|2-x|$

iv. $A=\sqrt{x^2-2xy+y^2}-1$

v. $A=\sqrt{x^2-2x+1}-|x^2-1|$

6. Αν $\chi<3<y$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A=-2(3-\chi)(y-3)(3x-7)(5-2y)$$

7. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i. $A=\sqrt{32}-\frac{\sqrt{128}}{4}+4\sqrt{75}-\sqrt{192}$

ii. $A=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ με $0<x<1$

iii. $A=\sqrt[4]{1000\sqrt{50\cdot\sqrt[3]{8}}}$

8. Δίνονται τα σημεία Α(-1,2), Β(-1,-1) και Γ(2,-1)

i. Βρείτε τις αποστάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

iii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

iv. Αν (ε): $y=2x+3$, βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)

v. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι κάθετες στην ευθεία (ε).

α) $x+2y=1$ β) $y=-2x$ γ) $\frac{y}{2}-\frac{x}{3}=1$

9. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=\lambda x+5$ και $(\varepsilon_2): y=(5+4\lambda)x-2$

i. Βρείτε το λ αν οι ευθείες είναι παράλληλες
ii. Βρείτε το λ αν οι ευθείες είναι κάθετες
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε από το β σκέλος με |λ|<1, βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών

10. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος είναι το (5,2)
ii. Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το παραπάνω σημείο:

α) $2x-3y=1$ β) $x-\frac{3y}{2}=2$

iii. Βρείτε το $\lambda\in\mathcal{R}^*$, αν η ευθεία $(\lambda+2)x-5\lambda^2 y=10$ διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών του ερωτήματος (α)

11. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x-y=\lambda-1 \\ \lambda^2 x-2y=\lambda \end{cases}$

i. Υπολογίστε τις ορίζουσες D, D_x, D_y
ii. Να βρείτε το λ, αν το σύστημα έχει μοναδική λύση. Ποια είναι η λύση του συστήματος;
iii. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο;
iv. Βρείτε το λ=; ,αν για την μοναδική τιμή (x_0, y_0) του ισχύει ${y_0}^2=-8\cdot x_0$
v. Όμοια υπολογίστε το λ=; αν για την λύση του ερωτήματος β΄ ισχύει: $x+y=2$

12. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x-2y=1 \\ 4x-(k+1)y=1 \end{cases}$

i. Αν το σύστημα είναι αόριστο να αποδείξετε ότι: λ = 5 και κ = 1
ii. Για τις παραπάνω τιμές του κ, λ να σχεδιάσετε τις ευθείες
iii. Ποια είναι η σχετική τους θέση των δύο ευθειών;

13. Δίνεται το σημείο Α(3,1), να βρείτε το συμμετρικό του σημείο ως προς:

i. Τον άξονα χ΄χ
ii. Τον άξονα yy΄
iii. Την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας χΟy
iv. Αν το συμμετρικό του σημείο ως προς τον άξονα χ΄χ είναι το Α΄(1 – κ , 2λ – 3) βρείτε τα κ ,λ =;

14. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x+8y=4\lambda \\ \lambda x+(\lambda+3)y=3\lambda-1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathcal{R}$

Βρείτε το λ, αν το σύστημα έχει:

i. Μοναδική λύση
ii. Μοναδική λύση (χ_0,y_0) που ικανοποιεί την σχέση $\chi_0+y_0=1$
iii. Καμία λύση
iv. Άπειρο πλήθος λύσεων

15. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ, το σύστημα $\begin{cases} \mu x^2+\mu y=1 \\ x+\mu y=\mu \end{cases}$

i. Έχει μοναδική λύση
ii. Έχει μοναδική λύση (χ_0,y_0) για την οποία ισχύει $2\chi_0+3y_0=3$
iii. Είναι αδύνατο

16. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=11-\lambda \\ x+5y-\lambda=7 \end{cases}$ για $\lambda \in \mathcal{R}$

i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ
ii. Υπολογίστε την λύση (χ_0,y_0)
iii. Για ποια τιμή του λ η λύση (χ_0,y_0) του β΄ ερωτήματος επαληθεύει τη σχέση: $x_0+y_0=\frac{11}{13}$

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x-1=0$ με $\lambda \in \Re$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει 2 διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ
ii. Υπολογίστε τις παραστάσεις: $A=p_1^2+p_2^2$ και $B=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$

iii. Αν το σύστημα $\begin{cases} (p_1+p_2)x+2(p_1\cdot p_2)y=2 \\ \left(p_1^2+p_2^2\right)x+3\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}\right)y=6 \end{cases}$

είναι αόριστο, υπολογίστε το λ.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2-5x-7=0$ με λύσεις p_1, p_2.

A) Να βρείτε τις παραστάσεις

i. $A=p_1^2+p_2^2$

ii. $B=\dfrac{p_1}{p_2}+\dfrac{p_2}{p_1}$

B) Να βρείτε την εξίσωση με λύσεις τους αριθμούς

i. $2p_1-1, 2p_2-1$

ii. $\dfrac{1}{p_1}, \dfrac{1}{p_2}$

19. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $(x-1)^2+4|x-1|-5=0$

ii. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

iii. $x^4+6x^2-40=0$

iv. $x^4-3x^2+2=0$

v. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{2-x^2}{x^2-2x}=0$

vi. $x^2-\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}=1$

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\sqrt{2}\cdot x-7=0$

i. Να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες χ_1, χ_2 και να τις βρείτε

ii. Να αποδείξετε ότι για τις παραπάνω ρίζες ισχύει: $\left(\dfrac{x_1}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{2}-1\right)^2=\dfrac{3}{2}$

21. Να κάνετε τα εξής:

i. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\left(3+\sqrt{5}\right)^2$ και $\left(\sqrt{5}-3\right)^2$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-(\sqrt{5}-3)x-3\sqrt{5}=0$

iii. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

22. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

i. Το σύστημα είναι γραμμικό; Αν δεν είναι, να το κάνετε.

ii. Να λύσετε το σύστημα

iii. Να σχεδιάσετε τις ευθείες και να βρείτε το σημείο τομής τους

iv. Βρείτε την εξίσωση της ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής τους και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε΄): $y=-2x+2006$

23. Δίνονται τα σημεία Α(3, -8) , Β(-6, 4). Να βρείτε:

i. Την απόσταση των σημείων ΑΒ

ii. Την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α, Β.

iii. Τα σημεία τομής Γ, Δ της ευθείας (ε), με τους άξονες χ΄χ και $y'y$ αντίστοιχα.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρος του τριγώνου ΟΓΔ.

24. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\alpha x+2}{x+\beta}$

που διέρχεται από τα σημεία Α(1, -1) και Β(4, -3)

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{-5x+2}{x+2}$

ii. Για ποιες τιμές του χ ορίζεται η συνάρτηση f ;

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{f(0)}{2\lambda-6}-\dfrac{f(-1)-4}{9-\lambda^2}=\dfrac{-6}{\lambda^2-5\lambda+6}$

25. Δίνεται η ευθεία (ε): $y=\dfrac{4x}{3}+1976$

i. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε΄)που είναι κάθετη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο Α(4,9)

ii. Βρείτε τα σημεία τομής Γ, Δ της ευθείας (ε΄) με τους άξονες xx' και $y'y$ αντίστοιχα.

iii. Σχεδιάστε την ευθεία (ε΄)

iv. Βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρος του τριγώνου ΟΓΔ.

26. Έστω η εξίσωση $2χ^2$- 3μχ+2ν=0 και $ρ_1$, $ρ_2$ οι ρίζες της. Αν ισχύει:

$3ρ_1 –2ρ_1 ρ_2= -3ρ_2$ και $1-ρ_1 ρ_2 –6ρ_1 =6ρ_2 – 10$

Α. Να βρείτε τα $ρ_1 + ρ_2$ και $ρ_1\ ρ_2$ συναρτήσει των μ, ν από την δευτεροβάθμια εξίσωση.

Β. Βρείτε τα μ, ν από την επίλυση του συστήματος.

27. Αν η εξίσωση $χ^2 - 2|α+β-1|χ - (α-β)^2=0$ έχει μια διπλή ρίζα τότε:

Α. Να δείξετε ότι α = β = ½

Β. Αν ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα βρίσκονται πάνω στα πλοία $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα που κινούνται πάνω στις ευθείες

$(ε_1)$: αχ+2004ψ=1 και $(ε_2)$: βχ+2004ψ=2 , υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν και ολοκληρώσουν τον ερωτά τους...;

28. Σ' ένα αγώνα μπάσκετ η ΑΕΚΑΡΑ κέρδισε τον ΟΛΥΜΠΙΑΚΟ 78-66. Αν σκόραραν τον ίδιο αριθμό δίποντων αλλά η ΑΕΚ πέτυχε διπλάσια τρίποντα από τον ΘΡΥΛΟ, πόσα καλάθια πέτυχε κάθε ομάδα; (Υποθέτουμε ότι το σκορ διαμορφώθηκε μόνο από τρίποντα και δίποντα).

29. Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση: $χ^2 - 2χ + λ+2 = 0$, $λ\in R$.

a. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών, συναρτήσει του λ.

b. Αν ο λόγος των ριζών της είναι 3, να βρείτε το λ και τις ρίζες τις εξισώσεις.

30. Έστω η εξίσωση $αχ^2 + βχ + γ = 0$, $α\neq 0$.

a. Να δείξετε ότι: $|α| + |γ| \geq 2\sqrt{αγ}$

b. Αν ισχύει ότι: $|β| > |α| + |γ|$ τότε να δείξετε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

31. Για την τιμή του α που κάνει την εξίσωση $αχ + 1 = α^2 + χ$ ταυτότητα, να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του χ που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$(χ-α)^2+(α-χ)^2+2χ^2 > (2χ-α)^2 + 2χ$ και $(1-2α)\ χ - αχ < α+3$

32. Έστω η εξίσωση $χ^2-(λ+1)χ+λ=0$ και $χ_1,χ_2$ είναι οι ρίζες της.

α. Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήση του λ

β. Αν οι αριθμοί $2,χ_1,χ_2$ είναι πλευρές τριγώνου τότε το $λ\in(1,3)$.

γ. Για την παραπάνω τιμή του λ να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$|λ-1|λ -|λ-2004|=|3-λ|+8λ – 2017$$

33. Ο κος Πολυξερίδης που πρόκειται να αγοράσει ένα περιφραγμένο οικόπεδο στο Καταστάρι της Ζακύνθου σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν 4070 m^2 θέλησε να μάθει τις διαστάσεις των πλευρών του. Ο ιδιοκτήτης όμως δεν τις γνώριζε τις

διαστάσεις, θυμόταν όμως ότι χρησιμοποίησε 258 m συρματόπλεγμα για να το περιφράξει.
α. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου.
β. Μετά θέλησε να μάθει από την πολεοδομία του Κατασταρίου ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν του σπιτιού που δικαιούται να κτίσει βάση νόμου. Ο πολεοδόμος για να τον μπερδέψει (ως γνήσιος Ζακυνθινός) του έδωσε την απάντηση ότι η περίμετρος του σπιτιού (σχήματος ορθογώνιου) μπορεί να είναι μέχρι 40m. Ο κος Πολυξερίδης φυσικά βρήκε την απάντηση. Ποιά ήταν;

34. Δίνεται η συνάρτηση F με τύπο: $F(\chi) = 3\chi - 2$
a. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες και να τα ονομάσετε Α, Β.
b. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης F σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων
c. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων
d. Βρείτε το λ για την ευθεία, $\lambda\chi - 2\psi=2002$ αν γνωρίζετε ότι είναι παράλληλη της ευθείας της γραφικής παράστασης της F.
e. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} \alpha F(1) - \beta F(4/3) = 0 \\ \alpha F(5/3) + \beta F(2) = 10 \end{cases}$
f. Αν (α_o,β_o) είναι η λύση του προηγούμενου συστήματος τότε να λύσετε την ανίσωση: $\alpha_o\chi^2 - \chi + \beta_o < 2$

35. Να βρεθεί ο αριθμός $\alpha\in R$ ώστε η εξίσωση $|\alpha^2\chi^2 + 3\alpha\chi - 4| + |\chi + \alpha^2| = 0$ να έχει λύση την $\chi= -1$.
α. Για την τιμή του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες το α και το $-\frac{1}{2}$.
β. Τέλος για την τιμή του α να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2(\chi- 1) =\lambda^3- 2\lambda^2 +9\chi +6\lambda\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

36. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - |\mu - 4|\chi - |4 - \mu| = 0$, όπου $\mu > 4$.
α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή $\mu>4$.
β. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να δείξετε ότι: $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_1^3\rho_2^3 >0$

37. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες τις εξίσωσης $\chi^2 + 5(\mu - 1)\chi - (\mu^2 + 1) = 0$, $\mu\in R$, για ποιες τιμές του μ ισχύει: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} > 1$;

38. Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1)\ \psi= \lambda\chi + 1 - \lambda \ \text{ και } \ (\varepsilon_2)\ 2\psi = \lambda^2\chi - \lambda \ \text{ με } \ \lambda\in R.$$

Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε:

Α. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$
Β. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται
Γ. Οι ευθείες ε_1 , ε_2 να ταυτίζονται

39. Α. Η εξίσωση $\chi^2 - \kappa\chi + \lambda = 0$ κ, λ∈R έχει ρίζες χ_1 ,χ_2. Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία να έχει ρίζες $2\chi_1+3\chi_2$ και $3\chi_1+2\chi_2$.
Β. Να λύσετε την εξίσωση $\chi^2 - (\sqrt{2} +1)\chi + \sqrt{2} = 0$.

40. Α. Να αποδείξετε ότι : $3\chi^2 - \chi + 4 > 0$ για κάθε χ∈R.
Β. Να εξετάσετε πόσες λύσεις έχει το παρακάτω σύστημα:

$$(3\alpha^2+ 3\beta - 1)\chi - 2\psi = \alpha^4 + \beta \quad \text{και} \quad 2\chi + (\alpha^2 +\beta)\psi = \alpha^5 + 3$$

41. Α. Να λύσετε την εξίσωση $2\chi^2 + \chi - 3 = 0$.
Β. Να υπολογίσετε τα α, β αν ισχύει:

$$2(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta) = 3 \quad \text{και} \ \alpha - \beta = 1.$$

42. Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)= \chi^2 + \alpha\chi + 1$, α∈R.

α. Βρείτε το α έτσι ώστε η F να είναι άρτια
β. Χαράξτε την γραφική παράσταση της συνάρτησης F

43. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση

$$\lambda(\lambda x - 1) + 1 = \lambda(\lambda - 1) + \lambda x$$

α. Να την λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
β. Αν χ_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης, βρείτε τις τιμές λ, αν $|\chi_0| > 1$.

44. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 3$

45. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 10}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να απλοποιηθεί ο τύπος της
β) Να βρεθούν τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες

46. Για τις ορίζουσες D , D_x και D_y ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x , y ισχύει :

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 10D_y - 35$$

α) Να δείξετε ότι : $(D_x + 3)^2 + (D_y - 5)^2 + (D - 1)^2 = 0$

β) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα ; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

γ) Βρείτε την λύση του συστήματος

47. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = |x-1| + |x+1| + 2$.

Να χαρακτηρίσετε Σ αν είναι Σωστές ή Λ αν είναι λάθος, κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις .

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια

β) $f(x) < 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό

γ) Παρουσιάζει μέγιστο ίσο με 2 αν $x = 0$

δ) Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των ψ

ε) Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{|\mathbf{x+2}| + |\mathbf{x-2}|}{|\mathbf{x+2}| - |\mathbf{x-2}|}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να δείξετε ότι είναι περιττή

γ) Λύστε την εξίσωση: $f(x) = \dfrac{3}{2}$

δ) Λύστε την ανίσωση: $f(x) > \dfrac{3}{2}$

ε) Να απαλείψετε τα απόλυτα και να απλοποιήσετε τον τύπο της f

49. Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\dfrac{(x^2 - x + 9)(x-3)^2}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$ Β) $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 - 1} \leq 2$

Γ) $(2x-6)\cdot(x^2 + 2x - 3) < 0$ Δ) $(x^2 + x - 6)\cdot(x^2 + 6x + 5) > 0$

Ε) $\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - x - 6} > 0$ Στ) $\dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1)}{(2-4x)(x^2 + 6)} \leq 0$

50. Να βρείτε την ή τις τιμές του κ ώστε η εξίσωση:

α. $3x^2 - 7x + 6 = \kappa$, να έχει ρίζα ίση με το 0.

β. $4x^2 + 20x + \kappa = 0$, να έχει ίσες πραγματικές ρίζες.

γ. $x^2 + (\kappa - 2)x + 4 = 0$, να έχει άνισες πραγματικές ρίζες.

δ. $\kappa x^2 + 4\sqrt{3}x + \kappa - 1 = 0$, να μην έχει πραγματικές ρίζες.

51. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + 1 = 0$ και ρ_1, ρ_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\rho_1^{x_1}\cdot\rho_2^{x_2}\cdot\rho_1^{x_2}\cdot\rho_2^{x_1}}{x_1^{\rho_1}\cdot x_2^{\rho_2}\cdot x_1^{\rho_2}\cdot x_2^{\rho_1}} = 4$

52. (ΟΕΦΕ 2008/ Θ. 4) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} -x+y=\lambda \\ x-2y=\lambda^2+\lambda \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \Re$

β. Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος

γ. Να λυθεί η ανίσωση $x_0+y_0 \geq -3$

53. (ΟΕΦΕ 2007 /Θ. 4) Δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1): y=(2|\alpha|-1)x+3$ και $(\varepsilon_2): y=-\frac{1}{3}(x+1)$

Α. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \Re$ για τις οποίες οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι κάθετες.

Β. Για α=2,

I. Να βρεθεί το σημείο τομής Α των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

II. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την αρχή των αξόνων

Γ. Για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$ το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο: $f(x)=x^2+\lambda x-1, \quad x \in \Re$

Δ. Για λ=0 να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x’x.

54. (ΟΕΦΕ 2009/Θ. 3) Δίνεται η εξίσωση: $x^2+(1-\lambda)x+1=0$ με $\lambda \in \Re$ η οποία έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2

α) Να δείξετε ότι: $|1-\lambda|>2$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ

γ) Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του λ τις τιμές των παραστάσεων:

$$K=x_1+x_2,\ \Lambda=x_1\cdot x_2,\ M=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

δ) Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\lambda x_1\cdot x_2^2+\lambda x_1^2\cdot x_2+3x_1+3x_2=5$

55. (ΟΕΦΕ 2009/ Θ.4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\alpha x-5 & ,-5\leq x<2 \\ x+\beta & ,2\leq x<5 \end{cases}$ με

$\alpha,\beta \in \Re$. Για την οποία ισχύουν: $f(-2)=f(4)$ και $f(2)=f(-1)$

α. Να δείξετε ότι: $\alpha=-1$ και $\beta=-5$

$$(\varepsilon_1): y=(\lambda^4+2)x+f(1)$$

β. Να βρείτε το $\lambda \in \Re$ ώστε οι ευθείες $\begin{cases} \alpha F(1) - \beta F(4/3) = 0 \quad \text{και} \\ \alpha F(5/3) + \beta F(2) = 10 \end{cases}$

$(\varepsilon_2): y=f(-3)+(13\lambda^2-34)x$ να είναι παράλληλες γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$

56. (ΟΕΦΕ 2010/ Θ. 4) Δίνεται η εξίσωση

$$D\cdot\omega^2-\left(D_x-D_y\right)\omega+2D_x+D_y=0\ (1)\text{, όπου } D, D_x, D_y$$

πραγματικοί αριθμοί ίσοι με τις ορίζουσες ενός συστήματος (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y.

Α. Έστω ότι η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς ω

α) Να αποδείξετε ότι το γραμμικό σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση

β) Αν για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της (1) ισχύει

$$S=-1 \quad \text{και} \quad P=-2$$

i) Να δείξετε ότι: $D_x-D_y=-D$ και $2D_x+D_y=-2D$

ii) Να βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος (Σ).

Β. Αν D = 0 και η (1) είναι αδύνατη, τότε να δείξετε ότι και το γραμμικό σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

57. Δίνεται η συνάρτηση $y=|x-1|+|x-3|-2|x|$ με πεδίο ορισμού $A=[1,3)$

α. Να αποδείξετε ότι: $y=-2x+2$

β. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι B= (- 4, 0]

(**Υπόδειξη:** Να αποδείξετε ότι: $-4<y\le 0$)

γ. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτηση

δ. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι συμμετρικής της συνάρτησης του (α) ερωτήματος, ως προς τον άξονα x'x.

58. Δίνονται οι παραστάσεις $A=2\lambda^2-8$ και $B=3\lambda^2-2\lambda-16$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

Α) Να λύσετε τις εξισώσεις Α=0 και Β=0 και στη συνέχεια να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β

Β) Δίνεται η παραμετρική εξίσωση $AX=B$ (1), όπου Α, Β οι παραστάσεις του ερωτήματος (Α)

Βρείτε:

i. Για ποιες τιμές του λ, η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση; Βρείτε την λύση αυτή.
ii. Το λ, αν η εξίσωση (1) είναι αόριστη
iii. Το λ, αν η εξίσωση (1) είναι αδύνατη

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|-3}{x^2-9}$

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι άρτια.
β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης
γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)<\dfrac{2}{7}$

δ. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, αν $\begin{cases} f(0)\alpha-f(1)\beta=3 \\ f(-3)\alpha+f(-1)\beta=0 \end{cases}$

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|+3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
β. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y’y και ανήκει στον άξονα x’x και πάνω.
γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=\dfrac{3}{2}$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)<\dfrac{3}{2}$

61. ***(Βασική άσκηση - πρόταση)***
Α. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0$, τότε:

i. Αν α, γ είναι ετερόσημοι αριθμοί, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, δηλαδή ισχύει η πρόταση:

$$\textbf{αν } \alpha\gamma<0 \overset{\text{τότε}}{\Longrightarrow} \Delta>0$$

ii. Αν η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις, τότε τα α, γ είναι ομόσημοι αριθμοί , δηλαδή ισχύει η πρόταση:

$$\textbf{αν } \Delta<0 \overset{\text{τότε}}{\Longrightarrow} \alpha\gamma>0$$

Β. Αν το τριώνυμο $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς, δεν έχει πραγματικές ρίζες, τότε να αποδείξετε:

i. $\gamma>0$ ii. $\beta+\gamma>-1$

Γ. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$. Να δείξετε ότι αν υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha\cdot f(\xi)<0$,τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2010, \ \alpha\neq 0$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συμπληρώστε τα κενά με τα σύμβολα « $<$, $>$, $=$ » και δικαιολογήστε την απάντησή σας:

i. Δ …… 0 γιατί ……………………………………………………………………
ii. α …… 0 γιατί ……………………………………………………………………
iii. f(2011) …… 0 γιατί ……………………………………………………………

Ε) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ με δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$). Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ όπου $\kappa\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\lambda\in(\rho_2,+\infty)$ τέτοια ώστε: $f(\kappa)\cdot f(\lambda)<0$

Στ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με $\beta^2<3\gamma$.

i. Βρείτε το πρόσημο του γ
ii. Βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$
iii. Να αποδείξετε ότι: $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Ζ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ η οποία δεν έχει ρίζες πραγματικές, να αποδείξετε ότι: $f(\kappa)\cdot f(\lambda)>0$ για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

62. Α) Δίνεται η παράσταση $A=8(\mu-1)(-\mu-4)$. Βρείτε το πρόσημο της παράστασης Α για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\mu+1)x^2-2(\mu-1)x+3(\mu-1),\ \ \ \mu\neq-1$

i. Να δείξετε ότι: Δ = Α, όπου Α η παράσταση του ερωτήματος (Α)
ii. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, υπολογίστε τις τιμές του μ.

63. Έστω η εξίσωση $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+1=0,\ \ \ \lambda\neq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $x_1^2x_2+x_1x_2^2>-1$
ii. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε: $x_1+x_2>0$

64. (3ο Λύκειο Νέας Ιωνίας)

Δίνεται το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c}\alpha x+y=\alpha\\(\alpha-2)x+y=1\end{array}\right\}$ (Σ)

α. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha\in R$

β. Αν (x_o, y_o) είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ) να δείξετε ότι ισχύει:

$$2x_o^2+y_o=\frac{1+\alpha}{2}$$

γ. Αν α = d(λ, 1), να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει:

$$2x_o^2+y_o<1$$

65. (3ο Λύκειο Νέας Ιωνίας)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 - 2(\lambda - 5)x - (\lambda - 5)$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με:

$$\Delta = 4(\lambda - 5)(\lambda - 3).$$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες του τριωνύμου να δείξετε ότι ισχύει:

$$x_1^2+x_2^2=(\lambda-5)(\lambda-4)$$

δ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ ώστε το τριώνυμο $f(x)$ να είναι θετικό για κάθε τιμή του $x \in R$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΕΦΕ

2006 – 2010

Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης

<u>Σημείωση:</u> Ευχαριστώ πολύ τον Γιώργο Ροδόπουλο για την προσφορά των θεμάτων του ΟΕΦΕ σε μορφή word (doc) και το Φροντιστήριο Δυναμικό της Πεύκης.

Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2006

Θέμα 1ο

α. Αν θ>0 να αποδείξετε ότι $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ **Μονάδες 13**

β. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0.$ Να αποδείξετε ότι:

i) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ **Μονάδες 12**

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1): y = |\alpha + 2|x + 4 \ \ (\varepsilon_2): y = |2\alpha - 1|x + 15$

α. Αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες να βρείτε το α **Μονάδες 12**

β. Για α = 3 να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Α που η (ε_1) τέμνει τον άξονα y΄y καθώς και του σημείου Β που η (ε_2) τέμνει τον άξονα x΄x. **Μονάδες 8**

ii) την απόσταση ΑΒ **Μονάδες 5**

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **Μονάδες 7**

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της **Μονάδες 9**

γ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2005^2-1}{2005^2-3\cdot 2005+2} = \frac{2006}{2003}$ **Μονάδες 9**

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ με $\lambda \neq -2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lambda \in R$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \neq -2.$ **Μονάδες 8**

β. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της (1) Να βρείτε:

i) Τα x_1+x_2 και $x_1\, x_2$ **Μονάδες 4**

ii) Τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) έχει ρίζες ετερόσημες **Μονάδες 6**

iii) Τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 < x_1\, x_2$ **Μονάδες 7**

Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2007

Θέμα 1ο

Α. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης τιμής. **Μονάδες 5**

Β. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **Μονάδες 6**

Γ. Να συμπληρωθούν στο τετράδιο σας τα κενά στους τύπους:

1. αν θ>0 και $|\chi| \leq \theta \Leftrightarrow \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

2. αν $|\chi| = \alpha \Leftrightarrow \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ ή $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **Μονάδες 4**

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σημειώνοντας στο τετράδιό σας το αντίστοιχο γράμμα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

1. αν $\alpha \geq 0 \; \kappa\alpha\iota \; \beta \geq 0 \; \tau \acute{o} \tau \varepsilon \; \sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

2. ο αριθμός –x είναι αρνητικός για κάθε $x \in R$

3. αν $d(x,2) < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7$

4. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; \alpha \in R$

5. αν α<1<β τότε (1-α)(1-β)(α-β)β > 0 **Μονάδες 10**

Θέμα 2ο

Δίνεται το σύστημα $2\chi - \psi = 1$ και $-\chi + 3\psi = \lambda, \;\; \lambda \in R$

Α. Να υπολογίσετε τις ποσότητες D, D_x, D_ψ **Μονάδες 15**

Β. Να εξηγήσετε γιατί το σύστημα έχει μοναδική λύση και να υπολογίσετε τη λύση αυτή. **Μονάδες 3+7**

Θέμα 3ο

Α. Να λυθεί η ανίσωση $3|x-1| - 2 \leq 2|1-x|$ **Μονάδες 8**

Β. Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 - 4 = 0$ **Μονάδες 9**

Γ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 5$ **Μονάδες 8**

Θέμα 4ο

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \psi = (2|\alpha| - 1)x + 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; (\varepsilon_2): \psi = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Α. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. **Μονάδες 10**

Β. Για α=2

1. Να βρεθεί το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1), (ε_2). **Μονάδες 4**

2. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την αρχή των αξόνων. **Μονάδες 3**

Γ. Για ποια τιμή του $\lambda \in R$ το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = x^2 + \lambda x - 1, \; x \in R$. **Μονάδες 4**

Δ. Για λ=0 να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. **Μονάδες 4**

Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2008

Θέμα 1ο

Α. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0.$ Να αποδείξετε ότι:

i. $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$

ii. $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ **Μονάδες 9**

Β. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. Οι $\varepsilon_1: y=2x+5\ και\ \varepsilon_2: y=\lambda x+2008$ είναι παράλληλες αν:

α. λ=5

β. λ=2008

γ. $\lambda=-\frac{1}{2}$

δ. λ=2

ii. Αν η εξίσωση $x^2-5x+\kappa=0$ έχει ρίζα το 2 τότε:

α. κ=6

β. κ=0

γ. $\kappa=\sqrt{2}$

δ. κ=-6

iii. Αν D=0 και $D_x=D_y=5$ τότε το σύστημα:

α. έχει άπειρο πλήθος λύσεων

β. είναι αδύνατο

γ. έχει μοναδική λύση (x,y)=(0,0)

δ. έχει μοναδική λύση (x,y)=(5,5)

Μονάδες 6

Γ. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Αν $x\geq 0\ τότε\ |x|=x$

ii. Η εξίσωση $x^2+\alpha x-1=0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha\in IR$

iii. $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2,$ για κάθε $\alpha\in R$

iv. $\sqrt{a}-\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha-\beta}, για\ κάθε\ \alpha>\beta>0$

v. $xy=x^2\Leftrightarrow x=y, για\ κάθε\ x,y\in R$ **Μονάδες 10**

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

Μονάδες 10

Β. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A=\frac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}$ **Μονάδες 8**

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $|f(4)\cdot x-1|=|2-f(3)\cdot x|$ **Μονάδες 7**

<u>Θέμα 3ο</u>

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ. Μονάδες 8

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$ **Μονάδες 8**

iii. Για λ=3, να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $2x_1$ και $2x_2$. **Μονάδες 9**

<u>Θέμα 4ο</u>

Δίνεται το σύστημα: $\begin{Bmatrix} -x+y=\lambda \\ x-2y=\lambda^2+\lambda \end{Bmatrix}$

i. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in R$ **Μονάδες 5**

ii. Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0,y_0) του συστήματος. **Μονάδες 8**

iii. Να λυθεί η ανίσωση $x_0+y_0 \geq -3$ **Μονάδες 12**

Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2009

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.

Μονάδες 5

Β. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ **Μονάδες 10**

Γ. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει : $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

β) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει κάθε κατακόρυφη ευθεία σε ένα το πολύ σημείο.

γ) Αν D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, με $D=D_x=D_y=0$, τότε το σύστημα έχει πάντα άπειρο πλήθος λύσεων.

δ) Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0,$ ισχύει $\alpha \cdot \gamma < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ε) Αν $\gamma \neq 0,$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma.$ **Μονάδες 10**

Θέμα 2ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(\lambda+2)x + 5y = 5\\ x + (\lambda-2)y = -5\end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές των οριζουσών D, D_x, D_y **Μονάδες 6**

β) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ. **Μονάδες 12**

γ) Αν (x_0,y_0) η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε το λ ώστε $\left|\frac{5}{x_0} - \frac{5}{y_0}\right| = 1$ **Μονάδες 7**

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (1-\lambda)x + 1 = 0,\ \mu\varepsilon\ \lambda \in R$ η οποία έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2.

Α) Να δείξετε ότι $|1-\lambda| > 2$ **Μονάδες 7**

Β) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ. **Μονάδες 6**

Γ) Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του λ τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων

$K = x_1 + x_2,\ \Lambda = x_1 \cdot x_2,\ M = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ **Μονάδες 6**

Δ) Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\lambda x_1 x_2^2 + \lambda x_1^2 x_2 + 3x_1 + 3x_2 = 5$ **Μονάδες 6**

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases}2ax - 5, & -5 \leq x < 2\\ x + \beta, & 2 \leq x < 5\end{cases}$ $a, \beta \in R$

Για την οποία ισχύουν : $f(-2) = f(4)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(2) = f(-1)$

Α) Να δείξετε ότι α=-1 και β=-5. **Μονάδες 7**

Β) Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε οι ευθείες
$(\varepsilon_1): y = (\lambda^4 + 2)x + f(1)\ \kappa\alpha\iota$
$(\varepsilon_2): y = f(-3) + (13\lambda^2 + 34)x,$ να είναι παράλληλες **Μονάδες 8**

Γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχει να λύσετε την εξίσωση
$f(x) = 1.$ **Μονάδες 10**

Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2010

Θέμα 1ο

Α. Αν θ>0 να αποδείξετε ότι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$. **Μονάδες 10**

Β. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να γράψετε τον τύπο, με τον οποίο υπολογίζεται η απόσταση ΑΒ.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha, \beta \in R$, τότε ισχύει: $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.

β) Αν $\alpha \cdot \gamma < 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει τη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

γ) Ισχύει πάντοτε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, όπου ν θετικός ακέραιος και $\alpha \in R$.

δ) Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε πάντοτε ισχύει: $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$.

ε) Αν x>0, τότε $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ **Μονάδες 10**

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : y = (\lambda - 2)x + 1, \quad \varepsilon_2 : y = \frac{2-\lambda}{4}x - 1$$

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες. **Μονάδες 10**

β) Να βρείτε την τιμή τιμές των πραγματικών αριθμών λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες μεταξύ τους. **Μονάδες 15**

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 - \alpha x^2 + 2, \;\; x \in R$, όπου

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι α=6 **Μονάδες 8**

β) Να υπολογίσετε την τιμή f(1). **Μονάδες 2**

γ) Να λύσετε την εξίσωση : f(x) = f(1). **Μονάδες 8**

δ) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) - f(1) \leq 0.$ **Μονάδες 7**

<u>Θέμα 4^ο</u>

Δίνεται η εξίσωση $D \cdot \omega^2 - (Dx - Dy) \cdot \omega + 2Dx + Dy = 0 \quad (1),$ όπου D, Dx, Dy πραγματικοί αριθμοί ίσοι με τις ορίζουσες ενός συστήματος (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Α. Έστω ότι η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς ω

α) Να αποδείξετε ότι το γραμμικό σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση. **Μονάδες 6**

β) Αν για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της (1) ισχύει S=-1 και P=-2, τότε:

i) Να δείξετε ότι $\frac{D_x - D_y}{D} = -1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{2D_x + D_y}{D} = -2$ **Μονάδες 6**

ii) Να βρείτε τη μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος (Σ). **Μονάδες 5**

Β. Αν D=0 και η (1) είναι αδύνατη, τότε να δείξετε ότι και το γραμμικό σύστημα (Σ) είναι αδύνατο**.** **Μονάδες 8**