

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Θεματική ενότητα 5: Σύγχρονες αναζητήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Α.Π.
Τηλ. 6974/504878
Βίτσι 6, 18233 Αγ. Ι. Ρέντης
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
Τηλ. 6944/972340
Ηφαίστου 48, 13231 Πετρούπολη
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου θεωρούνται από τους περισσότερους μαθητές το δυσκολότερο μάθημα στο οποίο καλούνται να εξεταστούν ώστε να επιτύχουν την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το τρέχον σχολικό βιβλίο έχει γραφεί σχεδόν 20 χρόνια πριν και σε πολλές περιπτώσεις, με βάση τα θέματα των εξετάσεων, φαίνεται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων. Επιπλέον και σε επίπεδο θεωρίας, στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να γίνουν χρήσιμες βελτιώσεις και συμπληρώσεις, οι οποίες αφορούν: ορισμούς, παραδείγματα, προτάσεις και αποδείξεις προτάσεων. Ειδικά για τις προτάσεις που δεν υπάρχουν ούτε ως αναφορά στο σχολικό βιβλίο, είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν είτε χωρίς απόδειξη (με άμεσο αποτέλεσμα βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις) είτε να τις αποδεικνύουν χάνοντας πολύτιμο χρόνο. Με την εργασία αυτή προτείνουμε βελτιώσεις για τη θεωρία του σχολικού βιβλίου. Η εργασία αυτή είναι συνέχεια της εργασίας που παρουσιάσαμε στην 9η μαθηματική εβδομάδα στην Θεσσαλονίκη.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου, ακρότατα, συνάρτηση ένα προς ένα, αντίστροφη συνάρτηση.

Abstract

Most students believe that mathematics in the last class of Lyceum is the most difficult subject for their entry to university. The current school book was written almost 20 years ago and in many cases, in relation to exam topics, needs to be revised. Furthermore the theory in this book needs improvement in definitions, examples, propositions and proofs. Especially with regard to propositions not mentioned in the book students are obliged to prove them and waste valuable time during the examination or obtain a lower score for not proving them. In this paper we propose improvements about the theory of the school book. This paper is the second part of the paper that we presented in the 9th Mathematical Week, Thessaloniki 2017.

Εισαγωγή

Η ενασχόληση των συναδέλφων μαθηματικών με τα μαθηματικά της Γ' Λυκείου και η χρήση του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) ως κύριου οδηγού της διδασκαλίας αναδεικνύει τις ελλείψεις που έχει σε επίπεδο θεωρίας. Ασάφειες σε ορισμούς, απουσία παραδειγμάτων για την αποσαφήνιση λεπτών και κρίσιμων σημείων, έλλειψη χρήσιμων προτάσεων αλλά και αποδείξεων σε προτάσεις του βιβλίου είναι μερικά από τα στοιχεία που συνθέτουν τις εν λόγω ελλείψεις. Πολλά από αυτά διδάσκονται από τον καθηγητή, ο οποίος υποδεικνύει στους μαθητές να τα γνωρίζουν ως θεωρία, ενώ στην περίπτωση χρήσης προτάσεων που δεν υπάρχουν στο σχολικό οι μαθητές επιβάλλεται να τις αποδείξουν, αν θέλουν να είναι σίγουροι ότι δεν θα έχουν βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές. Αν συνυπολογίσουμε πως τα παιδιά βάζονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τα κάνει να λειτουργούν μηχανικά, τότε μπορούμε να πούμε πως αλλοιώνεται η ουσιαστική σημασία του μαθήματος των μαθηματικών, αφού οι μαθητές δεν μαθαίνουν να σκέπτονται σωστά, ενώ και οι γνώσεις που αποκτούν συχνά δεν είναι επαρκείς για να τους συνοδεύσουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρούμε πως ένα σωστό θεωρητικό υπόβαθρο χωρίς κενά, που θα δομηθεί σταδιακά και ας μοιραστεί σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, θα είναι αρωγός στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Και αυτό πρέπει να έχει ως αρχή και βασικό θεμέλιο του το σχολικό εγχειρίδιο.

Χωρίς καμία διάθεση κριτικής αλλά με τη ματιά του παρατηρητή, θέλουμε μέσω αυτής της σειράς εργασιών να επισημάνουμε κάποιες ελλείψεις που θεωρούμε σημαντικές για την κατανόηση του μαθήματος.

Ίσως κάποιες από αυτές που θα επισημάνουμε φανούν υπερβολικές αλλά θεωρούμε ότι η πληρότητα ενός σχολικού βιβλίου επιβάλλει τέτοιες παρατηρήσεις. Δυστυχώς, η έλλειψη χώρου μας αναγκάζει αυτό να γίνει σε συνέχειες (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2017). Αυτή η εργασία είναι το δεύτερο μέρος.

Ακρότατα

Σχόλιο 18: Είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί η διαφορά μεταξύ φράγματος και ακρότατου (Παντελίδης, 1998).

Ορισμός: Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει αριθμός m τέτοιος ώστε

$$f(x) \geq m, \text{ για κάθε } x \in A. \quad (49)$$

Το m είναι ελάχιστο της f αν υπάρχει $x_1 \in A$ έτσι ώστε $f(x_1) = m$.

Ορισμός: Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε

$$f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in A. \quad (50)$$

Το M είναι μέγιστο της f αν υπάρχει $x_2 \in A$ έτσι ώστε $f(x_2) = M$.

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται φραγμένη αν υπάρχουν αριθμοί m, M τέτοιοι ώστε

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Ας δούμε για παράδειγμα τη συνάρτηση f με

$$f(x) = (x - 1)^2, x \in \mathbb{R} \quad (51)$$

για την οποία ισχύουν οι ανισώσεις

$$f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) \geq -5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

Αυτό σημαίνει ότι ελάχιστη τιμή είναι το 0, το -5 ή και τα δύο; Η απάντηση είναι απλή, αφού δεδομένου του γεγονότος ότι

$$f(1) = 0 \quad (53)$$

ισχύει

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1), \quad (54)$$

άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) το 0 για $x = 1$ (το οποίο είναι και φράγμα).

Αντιθέτως επειδή δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -5$, το -5 είναι ένα κάτω φράγμα της συνάρτησης f , αλλά όχι ελάχιστο της f .

Συνάρτηση ένα προς ένα

Πρόταση 12: Αν η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο A είναι ένα προς ένα και τα $x_1, x_2 \in A$, ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (55)$$

Απόδειξη

Έστω ότι $x_1 \neq x_2$.

Αφού η f είναι ένα προς ένα, λόγω του ορισμού προκύπτει ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$, που είναι άτοπο, άρα $x_1 = x_2$.

Η πρόταση 12 είναι ισοδύναμη του ορισμού, χρησιμοποιείται κατά κόρον στην επίλυση των ασκήσεων και είναι μια απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής. Θεωρούμε ότι ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής αξίζει τον κόπο να αναφερθεί δεδομένου ότι ισχύει σε κάθε πρόταση (μαθηματική ή μη μαθηματική) και είναι χρήσιμη και στα επόμενα (π.χ. παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια).

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

Στη μαθηματική λογική κάθε πρόταση έχει δεδομένα ή υπόθεση (Y) και κάποιο ζητούμενο ή συμπέρασμα (Σ), άρα έχει τη μορφή

$$Y \Rightarrow \Sigma. \quad (56)$$

Ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής μετασχηματίζει την πρόταση $Y \Rightarrow \Sigma$ στην ισοδύναμή της

$$\text{όχι } \Sigma \Rightarrow \text{όχι } Y, \quad (57)$$

αποδεικνύεται πάντα με απαγωγή σε άτοπο και η λογική της απόδειξης αναδεικνύεται στην πρόταση 12.

Σύμφωνα λοιπόν με τον νόμο της αντιθετοαντιστροφής για την ένα προς ένα συνάρτηση, η άρνηση της $f(x_1) \neq f(x_2)$ οδηγεί στην άρνηση της $x_1 \neq x_2$, δηλαδή ισχύει η πρόταση 12.

Σχόλιο 19: Πως αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1; Ο ασφαλέστερος τρόπος είναι να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, διαφορετικά μπορεί ο μαθητής να οδηγηθεί σε λάθος σκέψεις (Μάστακας και Γαρατζιώτης, 2008).

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = x^2 + 2x. \quad (58)$$

Η συνάρτηση f μπορεί να είναι 1-1, αλλά μπορεί και να μην είναι. Τα πάντα εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της. Πράγματι η f δεν είναι 1-1 αν $A_f = \mathbb{R}$ ή $A_f = (-\infty, 0]$, ενώ είναι 1-1 αν $A_f = [0, +\infty)$ ή $A_f = [-1, 9)$.

Αν κινηθούμε καθαρά αλγεβρικά, θα θεωρήσουμε $x_1, x_2 \in A_f$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2 - 2. \quad (59)$$

Η σχέση αυτή αναλόγως του A_f οδηγεί ή δεν οδηγεί σε συνάρτηση 1-1.

Πρόταση 13: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και ένα προς ένα.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, οπότε

$$(x_1 < x_2 \text{ ή } x_1 > x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2) \text{ ή } f(x_1) > f(x_2)), \quad (60)$$

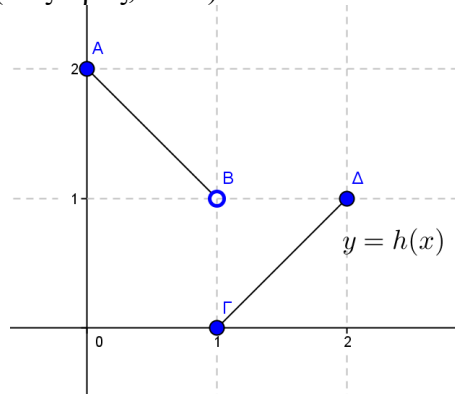
άρα

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (61)$$

δηλαδή η f είναι ένα προς ένα.

Ομοίως αποδεικνύεται η πρόταση 13 αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

Σχόλιο 20: Συχνή απορία των μαθητών είναι αν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 13. Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι 1-1 δεν είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη (σχήμα 4). Οι μαθητές σε αυτό το στάδιο δεν είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της συνέχειας οπότε είναι μάλλον φυσιολογική η απορία (Ντζιώρας, 1993).



Σχήμα 4: Η συνάρτηση h είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη

Πρόταση 14: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο για κάθε στοιχείο $y \in f(A)$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

Απόδειξη

Θεωρούμε τυχαίο $y \in f(A)$.

Ευθύ

Έστω ότι η f είναι 1-1 και ότι υπάρχουν δύο λύσεις $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ της εξίσωσης $f(x) = y$, δηλαδή

$$f(x_1) = f(x_2) = y, \quad (62)$$

που είναι άτοπο, αφού η f είναι ένα προς ένα, άρα η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία το πολύ λύση ως προς x .

Όμως $y \in f(A)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ρίζα, η οποία θα είναι και μοναδική.

Αντίστροφο

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι 1-1, οπότε για κάποια $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ θα ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) = y. \quad (63)$$

Τότε η εξίσωση

$$f(x) = y \quad (64)$$

έχει δύο διαφορετικές λύσεις τις $x_1, x_2 \in A$, που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Πρόταση 15: Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη.

Απόδειξη

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και τα σημεία $B(x_1, f(x_1)), \Gamma(x_2, f(x_2))$ της γραφικής της παράστασης της f .

Ευθύ

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Έστω ότι τα σημεία B, Γ έχουν ίσες τεταγμένες, οπότε

$$f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f^{-1-1}}{\Rightarrow} x_1 = x_2, \quad (65)$$

που είναι άτοπο, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2$,

δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της C_f με ίσες τεταγμένες.

Αντίστροφο

Έστω ότι τα σημεία B, Γ δεν έχουν την ίδια τεταγμένη, δηλαδή $f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα (χρήση του ορισμού).

Αντίστροφη συνάρτηση

Σχόλιο 21: Ο ορισμός της αντίστροφης μιας συνάρτησης f είναι δυσδιάκριτος στο βιβλίο (Κατσαργύρης κ.ά., 1992). Προτείνουμε να γραφεί πιο ξεκάθαρα ως εξής:

Έστω η 1-1 συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών το $f(A)$. Τότε αντίστροφη της συνάρτησης f , την οποία συμβολίζουμε με f^{-1} , ονομάζουμε την $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ για την οποία ισχύει $f^{-1}(y) = x$, $x \in A$, $y \in f(A)$, η οποία αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$.

Σχόλιο 22: Για να βρούμε την αντίστροφη μια συνάρτησης f , πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης (σύνολο τιμών της f) και μετά τον τύπο της. Στο βιβλίο δεν είναι ξεκάθαρο αυτό. Για παράδειγμα το επίσημο βιβλίο των λύσεων του σχολικού σε λυμένη άσκηση δεν το πράττει (άσκηση 2 ερώτημα (i) της παραγράφου 1.3).

Σχόλιο 23: Για να αντιστρέφεται μια συνάρτηση f πρέπει να είναι 1-1. Προφανώς και η αντίστροφη συνάρτηση είναι 1-1.

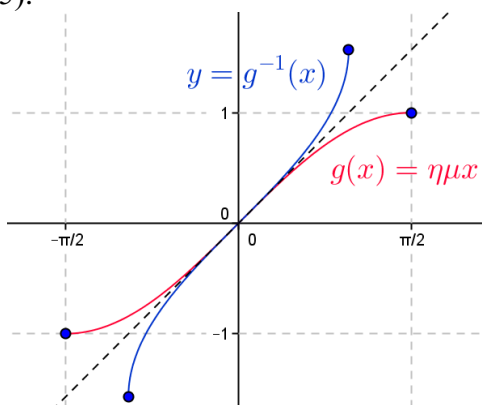
Σχόλιο 24: Η ύπαρξη της αντίστροφης μιας συνάρτησης δεν εξαρτάται μόνο από τον τύπο της, αλλά και από το πεδίο ορισμού. Όπως έχουμε ήδη τονίσει η συνάρτηση ορίζεται πλήρως από τον τύπο και το πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα η συνάρτηση f με

$$f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R} \quad (66)$$

δεν αντιστρέφεται, ενώ η συνάρτηση g με

$$g(x) = \eta\mu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (67)$$

αντιστρέφεται (σχήμα 5).



Σχήμα 5: Οι γραφικές παραστάσεις της g και της αντίστροφής της

Σχόλιο 25: Η ύπαρξη της αντίστροφης μιας συνάρτησης δεν σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε και ένα κλειστό τύπο γι' αυτή (Σπαθάρας, 2016). Η

συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ με $f(x) = xe^x$ (συνάρτηση W του

Lambert) αντιστρέφεται, αλλά δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την αντίστροφή της (Dence, 2013). Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 16: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε και η συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$ (Spivak, 1999, Βλάμος, 1997).

Απόδειξη

Η f είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο A , άρα είναι και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Έστω τυχαία $y_1, y_2 \in f(A)$ με

$$y_1 < y_2. \quad (68)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2). \quad (69)$$

Αφού $y_1, y_2 \in f(A)$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

Έτσι λόγω της (68) ισχύει ότι

$$f(x_1) < f(x_2). \quad (70)$$

Αν υποθέσουμε ότι

$$x_1 \geq x_2, \quad (71)$$

τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A έχουμε (από τον ορισμό) ότι

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad (72)$$

που είναι άτοπο.

Συνεπώς ισχύει

$$x_1 < x_2 \quad (73)$$

και αφού

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), \quad (74)$$

ισχύει η (69), οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η πρόταση:

Πρόταση 17: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A , τότε και η συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Πρόταση 18: Έστω η ένα προς ένα συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$, $x \in A \cap f(A)$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

1^η περίπτωση: Αν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

❖ Θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f^{-1}(x) = x$, οπότε

$$f^{-1}(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f^{-1}(x_0)) = f(x_0) \Rightarrow x_0 = f(x_0), \quad (75)$$

δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f(x) = x$.

❖ Θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f(x) = x$, οπότε

$$f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0), \quad (76)$$

δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f^{-1}(x) = x$.

2^η περίπτωση: Αν δεν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

Η απόδειξη στην περίπτωση αυτή είναι απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής για την 1^η περίπτωση.

Πρόταση 19: Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει σημείο $M(\alpha, \beta)$ που να ανήκει στις $C_f, C_{f^{-1}}$, οπότε $\alpha, \beta \in A \cap f(A)$ και

$$f(\alpha) = \beta, \quad (77)$$

$$f^{-1}(\alpha) = \beta \Rightarrow f(f^{-1}(\alpha)) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = f(\beta). \quad (78)$$

Έστω επίσης ότι το M δεν ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, δηλαδή $\alpha \neq \beta$.

- Αν $\alpha > \beta$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , ισχύει $f(\alpha) > f(\beta)$, η οποία λόγω των (77), (78) γίνεται $\beta > \alpha$, απορρίπτεται.
- Αν $\alpha < \beta$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$, η οποία λόγω των (77), (78) γίνεται $\beta < \alpha$, απορρίπτεται.

Συνεπώς $\alpha = \beta$ και έτσι το M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Πρόταση 20: Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε οι εξισώσεις $f(x) = x, f(x) = f^{-1}(x), x \in A \cap f(A)$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Καταρχήν γνωρίζουμε (πρόταση 16) ότι όταν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

1^η περίπτωση: Αν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

❖ Θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f(x) = x$, οπότε

$$f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0), \quad (79)$$

δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f(x) = f^{-1}(x)$.

❖ Αντιστρόφως θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f(x) = f^{-1}(x)$.

• Αν $f(x_0) > x_0$ και αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι:

$$f(x_0) > x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 > f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0),$$

περίπτωση που απορρίπτεται.

• Αν $f(x_0) < x_0$ και αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι:

$$f(x_0) < x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 < f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0),$$

περίπτωση που απορρίπτεται.

Επομένως $f(x_0) = x_0$, δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f(x) = x$.

2^η περίπτωση: Αν δεν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

Η απόδειξη στην περίπτωση αυτή είναι απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής για την 1^η περίπτωση.

Ομοίως αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 21: Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$, $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in A \cap f(A)$ είναι ισοδύναμες.

Σχόλιο 26: Προσέξτε ότι οι προτάσεις (19), (20), (21) ισχύουν μόνο για γνησίως αύξουσες συναρτήσεις (Μπουνάκης, 2009). Για παράδειγμα η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^* \quad (80)$$

είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται, έχει $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ και

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*. \quad (81)$$

Όμως οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x) = x$, $f^{-1}(x) = x$ $x \in \mathbb{R}^*$ δεν είναι ισοδύναμες (η πρώτη έχει άπειρες λύσεις και οι άλλες δύο από δύο λύσεις.)

Πρόταση 22: Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή στο A , τότε οι εξισώσεις $f(x) = -x$, $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in A \cap f(A)$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

1^η περίπτωση: Αν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

❖ Θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f(x) = -x$, οπότε

$$f(x_0) = -x_0 \Rightarrow -f(x_0) = x_0, \quad (82)$$

όπου η f είναι περιττή, άρα

$$f(-x_0) = x_0 \Rightarrow f(-x_0) = f(f^{-1}(x_0)) \quad (83)$$

και αφού η f είναι 1-1 (ως γνησίως φθίνουσα στο A) προκύπτει

$$f^{-1}(x_0) = -x_0, \quad (84)$$

δηλαδή λόγω της (82) προκύπτει

$$f^{-1}(x_0) = f(x_0), \quad (85)$$

δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f^{-1}(x) = f(x)$.

❖ Θεωρούμε ότι το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση της $f^{-1}(x) = f(x)$.

- Αν $f(x_0) > -x_0 \Rightarrow -f(x_0) < x_0$ και αφού η f είναι περιττή έχουμε ότι:

$$f(-x_0) < x_0 \Rightarrow f(-x_0) < f(f^{-1}(x_0)). \quad (86)$$

Επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$-x_0 > f^{-1}(x_0) \Rightarrow -x_0 > f(x_0), \quad (87)$$

περίπτωση που απορρίπτεται.

- Αν $f(x_0) < -x_0 \Rightarrow -f(x_0) > x_0$ και αφού η f είναι περιττή έχουμε ότι:

$$f(-x_0) > x_0 \Rightarrow f(-x_0) > f(f^{-1}(x_0)). \quad (88)$$

Επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$-x_0 < f^{-1}(x_0) \Rightarrow -x_0 < f(x_0), \quad (89)$$

περίπτωση που απορρίπτεται.

Επομένως $f(x_0) = -x_0$, δηλαδή το $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι λύση και της $f(x) = -x$.

2^η περίπτωση: Αν δεν έχει λύση κάποια από τις εξισώσεις.

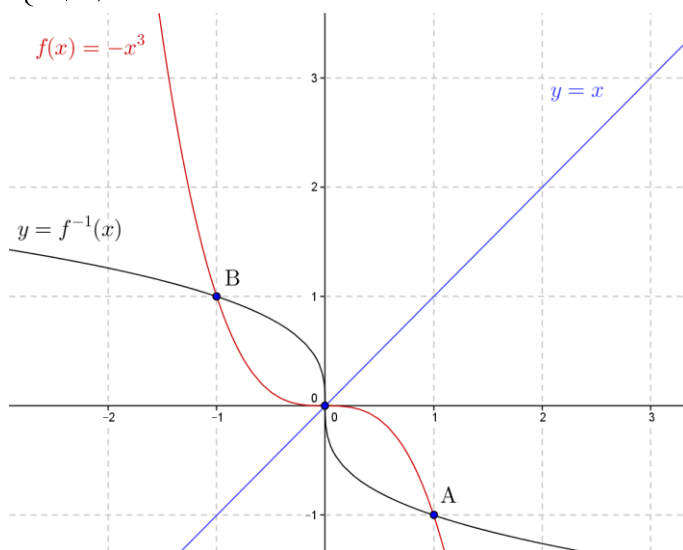
Η απόδειξη στην περίπτωση αυτή είναι απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής για την 1^η περίπτωση.

Ως εφαρμογή της πρότασης 22 ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = -x^3, x \in \mathbb{R} \quad (90)$$

που είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα, $1-1$, οπότε αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (91)$$



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση των f, f^{-1} με $f(x) = -x^3$

Από τις σχεδιασμένες γραφικές παραστάσεις είναι φανερό ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = -x$ στα σημεία $O(0,0), A(1,-1), B(-1,1)$.

Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που θεμελιώνεται σταδιακά. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να αποκομίζουν αυτή τη γνώση από το σχολείο. Είναι αναγκαία η δόμηση της προσφερόμενης μαθηματικής ύλης, ίσως και από μικρότερες τάξεις, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρουσιάζει συνοχή. Η μη αναφορά βασικών γνώσεων και προτάσεων μόνο κακό κάνει στα μαθηματικά. Ο «χαρακτηρισμός» βασικών προτάσεων ως «απαγορευμένες» (οπότε η χρήση τους είναι στη «μαύρη αγορά») δημιουργεί πολλούς κινδύνους στη βαθμολόγηση γραπτών και βλάπτει τον επιθυμητό από τους περισσότερους, ενιαίο και αμερόληπτο χαρακτήρα της. Γι' αυτό πρέπει να

είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία πρέπει να δίνουν τα απαραίτητα εφόδια στον οποιοδήποτε να πετύχει το σκοπό του. Σε αυτά στηρίζεται και το δεύτερο μέρος της πρότασής μας για το σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βλάμος Π. (1997). *Όριο και συνέχεια συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".
- Dence P. T. (2013). *A Brief Look into the Lambert W Function*, Applied mathematics, vol. 4, No. 6.
- Κατσαργύρης Β., Μεντής Κ., Παντελίδης Γ., Σουρλάς Κ. (1992). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Ανάλυση*, ΟΕΔΒ.
- Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου – Μέρος Ι*, Πρακτικά 9^{ης} διεθνούς μαθηματικής εβδομάδας, σελ. 463-474.
- Μάστακας Π., Γαρατζιώτης Ι. (2008). *Μαθηματικά για τη θετική-τεχνολογική κατεύθυνση Γ' Λυκείου, Α' τόμος*, εκδόσεις Κέδρος.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, συναρτήσεις-όρια-συνέχεια*, Ηράκλειο.
- Ντζιώρας Β. Ηλ. (1993). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ' Λυκείου, Α' τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.
- Παντελίδης Ν. Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ' Λυκείου*, εκδόσεις Ζήτη.
- Srinak M. (1999), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Σπαθάρας Δ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης ΓΕΛ, Κατανοώντας βαθύτερα το σχολικό βιβλίο και γνωρίζοντας λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξουμε*, τεύχος 1ο.