

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
24 МАЯ 2015

1. Пусть E — единичная матрица, а A — произвольная матрица того же размера. Найдите предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(E + tA) - 1}{t}.$$

Ответ: $\operatorname{tr} A$.

Решение. Заметим, что

$$\det(E + tA) = t^n \det\left(\frac{1}{t}E + A\right) = t^n \chi_A\left(\frac{-1}{t}\right),$$

где $\chi_A(s)$ — характеристический многочлен A , а n — размер матрицы. Тогда мы ищем коэффициент при t в многочлене $t^n \chi_A(\frac{-1}{t})$, то есть коэффициент при t^{n-1} в характеристическом многочлене с точностью до знака $(-1)^{n-1}$. Как известно, это след.

Иначе, можно просто привести матрицу к верхнетреугольному виду, тогда $\det(E + tA)$ будет равен

$$\prod_{i=1}^n (1 + ta_{ii})$$

и ответ очевиден.

2. Пусть сечение конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$) плоскостью является эллипсом. Докажите, что у проекции этого эллипса на плоскость Oxy начало координат является фокусом.

Решение. Это можно просто посчитать, но мы приведём геометрическое решение. Пусть данный конус C , его сечение — E с центром s . Пусть конус C' центрально симметричен C относительно s , и пусть O' — его вершина. Тогда

$$E = C \cap C'.$$

Для любой точки $p \in E$ длина отрезка $|Op|$ в $\sqrt{2}$ раз больше его проекции на ось Oz . Аналогично, длина отрезка $|pO'|$ в $\sqrt{2}$ раз больше его проекции на ось Oz (так как отрезки лежат на соответствующих конусах). Так как сумма проекций этих отрезков на ось Oz постоянна, то сумма их длин

$$|Op| + |pO'|$$

постоянна.

При проекции на плоскость Oxy пусть p переходит в p_{xy} , а O' — в O_{xy} . Так как эта проекция уменьшит все длины в $\sqrt{2}$ раз, то получается, что

$$|Op_{xy}| + |p_{xy}O_{xy}| = \operatorname{const},$$

что и требовалось доказать.

3. Дан многочлен степени d от n переменных. Докажите, что либо он принимает ненулевые значения как минимум в 2^{n-d} вершинах куба $\{-1, 1\}^n$, либо он принимает только нулевые значения в вершинах этого куба.

Решение. Заметим, что в точках множества $V = \{-1, 1\}^n$ выполняется соотношение $x_i^2 = 1$ для любой координаты x_i . Это означает, что рассматриваемый многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ можно заменить на другой многочлен $Q(x_1, \dots, x_n)$, у которого степени всех переменных не более чем 1 и значения на V те же самые.

Если Q оказался нулевым, то и P был равен нулю на множестве V . Иначе рассмотрим моном M_0 в Q максимальной степени $k \leq d$, без ограничения общности пусть это $M_0 = ax_1 \dots x_k$. Заметим, что если какой-то из мономов $M(x_1, \dots, x_n)$ не содержит переменной x_i при $1 \leq i \leq k$, то сумма

$$\overline{M}(x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{x_1, \dots, x_k \in \{-1, 1\}} x_1 \dots x_k M(x_1, \dots, x_n)$$

окажется равной нулю, ибо правая часть разбивается на сокращающиеся пары слагаемых, соответствующие замене $x_i \mapsto -x_i$. Однако для монома $M_0(x_1, \dots, x_n) = ax_1 \dots x_k$ такая сумма $\overline{M}_0(x_{k+1}, \dots, x_n)$ оказывается равной $2^k a \neq 0$.

Так как степень Q не более k , то все остальные его мономы M , кроме M_0 , имеют $\overline{M} = 0$. Значит, $\overline{Q}(x_{k+1}, \dots, x_n) \equiv 2^k a$. По определению величины $\overline{Q}$ отсюда следует, что при любом выборе набора $x_{k+1}, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ найдутся значения $x_1, \dots, x_k \in \{-1, 1\}$, при которых $Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. То есть Q не равен нулю как минимум в $2^{n-k} \geq 2^{n-d}$ точках множества V .

4. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая бесконечно дифференцируемая функция. Положим

$$m_n = \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Докажите, что последовательность $\left(m_n^{1/n}\right)$ имеет конечный или бесконечный предел.

Решение. Докажем, что последовательность m_n логарифмически выпукла, то есть:

$$m_{n+1}m_{n-1} \geq m_n^2.$$

Действительно, из неравенства Коши–Буняковского и интегрирования по частям выходит

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n+1)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n-1)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\geq \left| \int_0^{2\pi} f^{(n+1)}(x) f^{(n-1)}(x) dx \right| = \\ &= \left| f^{(n+1)}(x) f^{(n)}(x) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f^{(n)}(x) f^{(n)}(x) dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2 dx \right| = m_n^2. \end{aligned}$$

Мы доказали, что $\ln m_{n+1} + \ln m_{n-1} \geq 2 \ln m_n$ выпукла, иначе говоря последовательность $(\ln m_{n+1} - \ln m_n)$ монотонно возрастает и имеет предел. Пусть $\ln m_{n+1} - \ln m_n \rightarrow A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда по правилу Лопиталья для последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln m_{n+1} - \ln m_n) = A,$$

а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n)^{1/n} = e^A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Замечание. Можно также воспользоваться разложением в ряд Фурье и доказать, что предел конечный для конечного ряда Фурье и бесконечный для бесконечного ряда Фурье.

5. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ и натуральное число $d \geq 2$. Известно, что

$$a_0 = a_1 = \dots = a_d = 1,$$

и при $k \geq d$

$$a_{k+1} \geq a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}.$$

Докажите, что все числа a_k положительные.

Решение. Задачу можно свести к случаю, когда вместо неравенства выполняется равенство

$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}$$

при $k \geq d$. Действительно, если в некоторый момент при положительном a_{k+1} неравенство было строгим, то просто умножим все числа a_n с индексом $n \geq k+1$ на положительное число, меньшее единицы так, чтобы это неравенство обратилось в равенство для данного k . Можно проверить, что остальные неравенства не нарушатся. Так можно делать до тех пор, пока a_{k+1} не окажется неположительным, но и в модифицированной последовательности с равенствами оно тоже окажется неположительным.

Нетрудно понять, что при наличии равенства имеет место

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \frac{1}{1 - t - \frac{t^{d+1}}{4d}}.$$

Пусть $f(t) = 1 - t - \frac{t^{d+1}}{4d}$. Проверим, что $f(1) < 0$ и

$$f\left(1 + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{d}\right)^{d+1}}{4}\right) > 0,$$

так как последовательность $\left(1 + \frac{1}{d}\right)^{d+1}$ убывает и принимает значение 4 при $d = 1$. Следовательно, у многочлена $f(t)$ есть корень, по модулю больший единицы, пусть он равен $1/a > 1$, то есть $0 < a < 1$. Этот многочлен раскладывается в произведение

$$f(t) = (1 - at) \left(1 - (1 - a)t - (1 - a)at^2 - \dots - (1 - a)a^{d-2}t^{d-1} - \frac{1}{4da}\right) = h(t)g(t).$$

Ясно, что все слагаемые в степенных разложениях $\frac{1}{h(t)}$ и $\frac{1}{g(t)}$ положительны, следовательно то же верно для $\frac{1}{f(t)}$.

Более элементарное решение. Будем считать, что a_k определено и при отрицательных целых k и равно 1. Докажем неравенство

$$a_s \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t a_{s-t}$$

для неотрицательных s и t индукцией по лексикографическому порядку пар (s, t) .

Из него очевидно следует при $s = t$

$$a_s \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

что доказывает положительность a_s .

База индукции: если $s = 0$, то неравенство принимает вид

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

что верно.

Далее шаг индукции будем делать по-разному, в зависимости от t

- Случай $t > 1$: Тогда применяем утверждение для пар $(s, 1)$ и $(s - 1, t - 1)$ и получаем

$$a_s \geq a_{s-1} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \geq a_{s-t} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{1+t-1} = a_{s-t} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

то есть утверждение для пары (s, t) ;

- Случай $t = 1$: Тогда

$$a_s \geq a_{s-1} - \frac{a_{s-1-d}}{4d} \geq a_{s-1} - \frac{a_{s-1}}{4d \left(1 - \frac{1}{d}\right)^d} \geq a_{s-1} \left(1 - \frac{1}{d}\right),$$

где второе неравенство есть предположение индукции для пары $(s - 1, d)$, а третье следует из оценки возрастания величины $\left(1 - \frac{1}{d}\right)^d$ (вспомните определение числа e) и следующей из него оценки

$$\left(1 - \frac{1}{d}\right)^d \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$