Language: Greek

Πέμπτη, 04 Μαΐου, 2017

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y), τέτοια ώστε:

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2$$

Πρόβλημα 2

Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο με $AB < AC$ και έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Έστω t_B και t_C οι εφαπτομένες του κύκλου Γ στα σημεία B και C, αντίστοιχα, και έστω L το σημείο τομής τους. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλη προς την AC τέμνει την t_C στο σημείο D. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο C και είναι παράλληλη προς την AB τέμνει την t_B στο σημείο E. Ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο BDC τέμνει την πλευρά AC σε σημείο T, με το T να βρίσκεται ανάμεσα στα A και C. Ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο BEC τέμνει την ευθεία AB σε σημείο S, με το B να βρίσκεται ανάμεσα στα A και S.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ST, BC και AL συντρέχουν.

Πρόβλημα 3

Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, για τις οποίες ο

$$n + f(m) \text{ διαιρεί τον } f(n) + nf(m),$$

για όλα τα $m,n \in \mathbb{N}$.

Πρόβλημα 4

Σε ένα κυκλικό τραπέζι κάθονται $n > 2$ μαθητές. Αρχικά, κάθε μαθητής έχει ακριβώς μία καραμέλα. Σε κάθε βήμα, κάθε μαθητής επιλέγει μία από τις ακόλουθες ενέργειες:

(α) Δίνει μία καραμέλα στον μαθητή που κάθεται στα αριστερά του ή στον μαθητή που κάθεται στα δεξιά του.

(β) Χωρίζει όλες τις καραμέλες του σε δύο, πιθανώς κενά, σύνολα και δίνει το ένα σύνολο στον μαθητή που κάθεται στα αριστερά του και το άλλο στον μαθητή που κάθεται στα δεξιά του.

Σε κάθε βήμα, οι μαθητές εκτελούν τις ενέργειες που έχουν επιλέξει ταυτόχρονα.

Μία κατανομή των καραμελών ονομάζεται *νόμιμη*, αν μπορεί να προκύψει μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Να βρείτε το πλήθος των νόμιμων κατανομών.

(Δύο κατανομές είναι διαφορετικές αν υπάρχει μαθητής ο οποίος να έχει διαφορετικό αριθμό καραμελών σε κάθε μία από τις κατανομές αυτές.)

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες