ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

Κυριαζής Χρήστος
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας
M.Sc. Μαθηματικός
Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Α.Π.
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου θεωρούνται από τους περισσότερους μαθητές το δυσκολότερο μάθημα που καλούνται να δώσουν ώστε να επιτύχουν την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το τρέχον σχολικό βιβλίο έχει γραφεί σχεδόν 20 χρόνια πριν και σε πολλές περιπτώσεις, με βάση τα θέματα των εξετάσεων, φαίνεται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων. Επιπλέον και σε επίπεδο θεωρίας, στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να γίνουν χρήσιμες βελτιώσεις και συμπληρώσεις, οι οποίες αφορούν: ορισμούς, παραδείγματα, προτάσεις και αποδείξεις προτάσεων. Ειδικά για τις προτάσεις που δεν υπάρχουν ούτε ως αναφορά στο σχολικό βιβλίο, είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν είτε χωρίς απόδειξη (με άμεσο αποτέλεσμα βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις) είτε να τις αποδεικνύουν χάνοντας πολύτιμο χρόνο. Με αυτή τη σειρά των εργασιών προτείνουμε βελτιώσεις για τη θεωρία του σχολικού βιβλίου. Η εργασία αυτή είναι συνέχεια των δύο εργασιών που παρουσιάσαμε στην 9η μαθηματική εβδομάδα στην Θεσσαλονίκη και στο 34ο πανελλήνιο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη Λευκάδα.

Abstract

Most students believe that mathematics in the last class of Lyceum is the most difficult subject for their entry to university. The current school book was written almost 20 years ago and in many cases, in relation to exam topics, needs to be revised. Furthermore the theory in this book needs improvement in definitions, examples, propositions and proofs. Especially with regard to propositions not mentioned in the book students are obliged to prove them and waste valuable time during the examination or obtain a lower score for not proving them. In this series of papers we propose improvements about the theory of the school book. We presented the first two papers in the 9th mathematical week and in the 34th Panhellenic conference of the Hellenic Mathematical Society. This paper is the third part.

Εισαγωγή

Η ενασχόληση των συναδέλφων μαθηματικών με τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου και η χρήση του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά. 2016) ως κύριου οδηγού της διδασκαλίας αναδεικνύει τις ελλείψεις που έχει σε επίπεδο θεωρίας. Ασάφειες σε ορισμούς, απουσία παραδειγμάτων για την αποσαφήνιση λεπτών και κρίσιμων σημείων, έλλειψη χρήσιμων προτάσεων αλλά και αποδείξεων σε προτάσεις του βιβλίου είναι μερικά από τα στοιχεία που συνθέτουν τις εν λόγω ελλείψεις. Πολλά από αυτά διδάσκονται από τον καθηγητή, ο οποίος υποδεικνύει στους μαθητές να τα γνωρίζουν ως θεωρία, ενώ στην περίπτωση χρήσης προτάσεων που δεν υπάρχουν στο σχολικό οι μαθητές επιβάλλεται να τις αποδείξουν, αν θέλουν να είναι σίγουροι ότι δεν θα έχουν βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές. Αν συνυπολογίσουμε πως τα παιδιά βάλλονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τα κάνει να λειτουργούν μηχανικά, τότε μπορούμε να πούμε πως αλλοιώνεται η ουσιαστική σημασία του μαθήματος των μαθηματικών, αφού οι μαθητές δεν μαθαίνουν να σκέπτονται σωστά, ενώ και οι γνώσεις που αποκτούν συχνά δεν είναι επαρκείς για να τους συνοδεύσουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρούμε πως ένα σωστό θεωρητικό υπόβαθρο χωρίς κενά, που θα δομηθεί σταδιακά και ας μοιραστεί σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, θα είναι αρωγός στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Και αυτό πρέπει να έχει ως αρχή και βασικό θεμέλιο του το σχολικό εγχειρίδιο.

Χωρίς καμία διάθεση κριτικής αλλά με τη ματιά του παρατηρητή, θέλουμε μέσω αυτής της σειρά των εργασιών να επισημάνουμε κάποιες ελλείψεις που θεωρούμε σημαντικές για την κατανόηση του μαθήματος.

Ίσως κάποιες από αυτές που θα επισημάνουμε φανούν υπερβολικές αλλά θεωρούμε ότι η πληρότητα ενός σχολικού βιβλίου επιβάλλει τέτοιες παρατηρήσεις. Δυστυχώς, η έλλειψη χώρου μας αναγκάζει αυτό να γίνει σε συνέχειες. Αυτή η εργασία είναι το τρίτο μέρος.

Όριο συνάρτησης

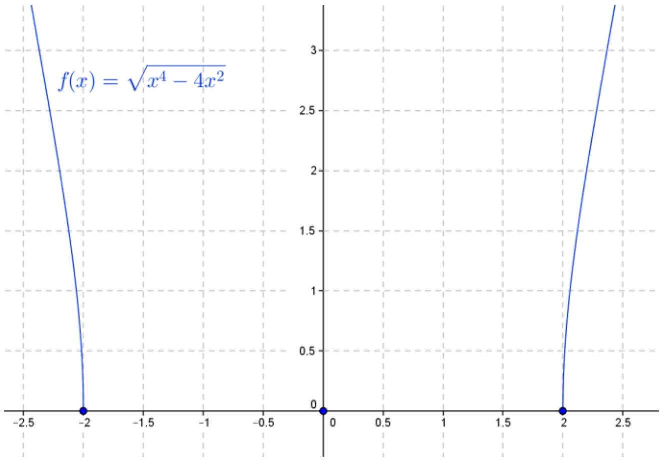
<u>Σχόλιο 27</u>: Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης, το βιβλίο δεν κάνει σαφές ότι ο μαθητής είναι απαραίτητο πρώτα να βρει το πεδίο ορισμού της, για να δει αν έχει νόημα το όριο και μετά να προχωρήσει στον υπολογισμό του ορίου.

Αν για παράδειγμα δώσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\sqrt{x^4-4x^2} \qquad (92)$$

και ζητήσουμε το όριο στο 0, είναι βέβαιο ότι, αν όχι όλοι, οι περισσότεροι μαθητές θα πουν ότι το όριο είναι μηδέν κάνοντας μια απλή αντικατάσταση (Σχήμα 7). Στην πραγματικότητα το όριο αυτό δεν έχει νόημα, αφού το πεδίο ορισμού της f είναι

$$A_f=(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[2,+\infty) \text{ !!!} \qquad (93)$$



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\sqrt{x^4-4x^2}$

Φαινομενικά το πρόβλημα αυτό «λύνεται», γιατί στο σχολικό βιβλίο γίνεται η εξής σύμβαση:

«Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).»

Η σύμβαση αυτή σε καμία περίπτωση δεν αναιρεί τη γνωστική έλλειψη που προκύπτει, η οποία έχει ως αιτία τη γενεσιουργό έννοια των ορίων, αυτή του σημείου συσσώρευσης.

Επιπλέον, σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αλλά μπορούμε να ελέγξουμε αν έχει νόημα η ύπαρξή ενός ορίου. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x^5 - 3x^3 + 5x + 1} \tag{94}$$

δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά το πεδίο ορισμού της. Μπορούμε όμως να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ορίου κοντά στο 1, αφού

$$\lim_{x \to 1}\left(x^5 - 3x^3 + 5x + 1\right) = 4 > 0, \tag{95}$$

οπότε

$$x^5 - 3x^3 + 5x + 1 > 0, \tag{96}$$

για x κοντά στο 1, άρα έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης g στο 1.

Σχόλιο 28: Να σημειώσουμε ότι ο συμβολισμός $\lim_{x \to x_0} f(x)$ χρησιμοποιείται μόνο αν υπάρχει το όριο. Στο σχολικό βιβλίο αυτό δεν είναι ευκρινές, αφού ακόμα και σε άσκηση ζητάει: «Να βρείτε όσα από τα όρια υπάρχουν …» και γράφει $\lim_{x \to -5} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{x + 5}$!!!

Σχόλιο 29: Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε:

- $\lim_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$,
- $\lim_{x \to x_0}\left(kf(x)\right) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$,

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0.

Πρέπει να είναι σαφές στους μαθητές ότι η «διάσπαση» των ορίων σε κάθε περίπτωση μπορεί να επιτευχθεί, μόνο αν υπάρχουν τα επιμέρους όρια!!!
Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ g(x)=-\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*, \tag{97}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=-\infty \tag{98}$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^-}g(x)=+\infty, \tag{99}$$

δηλαδή δεν υπάρχουν τα όρια των f, g στο $x_0=0$, ενώ

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0}x=0. \tag{100}$$

Από το παράδειγμα αυτό είναι φανερό επίσης ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης, αφού υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}x=0, \tag{101}$$

το οποίο δεν είναι ίσο με το άθροισμα των

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=-\infty. \tag{102}$$

Το πρόβλημα αυτό θα λυνόταν αν απλά η εκφώνηση του θεωρήματος ανέφερε: «… αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0 και είναι πραγματικοί, …»
Χαρακτηριστικές είναι και οι ακόλουθες προτάσεις.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=k>0$, τότε δεν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\sqrt{k}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\sqrt{k}$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=k>0$, τότε δεν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-k$.

Για την απόδειξη τους, θα χρησιμοποιήσουμε αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}, \tag{103}$$

της οποίας το όριο στο 0 δεν υπάρχει, ενώ

$$f^2(x)=|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R} \tag{104}$$

και

$$\lim_{x\to 0} f^2(x)=\lim_{x\to 0}|f(x)|=1. \tag{105}$$

Είναι επίσης γνωστό ότι ισχύουν οι προτάσεις:

- Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. (106)
- Αν $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, (107)

Απόδειξη

- Ισχύει ότι:
  $$|f(x)|\leq|f(x)|\Rightarrow -|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$$
  και αφού $\lim_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.
- Ισχύει ότι: $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=0$.
  Επίσης:
  $$|f(x)|\leq\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow -\sqrt{f^2(x)}\leq f(x)\leq\sqrt{f^2(x)}$$
  και αφού $\lim_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

Ενδιαφέρον είναι ότι οι προτάσεις που διατυπώνονται στις (106), (107) υπάρχουν στις ερωτήσεις κατανόησης του πρώτου κεφαλαίου, ενώ θα ήταν πολύ χρήσιμο να ήταν μέρος της θεωρίας.

Σχόλιο 30: Η πρόταση που διατυπώσαμε στο σχόλιο 29 είναι αντιγραφή από το σχολικό βιβλίο και εμπεριέχει κακή διατύπωση. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με:

$$f(x)=3+\sqrt{x^2-x-2},\ x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty), \tag{108}$$

και

$$g(x)=2-\sqrt{10+9x-x^2},\ x\in A_g=[-1,10]. \tag{109}$$

Τότε:

$$(f+g)(x)=5+\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{10+9x-x^2},\ x\in\{-1\}\cup[2,10]. \qquad (110)$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=3,\ \lim_{x\to -1} g(x)=2, \qquad (111)$$

ενώ το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο -1 δεν ορίζεται!!!

Το πρόβλημα όμως δεν σταματάει εδώ. Επικαλούμενοι τις συναρτήσεις που δίνονται στην (97) και λόγω των (98), (99) τα επιμέρους όρια στο 0^+, αλλά το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο 0^+ δεν είναι ίσο με τη διαφορά των ορίων (είναι απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$). Γιατί υπάρχει το πρόβλημα; Προφανώς διότι τα όρια υπάρχουν, αλλά δεν είναι πραγματικοί αριθμοί…

Με βάση όλα τα παραπάνω η εκφώνηση διορθώνεται συνολικά αν τα δεδομένα της εκφώνησης διατυπωθούν ως εξής: «Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0 , τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί και οι συναρτήσεις ορίζονται στην ίδια περιοχή του x_0, υπάρχουν τα παρακάτω όρια και ισχύουν: …»

Σχόλιο 31: Επίσης γνωρίζουμε ότι (1ο θεώρημα διάταξης):

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0. (112)
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0. (113)

Το αντίστροφο των (112), (113) δεν ισχύει. Συγκεκριμένα ισχύουν ότι:

- Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$. (114)
- Αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\le 0$. (115)

Απόδειξη

Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, οπότε λόγω της (113) έχουμε ότι $f(x)<0$ κοντά στο x_0 που είναι άτοπο, άρα $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η άλλη πρόταση.

Σχόλιο 32: Για τη διάταξη των ορίων (2ο θεώρημα διάταξης) στο σχολικό βιβλίο γράφει ότι αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων των f, g στο x_0

και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Το θεώρημα αυτό ισχύει και αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, αφού:

$$f(x)<g(x)\Rightarrow f(x)\le g(x)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x). \qquad (116)$$

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι το 2ο θεώρημα της διάταξης ισχύει για πεπερασμένα όρια, ενώ δεν ισχύει για μη πεπερασμένα, χωρίς το σχολικό βιβλίο να κάνει αυτή τη διάκριση, όταν αναφέρει ότι για τα μη πεπερασμένα ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πεπερασμένων!!! Για παράδειγμα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^4},\ x\in(0,1)\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}=+\infty. \qquad (117)$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να διατάξουμε τα άπειρα!!! Η παρανόηση αυτή είναι πιθανό να κοστίσει σε καλούς μαθητές σε ερωτήσεις σωστού λάθους, όπως για παράδειγμα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις του 2016 στο Α4. στο β ερώτημα.

Σχόλιο 33: Στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου δεν γίνεται καμία ξεκάθαρη αναφορά στο γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται για ακτίνια και όχι για μοίρες. Η αναφορά αυτή γίνεται στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, θεωρούμε όμως ότι είναι απαραίτητο να υπάρξει μια σημείωση και στο βιβλίο της Γ΄ Λυκείου. Για παράδειγμα αν το x μετριέται σε μοίρες ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^o)}{x}=\frac{\pi}{180}. \qquad (118)$$

Σχόλιο 34: Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, g(x)\ne u_0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$. Είναι εύκολο να αναρωτηθεί κάποιος γιατί η συνθήκη $g(x)\ne u_0$ κοντά στο x_0 είναι απαραίτητη.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=0 \qquad (119)$$

και

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}. \qquad (120)$$

Τότε

$$g\big(f(x)\big)=g\big(0\big)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \tag{121}$$

και

$$\lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big)=\lim_{x\to 0}1=1, \tag{122}$$

ενώ

$$\lim_{u\to 0} g\big(u\big)=\lim_{u\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0. \tag{123}$$

Πρόταση 24: Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\neq 0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}=1$.

Απόδειξη

Για τον υπολογισμό του ορίου θέτουμε $\alpha x = u$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

Πρόταση 25: Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει

- $h(x)<f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Απόδειξη

Αφού $h(x)<f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0,

θα ισχύει και ότι $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0,

οπότε ισχύει και το κριτήριο παρεμβολής.

Πρόταση 26: (Όριο «μηδενικής» επί φραγμένη συνάρτηση.) Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και η συνάρτηση g για την οποία υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|g(x)|\le M$ κοντά στο x_0. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=0$.

Απόδειξη

Για κοντά στο x_0, έχουμε ότι:

$$\left|f(x)\cdot g(x)\right|=\left|f(x)\right|\cdot\left|g(x)\right|\le\left|f(x)\right|\cdot M, \tag{124}$$

οπότε

$$-\left|f(x)\right|\cdot M\le f(x)\cdot g(x)\le\left|f(x)\right|\cdot M. \tag{125}$$

Όμως:

$$\lim_{x\to x_0}\left(-\left|f(x)\right|\cdot M\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\left|f(x)\right|\cdot M\right)=0, \qquad (126)$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0$.

Σχόλιο 35: Είναι γνωστό ότι αν $\alpha>1$ ισχύει $\lim_{x\to 0^+}\log_\alpha x=-\infty$ και αν $0<\alpha<1$ ισχύει $\lim_{x\to 0^+}\log_\alpha x=+\infty$. Γιατί αυτά τα όρια να υπάρχουν στην παράγραφο 1.7 που αφορά τα όρια στο άπειρο και όχι στην 1.6, που αφορά τα μη πεπερασμένα όρια στο x_0;

Σχόλιο 36: Είναι γνωστό ότι για να βρούμε το όριο στο άπειρο μιας ρητής συνάρτησης μπορούμε «νομίμως» να πάρουμε το όριο του πηλίκου που προκύπτει από τον μεγιστοβάθμιο όρο του αριθμητή και τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή. Ακριβώς η ίδια λογική ισχύει και όταν το κλάσμα έχει όρους με ρίζες και υπόρριζες ποσότητες πολυώνυμα. Ο μαθητής όμως δεν μπορεί να επικαλεστεί το ίδιο επιχείρημα. Για παράδειγμα ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \qquad (127)$$

θα ήταν πάρα πολύ εύκολος…

Πρόταση 27: Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ δεν έχουν όριο στα $\pm\infty$.

Απόδειξη

Έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ υπάρχει.

Αφού $-1\le\eta\mu x\le 1, x\in\mathbb{R}$ το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ δεν θα είναι $\pm\infty$, αλλά ένας πραγματικός αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}\eta\mu x=\alpha. \qquad (128)$$

Τότε

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\eta\mu x=\lim_{x\to+\infty}\left[-\eta\mu(x+\pi)\right]=-\lim_{x\to+\infty}\eta\mu(x+\pi) \qquad (129)$$

και θέτοντας $u=x+\pi$ βρίσκουμε

$$\alpha=-\lim_{u\to+\infty}\eta\mu u=-\alpha, \qquad (130)$$

οπότε

$$\alpha = 0, \tag{131}$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = 0. \tag{132}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = \lim_{x\to+\infty}\left[-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] = -\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \tag{133}$$

και θέτοντας $u = x + \dfrac{\pi}{2}$ βρίσκουμε

$$0 = -\lim_{u\to+\infty} \sigma\upsilon\nu u, \tag{134}$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0. \tag{135}$$

Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \eta\mu^2 x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x = 0, \tag{136}$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right) = 0 + 0 = 0, \tag{137}$$

που είναι άτοπο, αφού $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, οπότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$.
Ομοίως αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα.

Πρόταση 28: Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

- $f(x) \le g(x)$ για κάθε x κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

τότε $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Απόδειξη

Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Συνεπώς για κοντά στο x_0, έχουμε

$$0 < f(x) \le g(x) \Rightarrow 0 \le \frac{1}{g(x)} \le \frac{1}{f(x)}. \tag{138}$$

Όμως:

$$\lim_{x\to x_0} 0 = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0, \tag{139}$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0. \qquad (140)$$

Αφού $g(x)>0$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty. \qquad (141)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η πρόταση:
Πρόταση 29: Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

- $f(x)\le g(x)$ για κάθε x κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και
- $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Οι προτάσεις (28), (29) από το σχολικό έτος 2016-2017 μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές χωρίς απόδειξη.

Σχόλιο 37: Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι υπάρχει η υποενότητα για τις ακολουθίες στην παράγραφο 1.7. Αυτή η ενότητα «ξεφυτρώνει» ξαφνικά στο σχολικό βιβλίο. Προφανώς και οι ακολουθίες έχουν άμεση σχέση με τις συναρτήσεις και με τα όρια στο $+\infty$. Η χρησιμότητα των ακολουθιών είναι δεδομένη στα μαθηματικά (π.χ. αποδεικνύεις πολύ εύκολα ότι δεν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης με τη χρήση υπακολουθιών), ο τρόπος όμως που παρουσιάζεται η ενότητα «αυτοαχρηστεύει» την έννοια της ακολουθίας. Επιπλέον δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές το πώς μπορούμε να βρούμε όριο μιας ακολουθίας στο $+\infty$, αφού δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ που να ορίζεται η ακολουθία...

Συνέχεια συνάρτησης

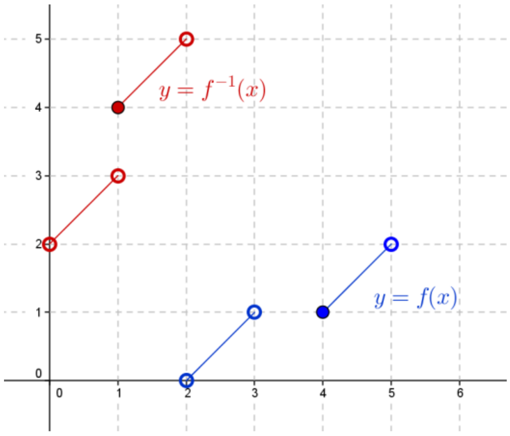
Σχόλιο 38: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$ στο σύνολο Α, τότε η f^{-1} δεν είναι απαραίτητα συνεχής στο $f(A)$.
Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x\in(2,3) \\ x-3, & x\in[4,5) \end{cases}. \qquad (142)$$

Η f είναι $1-1$ στο $A=(2,3)\cup[4,5)$ με $f(A)=(0,2)$ και

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+2, & x\in(0,1) \\ x+3, & x\in[1,2) \end{cases}. \tag{143}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο A, ενώ η f^{-1} δεν είναι συνεχής στο $f(A)$.



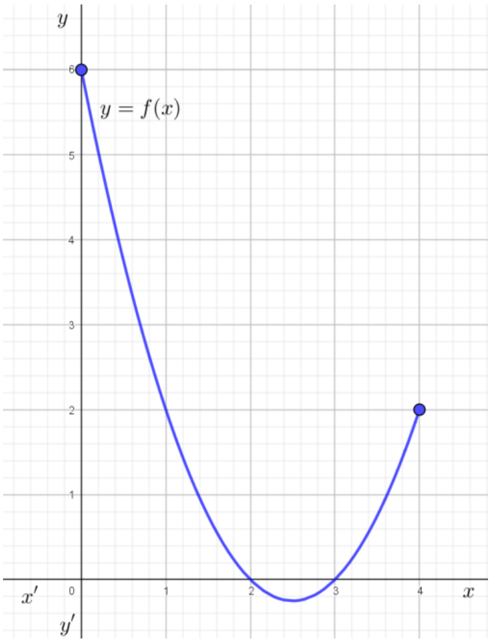
Σχήμα 8: Η γραφική παράσταση της f και της f^{-1}

Σχόλιο 39: Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$. Για την πρόταση αυτή δεν υπάρχει κάποια σχολική απόδειξη, θεωρούμε όμως ότι η ύπαρξή της στο σχολικό βιβλίο είναι αναγκαία. Μάλιστα στο παρελθόν στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2003 στο τρίτο θέμα ήταν άγραφη προϋπόθεση η συνέχεια της αντίστροφης για τον υπολογισμό του εμβαδού.

Σχόλιο 40: Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται καμία αναφορά στο γεγονός ότι το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Ειδικά στο θεώρημα Bolzano είναι εύκολο να αναδειχθεί και η αναγκαιότητα της απαίτησης για συνέχεια σε κλειστό διάστημα. Αναφορές στη συνάρτηση f με

$$f(x)=x^2-5x+6,\ x\in[0,4], \tag{144}$$

αλλά και στη γραφική της παράσταση θα ήταν πολύ χρήσιμες.



Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in [0, 4]$.

Πρόταση 30: Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τα όρια στα α και β υπάρχουν και είναι ετερόσημα (ακόμα και άπειρο), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τις περιπτώσεις:

Αν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) < 0$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) > 0$ ή $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχουν $k, m \in (\alpha,\beta)$ με $\alpha < k < m < \beta$ έτσι, ώστε $f(k) < 0$, $f(m) > 0$. Συνεπώς στο διάστημα $[k, m]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(k, m) \subseteq (\alpha, \beta)$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).

Πρόταση 31: Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(\alpha)f(\beta) \le 0$, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[\alpha,\ \beta]$.

Απόδειξη

Αφού $f(\alpha) f(\beta) \le 0$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).
- Αν $f(\alpha)f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha$ ή β ρίζες της $f(x)=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $[\alpha,\ \beta]$.

<u>Πρόταση 32</u>: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο Δ.
<u>Απόδειξη</u>
Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε μόνο θετική ούτε μόνο αρνητική στο Δ, οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $f(x_1)<0$ και $f(x_2)>0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $x_1<x_2$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq\Delta$ (αφού είναι συνεχής στο Δ) και ισχύει $f(x_1)f(x_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f στο (x_1,x_2) άρα και στο Δ, κάτι που είναι άτοπο αφού η f δεν μηδενίζεται στο Δ. Επομένως η συνάρτηση f είναι μόνο θετική ή μόνο αρνητική στο Δ.

<u>Πρόταση 33</u>: Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
<u>Απόδειξη</u>
Σύμφωνα με την πρόταση 32 αν το διάστημα Δ είναι της μορφής $(-\infty,x_1)$ ή (x_2,x_3) ή $(x_4,+\infty)$ όπου x_1,x_2,x_3,x_4 είναι ρίζες της συνάρτησης f και δεν περιέχεται άλλη ρίζα στο καθένα από αυτά, τότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά.

<u>Πρόταση 34</u>: Αν η συνάρτηση $f:A\to f(A)$ είναι $1-1$ και συνεχής, να αποδείξετε ότι είναι και γνησίως μονότονη.
<u>Απόδειξη</u>
Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma\in A$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ώστε $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\beta)>f(\gamma)$.

- Αν $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta)$, τότε $\eta = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \in \big(f(\alpha), f(\beta)\big) \subseteq \big(f(\gamma), f(\beta)\big)$.
  Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ ώστε $f(\xi_1)=\eta$ και $f(\xi_2)=\eta$, απορρίπτεται, αφού η f είναι $1-1$.
- Αν $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, τότε $\eta = \dfrac{f(\gamma)+f(\beta)}{2} \in \big(f(\gamma), f(\beta)\big) \subseteq \big(f(\alpha), f(\beta)\big)$.
  Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ ώστε $f(\xi_1)=\eta$ και $f(\xi_2)=\eta$, απορρίπτεται, αφού η f είναι $1-1$.
- Η περίπτωση $f(\alpha)=f(\gamma)$, απορρίπτεται, αφού η f είναι $1-1$.

Επομένως έχουμε άτοπο, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

<u>Πρόταση 35</u>: Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και **μη σταθερής** συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[\alpha,\beta]$, είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου M είναι η μέγιστη τιμή και m η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

<u>*Απόδειξη*</u>

- Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=y \notin [m,M]$. Αυτό σημαίνει είτε ότι το m δεν είναι το ελάχιστο (αν $y<m$), είτε ότι το M δεν είναι μέγιστο (αν $y>M$), κάτι που είναι άτοπο, άρα όλες οι τιμές της συνάρτησης f βρίσκονται στο διάστημα $[m,M]$.
- Αφού το M είναι η μέγιστη τιμή και το m η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $f(x_1)=m, f(x_2)=M$.
  Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $x_1 < x_2$.
  Έστω τυχαίο $\eta \in (m,M)$.
  Τότε αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1,x_2] \subseteq [\alpha,\beta]$, με $f(x_1) \neq f(x_2)$ και το $\eta \in \big(f(x_1), f(x_2)\big)$, οπότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\eta$.

Συνεπώς αποδείξαμε ότι κάθε x του πεδίο ορισμού $[\alpha,\beta]$ αντιστοιχίζεται σε y του $[m,M]$ και ότι κάθε y του $[m,M]$ προέρχεται από κάποιο x του $[\alpha,\beta]$, οπότε και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

<u>*Να σημειώσουμε ότι στο σχολικό βιβλίο υπάρχει σχόλιο στο οποίο δεν διακρίνεται η περίπτωση της μη σταθερής συνάρτησης!!!*</u>

Σχόλιο 41: Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται το σύνολο τιμών μια συνεχούς συνάρτησης f που είναι γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής (α,β), $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$. Η πρόταση αυτή ισχύει και όταν τα άκρα α, β είναι $-\infty$, $+\infty$ αντίστοιχα. Είναι μια ουσιώδης επισήμανση που δεν γίνεται στο σχολικό βιβλίο.

Πρόταση 36: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) και τα όρια στα α, β είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = y_0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - y_0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$.

Τότε:

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} g(x) = +\infty$,

οπότε υπάρχουν $\kappa,\lambda \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\kappa) < 0, f(\lambda) > 0$.

Επιπλέον έχουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda] \subseteq (\alpha,\beta)$ και $f(\kappa)f(\lambda) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\kappa,\lambda) \subseteq (\alpha,\beta)$ της εξίσωσης $g(x) = 0$, δηλαδή

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$.

Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που θεμελιώνεται σταδιακά. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να αποκομίζουν αυτή τη γνώση από το σχολείο. Είναι αναγκαία η δόμηση της προσφερόμενης μαθηματικής ύλης, ίσως και από μικρότερες τάξεις, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρουσιάζει συνοχή. Η μη αναφορά βασικών γνώσεων και προτάσεων μόνο κακό κάνει στα μαθηματικά. Ο «χαρακτηρισμός» βασικών προτάσεων ως «απαγορευμένες» (οπότε η χρήση τους είναι στη «μαύρη αγορά») δημιουργεί πολλούς κινδύνους στη βαθμολόγηση γραπτών και βλάπτει τον επιθυμητό από τους περισσότερους, ενιαίο και αμερόληπτο χαρακτήρα της. Γι’ αυτό πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία πρέπει να δίνουν τα απαραίτητα εφόδια στον οποιοδήποτε να πετύχει το σκοπό του. Σε αυτά στηρίζεται το τρίτο μέρος της πρότασής μας για το σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βλάμος Π. (1997). *Όριο και συνέχεια συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".

Δαμβακάκις Γ., Κτιστάκης . Ν, Λάμπρου Μ., Σπανουδάκης Κ. Ν., (2008). *Επαναληπτικά θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου,* Εκδόσεις Καγκουρό Ελλάς.

Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος Ι*, Πρακτικά 9ης διεθνούς μαθηματικής εβδομάδας, σελ. 463-474.

Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος ΙΙ*, Πρακτικά 34ου συνεδρίου της ΕΜΕ, σελ. 492-504.

Μάστακας Π., Γαρατζιώτης Ι. (2008). *Μαθηματικά για τη θετική-τεχνολογική κατεύθυνση Γ΄ Λυκείου, Α΄ τόμος*, εκδόσεις Κέδρος.

Μπουνάκης Δ. (2009). Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, *Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, συναρτήσεις-όρια-συνέχεια*, Ηράκλειο.

Ντζιώρας Β. Ηλ. (1993). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ΄ Λυκείου, Α΄ τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.

Ντζιώρας Β. Ηλ. (1996). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ΄ Λυκείου, Β΄ τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.

Ντζιώρας Β. Ηλ. (1995). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ΄ Λυκείου, Γ΄ τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.

Υ.Π.Ε.Θ., (2017), Διαχείριση της Διδακτέας - Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και της Δ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολ. έτος 2017–2018, 163573/Δ2/2-10-17.

Παντελίδης Ν. Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου*, εκδόσεις Ζήτη.

Spivak M. (1999), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Σπαθάρας Δ. (2016). Μαθηματικά Γ΄ τάξης ΓΕΛ, *Κατανοώντας βαθύτερα το σχολικό βιβλίο και γνωρίζοντας λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξουμε*, τεύχος 1ο.