58$^{\text{Η}}$ Διεθνης Μαθηματικη Ολυμπιαδα

12 – 24 Ιουλίου, 2017, Ρίο, Βραζιλία

Πρόβλημα 1. Για κάθε ακέραιο $a_0 > 1$, ορίζουμε την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$ για $n \geq 0$ αναδρομικά με τον τύπο

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{αν } \sqrt{a_n} \text{ είναι ακέραιος,} \\ a_n + 3 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Να βρείτε όλες τις τιμές του a_0 για τις οποίες υπάρχει αριθμός A έτσι ώστε $a_n = A$ για άπειες τιμές του n.

(Νότια Αφρική)

Λύση. Η άσκηση λύθηκε πλήρως από όλους τους Έλληνες μαθητές. Παρουσιάζουμε εδώ ένα κράμα των λύσεών τους.

Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει αν και μόνο αν $3 \mid a_0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a_0 \equiv 0 \pmod 3$, τότε θεωρούμε $9M^2$ το μικρότερο πολλαπλάσιο του 3 που είναι τέλειο τετράγωνο και υπερβαίνει το a_0. Τότε υπάρχει m ώστε

  $$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots a_m = 9M^2,$$

  οπότε $a_{m+1} = 3M$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία, βλέπουμε ότι $a_k \leq 9M^2$ για κάθε k. Επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη και άρα υπάρχει αριθμός A έτσι ώστε $a_n = A$ για άπειες τιμές του n.

- Αν $a_0 \equiv 2 \pmod 3$, τότε ο a_0 δεν είναι τέλειο τετράγωνο, αφού όλα τα τέλεια τετράγωνα είναι $1, 2 \mod 3$. Επομένως $a_1 = a_0 + 3$ και επιπλέον $a_1 \equiv 2 \pmod 3$. Αυτό σημαίνει ότι ο a_1 δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο και άρα $a_2 = a_1 + 3$. Συνεχίζοντας, επαγωγικά, δείχνουμε ότι $a_{n+1} = a_n + 3 > a_n$, επομένως η ακολουθία σε αυτή την περίπτωση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ζητούμενο δεν μπορεί να ισχύει.

- Αν $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, τότε γράφουμε $a_0 = 3k + 1$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο k, ότι η ακολουθία δεν ικανοποιεί το ζητούμενο. Πράγματι, για $k = 1$ έχουμε $a_0 = 4$,

$a_1 = 2$, οπότε αφού βρήκαμε όρο 2 (mod 3), σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση, η ακολουθία δεν ικανοποιεί το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για $k = 1, 2, \dots s$ και θα το δείξουμε για $k = s + 1$. Τότε, γράφουμε $a_0 = 3s + 4$. Θεωρούμε N^2 το μικρότερο τέλειο τετράγωνο ώστε $a_0 \le N^2$. Αφού με βήμα 3 μπορούμε από το a_0 να φτάσουμε στο $(3s+1)^2 > 3s + 4$, θα έχουμε ότι για κάποιο s θα ισχύει $a_s = N \le 3s + 1$. Αν μεν, $N \equiv 2 \pmod 3$ έχουμε το ζητούμενο από τη δεύτερη περίπτωση, αν δε $N \equiv 1 \pmod 3$ τότε εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία δεν έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f\Big(f(x)f(y)\Big) + f(x+y) = f(xy),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(Αλβανία)

Λύση. Ο πρώτος τρόπος λύσης που θα παρουσιάσουμε οφείλεται στον Βασίλη Γεωργιάδη.

Έστω $P(x, y)$ η δοθείσα σχέση. Τότε από την $P(0, 0)$ παίρνουμε ότι $f(f^2(0)) = 0$, άρα υπάρχει a ώστε $f(a) = 0$.

- Αν $a \neq 1$, τότε η $P\left(\frac{a}{a-1}, a\right)$ δίνει $f(0) = 0$. Τότε όμως, η $P(x, 0)$ δίνει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη δοθείσα.

- Αν $a = 1$, τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι $f(a) = 0 \iff a = 1$. Επομένως από τη σχέση $f(f^2(0)) = 0$, παίρνουμε ότι $f^2(0) = 1$. Παρατηρούμε τώρα ότι αν η f ικανοποιεί τη δοθείσα, τότε και η $-f$ ικανοποιεί τη δοθείσα, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0) = -1$. Σε αυτή την περίπτωση η $P(x, 1)$ δίνει $f(0) + f(x+1) = f(x)$, οπότε

  $$f(x+1) = f(x) + 1. \tag{1}$$

  Επιπλέον η $P(x, 0)$ δίνει

  $$f\Big(-f(x)\Big) = -f(x) - 1. \tag{2}$$

  Η (2) για x το $-f(x)$ δίνει

  $$\begin{aligned} f\Big(-f(-f(x))\Big) = -f\Big(-f(x)\Big) - 1 &\stackrel{(2)}{=} f(x) + 1 \quad \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \\ f\Big(f(x)+1\Big) &= f(x) + 1 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ f\Big(f(x)\Big) &= f(x) - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

  Τώρα, η $P(x, 2)$ δίνει

  $$f\Big(f(x)\Big) + f(x+2) = f(2x) \stackrel{(1),(2)}{\Longrightarrow} f(2x) = 2f(x) + 1. \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$f\big(f(y)+1\big) \overset{(1)}{=} f\big(f(y)\big)+1 \overset{(2)}{=} f(y),$$

η σχέση $P(x, f(y)+1)$ δίνει

$$f\big(f(x)f(y)\big)+f(x+f(y)+1)=f\big(xf(y)+x\big),$$

η οποία με τη βοήθεια της αρχικής δίνει

$$f(xy)-f(x+y)+f(x+f(y)+1)=f\big(xf(y)+x\big). \tag{5}$$

Αν τώρα στην (5) θέσουμε όπου x το $2x$ και όπου y το $2y$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά την (4), παίρνουμε

$$2f(xy)-f(x+y)+f(x+f(y)+1)=2f\big(xf(y)+x\big),$$

οπότε σε συνδυασμό με την (5) παίρνουμε ότι

$$f(xy)=f\big(xf(y)+x\big).$$

Αν στην τελευταία θέσουμε όπου x το $\frac{1}{y}$, παίρνουμε

$$f\left(\frac{f(y)+1}{y}\right)=f(1)=0,$$

και αφού η μοναδική ρίζα της f είναι το 1, θα πρέπει $\frac{f(y)+1}{y}=1$ για κάθε $y\neq 0$, δηλαδή $f(y)=y-1$ για κάθε $y\neq 0$. Όμως ισχύει ότι $f(0)=-1$, άρα $f(y)=y-1$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Τελικά, οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι $f(x)=x-1$, $f(x)=1-x$ και $f(x)=0$, και εύκολα βλέπουμε ότι επαθηλεύουν την αρχική.

2ος τρόπος. Ο δεύτερος τρόπος οφείλεται στις παρόμοιες προσεγγίσεις των Δημήτρη Λώλα και Δημήτρη Μελά.

Όπως και στον τρόπο τρόπο, υποθέτουμε ότι $f(0)=-1$ και φτάνουμε στην σχέση (4). Θεωρούμε στη συνέχεια την $P(f(x), f(y))$ που με τη βοήθεια της (3) και της αρχικής δίνει

$$\begin{aligned}
f\big(f(f(x))f(f(y))\big)+f\big(f(x)+f(y)\big)&=f\big(f(x)f(y)\big) &&\Longrightarrow\\
f\big(f(x-1)f(y-1)\big)+f\big(f(x)+f(y)\big)&=f(xy)-f(x+y) &&\Longrightarrow\\
f\big((x-1)(y-1)\big)-f(x+y-2)+f\big(f(x)+f(y)\big)&=f(xy)-f(x+y) &&\Longrightarrow\\
f\big(f(x)+f(y)\big)&=f(xy)-f\big((x-1)(y-1)\big)-2. && \qquad (6)
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο η $P(-f(x), -f(y)$ δίνει

$$f\big(-f(x)-f(y)\big)=f(xy)-f\big((x+1)(y+1)\big)+2. \tag{7}$$

Η τελευταία τώρα για y το $-x$ δίνει

$$f\Big(-f(x)-f(-x)\Big)=f(-x^2)-f(-x^2+1)+2\overset{(1)}{=}1.$$

Και πάλι λόγω της (1) έχουμε ότι

$$f\Big(-f(x)-f(-x)-1\Big)=0.$$

Όμως η μοναδική ρίζα της f είναι το 1 άρα $f(x)+f(-x)=-2$. Προσθέτοντας τις (6) και (7) παίρνουμε

$$f\Big((x+1)(y+1)\Big)+f\Big((x-1)(y-1)\Big)=2f(xy)+2.$$

Η τελευταία με τη βοήθεια των (1) και (4) γίνεται

$$f(xy+x+y)+f(xy-x-y)=f(2xy)-1,$$

και με τη βοήθεια της (1) μπορούμε να γράψουμε

$$f(xy+x+y-n)+f(xy-x-y+n)=f(2xy)-1, \tag{8}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε τυχόντα $a,b\in\mathbb{R}$ και το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} xy+x+y+n &= a \\ xy-x-y-n &= b. \end{cases}$$

Αυτό έχει λύση ως προς x,y αν και μόνο αν $(x+y)^2\geq 4xy$. Όμως $xy=a+b$ και $x+y=a-b-2n$, οπότε για αρκούντως μεγάλο n το σύστημα έχει πάντα λύση. Τότε, η (8) γίνεται

$$f(a)+f(b)=f(a+b)-1,$$

δηλαδή η η συνάρτηση $g(x)=f(x)-1$ είναι προσθετική. Τέλος, χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα και την (3) παίρνουμε

$$f\Big(f(x)-x\Big)=f\Big(f(x)\Big)-f(x)-1\overset{(3)}{=}-2.$$

Όμως η μοναδική ρίζα της f είναι ο αριθμός 1, άρα $f(x)-x+2=1$, οπότε $f(x)=x-1$. Όπως και στον πρώτο τρόπο, αφού αν f είναι λύση είναι και η $-f$, καταλήγουμε στις τρεις λύσεις $f(x)=x-1$, $f(x)=1-x$ και $f(x)=0$.

3$^{\text{ος}}$ τρόπος. Όπως και στον τρόπο τρόπο, υποθέτουμε ότι $f(0)=-1$ και φτάνουμε στην σχέση (3). Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι ένα προς ένα. Ας υποθέσουμε ότι $f(x)=f(y)$. Αν N είναι ένας ακέραιος, τότε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} a+b &= x+N+1 \\ ab &= y+N \end{aligned}$$

έχει λύση ως προς a, b αν και μόνο αν $(a+b)^2 \geq 4ab$ δηλαδή αν $(x+N+1)^2 \geq 4(y+N)$. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε αν το N είναι αρκούντως μεγάλο. Από την (1) παίρνουμε ότι $f(x+N) = f(y+N)$. Επομένως η $P(a, b)$ δίνει

$$f\Big(f(a)f(b)\Big) + f(x+N+1) = f(y+N),$$

άρα από την (1) έχουμε $f\Big(f(a)f(b)\Big) = -1$. Λόγω της μοναδικότητας του μηδενισμού της f έπεται ότι $f(a)f(b) = 0$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f(a) = 0$ τότε πάλι λόγω της μοναδικότητας του μηδενισμού έχουμε $a = 1$ άρα $b = x+N = y+N$, οπότε $x = y$. Έπεται ότι η f είναι ένα προς ένα. Όμως η (3) λόγω της (1) δίνει

$$f\Big(f(x)\Big) = f(x-1)$$

και αφού η f είναι ένα προς ένα, έπεται ότι $f(x) = x - 1$. Όπως και στον πρώτο τρόπο, αφού αν f είναι λύση είναι και η $-f$, καταλήγουμε στις τρεις λύσεις $f(x) = x-1$, $f(x) = 1-x$ και $f(x) = 0$.

Πρόβλημα 3. Ένας κυνηγός και ένα αόρατο κουνέλι παίζουν ένα παιχνίδι στο Ευκλείδειο επίπεδο. Το κουνέλι έχει σημείο εκκίνησης το A_0, το οποίο ταυτίζεται με το σημείο εκκίνησης B_0 του κυνηγού. Μετά από $n-1$ στάδια του παιχνιδιού, το κουνέλι βρίσκεται στο σημείο A_{n-1} και ο κυνηγός στο σημείο B_{n-1}. Στο n-οστό στάδιο του παιχνιδιού, συμβαίνουν τρία πράγματα.

(ι) Το κουνέλι κινείται αόρατα πηγαίνοντας στο σημείο A_n έτσι ώστε η απόσταση του A_{n-1} και του A_n να είναι ακριβώς 1.

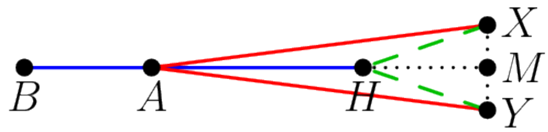
(ιι) Μία συσκευή παρακολούθησης δίνει ένα σημείο P_n στον κυνηγό. Η μόνη εγγύηση όμως που παρέχει η συσκευή είναι ότι η απόσταση μεταξύ του σημείου P_n και του A_n είναι το πολύ 1.

(ιιι) Ο κυνηγός κινείται ορατά πηγαίνοντας σε ένα σημείο B_n έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των B_{n-1} και B_n να είναι ακριβώς 1.

Είναι πάντα δυνατό, ανεξάρτητα με την κίνηση από το κουνέλι, και ανεξάρτητα από τα σημεία που δίνει η συσκευή παρακολούθησης, για τον κυνηγό να επιλέξει τις κινήσεις του ώστε μετά από 10^9 στάδια του παιχνιδιού να είναι σίγουρος ότι η απόστασή του από το κουνέλι είναι το πολύ 100;

(Αυστρία)

Η απάντηση είναι όχι. Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο βασικό ισχυρισμό.
Ισχυρισμός: Ας υποθέσουμε ότι κάποια στιγμή το κουνέλι είναι σε απόσταση $d \geq 1$ από τον κυνηγό. Τότε μπορεί να αυξήσει την απόστασή του σε $\sqrt{d^2 + \frac{1}{2}}$ σε $4d$ βήματα, ανεξάρτητα με την πληροφόρηση του κυνηγού για τη θέση που έχει το κουνέλι.
Απόδειξη. Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο $n > d$, που θα επιλέξουμε αργότερα. Έστω ότι ο κυνηγός βρίσκεται στο σημείο B και το κουνέλι στο σημείο A, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ονομάζουμε ℓ την ευθεία AB.



Το κουνέλι τώρα διαλέγει δύο σημεία X και Y συμμετρικά ως προς την ℓ έτσι ώστε $XY = 2$ και $AX = AY = n$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κουνέλι μπορεί να κατευθυνθεί είτε προς το σημείο X είτε προς το σημείο Y και η συσκευή παρακολουθήσης να δίνει σημεία P_n πάνω στην ευθεία ℓ κάθε φορά. Για να γίνει αυτό χρειάζεται n στάδια.
Τώρα ο κυνηγός, μη γνωρίζοντας αν το κουνέλι πηγαίνει προς το X ή προς το Y, και γνωρίζοντας μόνο ότι το κουνέλι κινείται σε έναν δίσκο ακτίνας 1 με κέντρο πάνω στην ℓ, η καλύτερη στρατηγική που έχει για να μην αυξηθεί όσο το δυνατόν λιγότερο η απόστασή του από το κουνέλι είναι να κινείται κατά μήκος της ℓ. Άρα ο κυνηγός, μετά από n στάδια βρίσκεται σε σημείο H τέτοιο ώστε $BH = n$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} HX^2 &= 1 + HM^2 = 1 + \left(\sqrt{AX^2 - 1} - AH\right)^2 \\ &= 1 + \left(\sqrt{n^2 - 1} - (n - d)\right)^2 \\ &\geq 1 + \left(\left(n - \frac{1}{n}\right) - (n - d)\right)^2 \\ &= 1 + (d - 1/n)^2 \end{aligned}$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από $d^2 + \frac{1}{2}$ όταν $n \geq 4d$.
Συγκεκριμένα, για το πρόβλημα μπορούμε να πάρουμε $n = 400$, οπότε αν $d \leq 100$ μπορούμε να εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό. Αν τον εφαρμόσουμε $2 \cdot 100^2$ φορές, το κουνέλι θα φτάσει σε απόσταση $\sqrt{d^2 + 100^2} > 100$ μετά από $4d \cdot 2 \cdot 100^2 < 10^9$ στάδια, όπως θέλαμε.

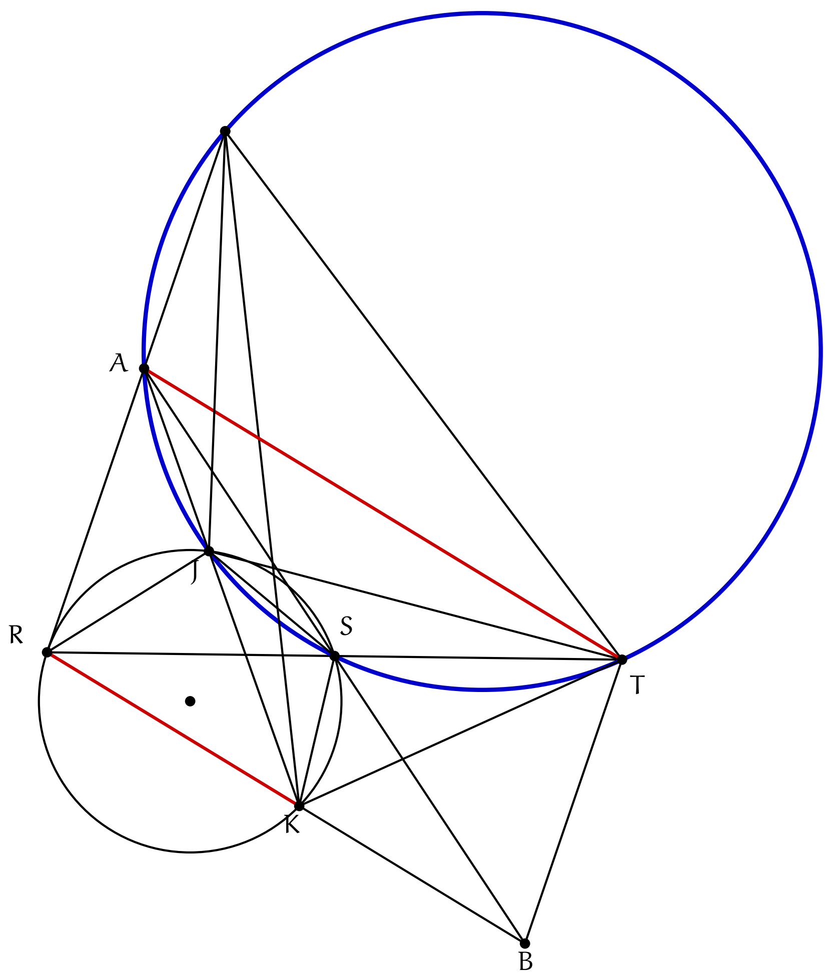
Πρόβλημα 4. Σε έναν κύκλο Ω θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία R και S έτσι ώστε η RS να μην είναι διάμετρος. Έστω ℓ η εφαπτομένη του Ω στο σημείο R. Το σημείο T είναι τέτοιο ώστε το S να είναι το μέσον του τμήματος RT. Το σημείο J είναι στο ελλάσσον τόξο RS του Ω έτσι ώστε ο περιγεγραμμένος κύκλος Γ του τριγώνου JST να τέμνει την ℓ σε δύο διακεκριμένα σημεία. Ονομάζουμε A του κοινό σημείου του Γ και της ℓ που βρίσκεται πλησιέστερα του R. Η ευθεία AJ τέμνει τον Ω ξανά στο K. Να αποδείξετε ότι η ευθεία KT εφάπτεται στον κύκλο Γ.

(Λουξεμβούργο)

Λύση. Ο πρώτος τρόπος λύσης που θα παρουσιάσουμε οφείλεται στους Δημήτρη Λώλα, Δημήτρη Τσιντσιλίδα, Ραφαήλ Ψυρούκη.
Θα δείξουμε πρώτα ότι $AT \parallel RK$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\angle ATS = \angle KJS = \angle SRK.$$

Έπεται ότι αν B είναι το σημείο τομής των AS και RK, τότε από την παραλληλία AS = SB, άρα το ARBT είναι παραλληλόγραμμο.



Από την παραλληλία των AR και BT και το γεγονός ότι η AR είναι εφαπτομένη, παίρνουμε

$$\angle STB = \angle ARS = \angle RKS,$$

οπότε το τετράπλευρο SKBT είναι εγγράψιμο. Τέλος, γράφουμε

$$\angle STK = \angle SBK = \angle SAT,$$

οπότε η KT είναι εφαπτομένη του Γ.

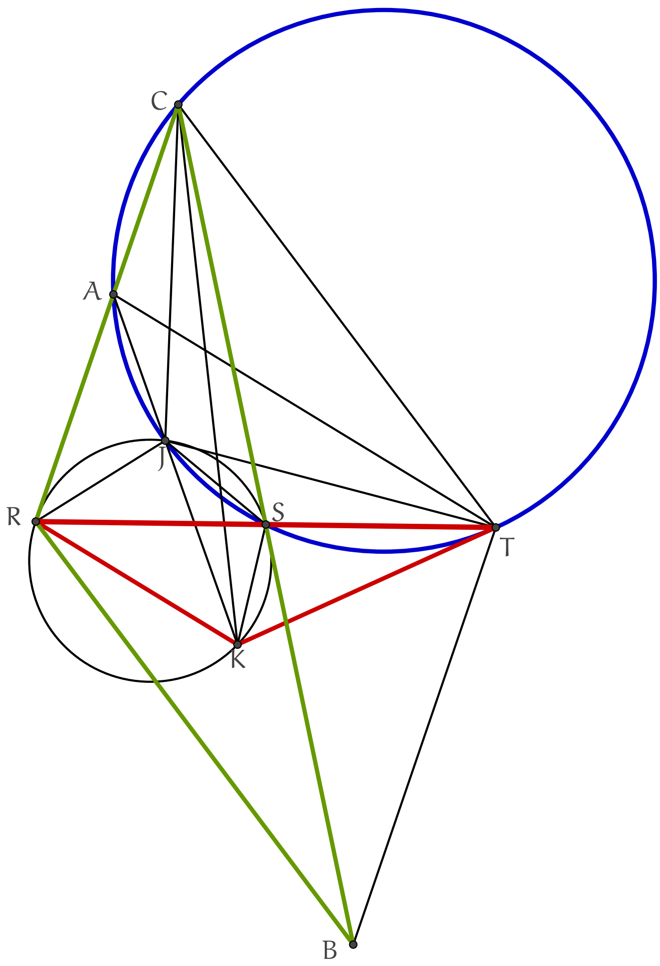
2ος τρόπος.(Σιλουανός Μπραζιτίκος) Θεωρούμε C το δεύτερο κοινό σημείο της ℓ και του Γ. Τότε

$$\angle KRS = \angle KJS = \angle RCS.$$

Επιπλέον, λόγω της εφαπτομένης CR έχουμε ότι $\angle RKS = \angle CRS$. Έπεται ότι τα τρίγωνα

$\triangle CRS$ και $\triangle RSK$ είναι όμοια και ισχύει

$$\frac{CR}{CS} = \frac{KR}{RS}. \tag{1}$$



Αν B είναι το συμμετρικό του C ως προς το S, τότε τα τρίγωνα $\triangle CRB$ και $\triangle RTK$ έχουν $\angle RCB = \angle KRT$ και λόγω της (1) θα ισχύει ότι

$$\frac{CR}{CB} = \frac{KR}{RT}.$$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια, οπότε

$$\angle RTK = \angle RBC = \angle SCT,$$

(όπου η τελευταία ισχύει από το παραλληλόγραμμο CRBT) και η KT είναι εφαπτομένη του Γ.

Πρόβλημα 5. Έστω $N \geqslant 2$ ένας ακέραιος. Έχουμε $N(N+1)$ ποδοσφαιριστές που ανά δύο έχουν διαφορετικά ύψη να στέκονται σε μία γραμμή. Ο προπονητής θέλει να βγάλει

$N(N-1)$ παίκτες από τη γραμμή, ώστε να δημιουργηθεί μία νέα γραμμή αποτελούμενη από $2N$ ποδοσφαιριστές ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες N συνθήκες:

(1) Κανείς ποδοσφαιριστής δεν βρίσκεται ανάμεσα στους δύο ψηλότερους παίκτες της γραμμής,

(2) Κανείς ποδοσφαιριστής δεν βρίσκεται ανάμεσα στον τρίτο και τον τέταρτο ψηλότερο παίκτη της γραμμής,

$\vdots$

(N) Κανείς ποδοσφαιριστής δεν βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κοντότερους παίκτες της γραμμής.

Να αποδείξετε ότι αυτό είναι πάντα δυνατό.

(Ρωσία)

Λύση. Διαμερίζουμε το σύνολο των ποδοσφαιριστών σε N ομάδες, ας είναι G_1, G_2,..., G_N οι ομάδες, ώστε κάθε ομάδα έχει $N+1$ ποδοσφαιριστές. Προχωρούμε με επαγώγή στο N. Για $N=1$ το ζητούμενο είναι προφανές. Σε κάθε ποδοσφαιριστή, , από τον κοντότερο στον ψηλότερο, δίνουμε ένα νούμερο από το 1 μέχρι το $N(N+1)$ ανάλογα με το ύψος του. Βρίσκουμε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο s έτσι ώστε δύο ποδοσφαιριστές από τους αριθμημένους με $1, 2, \ldots, s$ να βρίσκονται στην ίδια ομάδα. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτή η ομάδα είναι η G_N. Από τον ελαχιστικό χαρακτήρα του s, στη G_N βρίσκεται ο ποδοσφαιριστής με τον αρθμό s και κάποιος άλλος με τον αριθμό i με $i < s$. Διαλέγουμε τώρα αυτούς τους δύο ποδοσφαιριστές, ξεχνάμε την ομάδα G_N και αφαιρούμε και όλους τους υπόλοιπους ποδοσφαιριστές με νούμερο από 1 μέχρι $s-1$. Έτσι οι καινούργιες ομάδες που δημιουργούνται, ας είναι $G_1', G_2', \ldots, G_{N-1}'$, έχουν τουλάχιστον N ποδοσφαιριστές. Από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να επιλέξουμε $2(N-1)$ ποδοσφαιριστές με τις ζητούμενες ιδιότητες. Αν σε αυτούς προσθέσουμε και το ζεύγος των ποδοσφαιριστών (i, s), οι ιδιότητες διατηρούνται καθώς οι $2(N-1)$ ποδοσφαιριστές έχουν νούμερα μεγαλύτερα του s. Συνεπώς, βρήκαμε $2(N-1)+2 = 2N$ ποδοσφαιριστές που ικανοποιούν το ζητούμενο.

Πρόβλημα 6. Ένα διατεταγμένο ζεύγος ακεραίων (x, y) θα λέγεται *πρωταρχικό σημείο* αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των x, y είναι 1. Δοθέντος πεπερασμένου συνόλου S που αποτελείται από πρωταρχικά σημεία, να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n και ακέραιοι $a_0, a_1, \ldots, a_n$, έτσι ώστε για κάθε σημείο (x, y) του S να ισχύει

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(Αμερική)

Λύση. (Σιλουανός Μπραζιτίκος) Θα παρουσιάσουμε παρακάτω και τον τρόπο σκέψης, κατά το δυνατόν, που θα μας οδηγήσει στη λύση.
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των σημείων του S. Αν το S έχει ένα

στοιχείο, έστω (a_1, b_1), τότε αφού το στοιχείο είναι πρωταρχικό, υπάρχουν ακέραιοι s και t τέτοιοι ώστε $a_1 s + b_1 t = 1$. Επομένως αν θεωρήσουμε το πολυνώνυμο $P(x, y) = xs + yt$, τότε στο σημείο του S ισχύει $P(a_1, b_1) = 1$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει αν το S έχει k σημεία και θα δείξουμε το ζητούμενο όταν έχει $k + 1$ σημεία. Πράγματι, έστω

$$S = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{k+1}, b_{k+1})\}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν πρωταρχικά σημεία σε πρωταρχικά σημεία και το πρόβλημα γίνεται ισοδύναμο, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (1, 0)$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ομογενές πολυώνυμο $g(x, y)$, ώστε $g(x, y) = 1$ για καθένα από τα σημεία (a_1, b_1), (a_2, b_2),...,(a_k, b_k). Επομένως αναζητούμε ομογενές πολυώνυμο $f(x, y)$ ώστε $f(x, y) = 1$ για κάθε σημείο του S. Ένα ομογενές πολυώνυμο με τη ζητούμενη ιδιότητα για το σημείο $(1, 0)$, είναι το πολυώνυμο $h(x, y) = x$. Επομένως μία πρώτη απόπειρα θα ήταν να δοκιμάσουμε να πάρουμε

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y) = g(x, y) + x.$$

Όμως για να έχουμε $f(a_i, b_i) = 1$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $h(x, y)$ με ένα πολυώνυμο $p(x, y)$ το οποίο θα μηδενίζεται στα σημεία (a_i, b_i) για κάθε $1 \leq i \leq k$. Ένα τέτοιο πολυώνυμο είναι το

$$p(x, y) = (b_1 x - a_1 y)(b_2 x - a_2 y) \dots (b_k x - a_k y).$$

Αν λοιπόν τώρα δοκιμάσουμε να πάρουμε

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)p(x, y) = g(x, y) + x(b_1 x - a_1 y)(b_2 x - a_2 y) \dots (b_k x - a_k y),$$

τότε έχουμε όντως ότι $f(a_i, b_i) = 1$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ και μένει να πετύχουμε να ισχύει $f(1, 0) = 1$. Όμως βλέπουμε ότι

$$f(1, 0) = g(1, 0) + b_1 b_2 \dots b_k,$$

το οποίο δεν ισούται απαραίτητα με 1. Επομένως η επόμενη δοκιμή για το $f(x, y)$ είναι να πολλαπλασιάσουμε και το $g(x, y)$ με κάποιο πολυώνυμο $q(x, y)$, δηλαδή να πάρουμε

$$f(x, y) = q(x, y)g(x, y) + h(x, y)p(x, y).$$

Για να συνεχίσει να ισχύει $f(a_i, b_i) = 1$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, μία βολική επιλογή είναι να πάρουμε $q(x, y) = (g(x, y))^s$, όπου s είναι ένας θετικός ακέραιος που θα επιλέξουμε. Παίρνουμε λοιπόν

$$f(x, y) = (g(x, y))^s + Cxp(x, y),$$

όπου C είναι μια σταθερά που επίσης θα επιλέξουμε. Τότε βλέπουμε ότι

$$f(1,0) = (g(1,0))^s + Cb_1b_2\dots b_k.$$

- Αν $b_i = 0$ για κάποιο i, τότε υποχρεωτικά έχουμε ότι $a_i = \pm 1$, οπότε $g(\pm, 0) = \pm 1$, οπότε αρκεί να πάρουμε $s = 2$.

- Αν $b_i \neq 0$ για κάθε i, τότε θα αποδείξουμε ότι το $g(1,0)$ είναι σχετικά πρώτο με κάθε b_i. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχει πρώτος p ώστε

$$p \mid g(1,0) \quad \text{και} \quad p \mid b_i.$$

Αφού $p \mid b_i$ θα έχουμε ότι αν M είναι ο βαθμός του g, θα ισχύει

$$1 = g(a_i, b_i) \equiv g(a_i, 0) = a_i^M g(1,0) \equiv 0 \pmod p,$$

άτοπο, άρα $\gcd(g(1,0), b_i) = 1$ για κάθε i. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Euler και θα έχουμε ότι

$$(g(1,0))^{\varphi(b_1b_2\dots b_k)} \equiv 1 \pmod{b_1b_2\dots b_k},$$

οπότε αν θέσουμε $s = \varphi(b_1b_2\dots b_k)$ και διαλέξουμε το C κατάλληλα, τότε το πολυώνυμο

$$f(x,y) = (g(x,y))^s + Cxp(x,y),$$

ικανοποιεί το ζητούμενο. Το μόνο που μένει είναι να κάνουμε το f ομογενές. Αυτό γίνεται εύκολα αν πάρουμε το x σε κάποια κατάλληλη δύναμη. Συγκεριμένα, παίρνουμε

$$f(x,y) = (g(x,y))^s + Cx^{sM-k}p(x,y),$$

και η επαγωγή ολοκληρώνεται.