

Άρθρο στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Η ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και η χρήση της στην εύρεση ακροτάτων .

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός , Ιούνιος 2008

A. Εισαγωγή

Το κείμενο αυτό ξεκίνησε να γράφεται με αφορμή το φετινό θέμα (Μάιος 2008) στις πανελλαδικές εξετάσεις , στο οποίο ζητούνταν μεταξύ των άλλων και η **ελάχιστη** τιμή του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών , από τους οποίους ο ένας έγραφε ένα κύκλο και ο άλλος μια ευθεία.

Έχουμε επισημάνει και αλλού και μάλιστα από καιρό ότι η ελάχιστη τιμή E και η μέγιστη τιμή M μιας παράστασης με μιγαδικούς (αν υπάρχουν), που περιέχει μέτρα , δεν εξασφαλίζεται από τη χρήση και μόνο της βασικής ανισότητας

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (***)$$

αλλά πρέπει να γίνει επαλήθευση αν η παράσταση μπορεί πράγματι να πάρει τις ακραίες αυτές τιμές (εκτός και αν γίνει χρήση βασικών γεωμετρικών προτάσεων και συγκεκριμένα ορισμένων γνωστών γεωμετρικών ανισοτήτων). Φαίνεται όμως ότι η λεπτή αυτή επισήμανση δεν έγινε αρκούντως αντιληπτή από τους μαθητές , με αποτέλεσμα στην διόρθωση των γραπτών να χαθούν μερικές πολύτιμες , έστω και λίγες , μονάδες. Το θέμα βέβαια το είχαμε συζητήσει κατά τη διάρκεια του χειμώνα και στο δικτυακό τόπο **mathematica** με αρκετούς και εκλεκτούς συναδέλφους , όπου μάλιστα παρουσιάσαμε και παραδείγματα για τον τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων ασκήσεων .

B. Γενικές επισημάνσεις.

Γενικά, αν οι εικόνες των μιγαδικών α, β κινούνται πάνω σε καθορισμένες γραμμές ή ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς , τότε μια παράσταση $f(\alpha, \beta)$ που έχει μιγαδικές μεταβλητές α, β και τιμές πραγματικές ενδέχεται να λαμβάνει δύο ακρότατες τιμές , πιθανόν όμως να λαμβάνει μόνο μέγιστο ή μόνο ελάχιστο ή ακόμα η παράσταση αυτή μπορεί να μην έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ,αν και

μπορεί να είναι φραγμένη . Αυτό που θέλουμε να τονίσουμε με το παρόν άρθρο είναι το γεγονός ότι η χρήση της ανισότητας

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

ναι μεν μας βοηθάει να βρούμε φράγματα (αν υπάρχουν) για την παράσταση $f(\alpha, \beta)$, αλλά δεν μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτων , δηλαδή ελαχίστου ή μεγίστου , με την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχουν τέτοιες τιμές.

Έτσι , πιο γενικά , αν καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα της μορφής

$$E \leq f(\alpha, \beta, \gamma, \dots, z) \leq M \quad (1),$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τη βασική ανισότητα (***) , τότε δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι το μέγιστο της παράστασης αυτής είναι το M και το ελάχιστο είναι το E . Για να καταλήξουμε με βεβαιότητα σε αυτό το συμπέρασμα πρέπει απαραίτητα να βρούμε τιμές για τις μεταβλητές $\alpha, \beta, \dots, z$ που να ικανοποιούν μεν τους αντίστοιχους περιορισμούς (συνθήκες) , αλλά συγχρόνως η παράσταση f να δίνει στην (1) τη μια φορά την τιμή M και την άλλη την τιμή E . Πρέπει ωστόσο να επισημάνουμε από την αρχή ότι σε μερικές περιπτώσεις η ανισότητα

$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ μας οδηγεί όντως στις ακρότατες τιμές(ελάχιστο ή μέγιστο) και το μόνο που απομένει είναι η επαλήθευση. Σε πολλές όμως περιπτώσεις που είναι και οι πιο ενδιαφέρουσες, οι τιμές E και M δεν είναι το ελάχιστο ή το μέγιστο αντίστοιχα , αλλά είναι τελείως παραπλανητικές. Έτσι , η εύρεση του ελαχίστου ή του μεγίστου για το K πρέπει να γίνει είτε γεωμετρικά είτε με άλλον αλγεβρικό τρόπο .

Αλλά και η γεωμετρική (εποπτική μεν αλλά θεωρητικά κατοχυρωμένη) προσέγγιση μπορεί καμιά φορά να μας οδηγήσει σε πλάνη, κυρίως όταν οι μεταβλητές της παράστασης βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση . Ως εκ τούτου φαίνεται ότι **η επαλήθευση, όπου αυτή δεν είναι ιδιαίτερα δυσχερής , είναι η ασφαλέστερη μέθοδος για τον εντοπισμό των ακρότατων τιμών μιας παράστασης με μιγαδικές μεταβλητές και μέτρα** , πριν καταλήξουμε στην διατύπωση του τελικού συμπεράσματος..

Για να δείξουμε αυτή την αναγκαιότητα , θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Γ. Εφαρμογές

Άσκηση 1^η

Αν ο αριθμός z είναι μιγαδικός και ισχύει $|z - 3 - 4i| = 3$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

Λύση

Αυτή είναι η πιο απλή περίπτωση που μπορούμε να συναντήσουμε. Σύμφωνα με τη ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ έχουμε :

$$|z| - |3 + 4i| \leq |z - (3 + 4i)| \leq |z - 3 - 4i| = 3,$$

οπότε

$$|z| - 5 \leq 3 \Leftrightarrow |z| \leq 3 + 5 \Leftrightarrow |z| \leq 8$$

Φαίνεται λοιπόν ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το 8, αλλά πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για αυτό; Ένας τρόπος είναι να ψάξουμε να βρούμε έναν αριθμό z_1 που να ικανοποιεί τη σχέση $|z - 3 - 4i| = 3$ και συγχρόνως να είναι $|z_1| = 8$. Ο καλύτερος όμως τρόπος είναι προσφύγουμε στη γεωμετρική μέθοδο και να χαράξουμε το σχήμα, βασιζόμενοι σε γνωστές γεωμετρικές προτάσεις. Η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 3$. Εύκολα βλέπουμε ότι το πιο απομακρυσμένο σημείο του κύκλου από την αρχή O βρίσκεται στην ευθεία OK και απέχει από το O απόσταση

$$d = OK + \rho = 5 + 3 = 8$$

Επομένως η μέγιστη τιμή για το $|z|$ είναι ίση με 8.

Επίσης από την ίδια ανισότητα παίρνουμε

$$|3 + 4i| - |z| \leq |z - (3 + 4i)| \leq |z - 3 - 4i| = 3$$

οπότε :

$$|z| \geq |3 + 4i| - 3 \Leftrightarrow |z| \geq 5 - 3 \Leftrightarrow |z| \geq 2$$

Και εδώ φαίνεται πώς η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι το 2, αλλά η απόδειξη δεν είναι επαρκής. Ή πρέπει να βρούμε μιγαδικό z_1 που να επαληθεύει τη σχέση

$|z - 3 - 4i| = 3$ και συγχρόνως να είναι $|z_1| = 2$ ή να χρησιμοποιήσουμε όπως και πριν το σχήμα και να διαπιστώσουμε ότι πράγματι η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ είναι

$$d = OK - \rho = 5 - 3 = 2$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ είναι ίση με 2.

Σχόλιο

Όπως φάνηκε στην άσκηση αυτή, η ανισότητα οδήγησε στην ελάχιστη και μέγιστη τιμή, αλλά χρειάστηκε επαλήθευση είτε αλγεβρική είτε γεωμετρική, κάτι που πάντα είναι απαραίτητο. **Επισημαίνουμε ότι ακόμα και στη γεωμετρική προσέγγιση πρέπει να βασιστούμε σε γεωμετρικές προτάσεις και όχι απλά μόνο στην εποπτεία.**

Στην επόμενη άσκηση θα δούμε ότι η ανισότητα δεν οδηγεί στην ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή και τα αποτελέσματα είναι τελείως παραπλανητικά.

Άσκηση 2^η

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $|z - 3 + 4i| \leq 2$ και η παράσταση

$$A(z) = |z - 3 - 4i|$$

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση.

β) Τι εκφράζει γεωμετρικά η παράσταση $A(z)$;

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A(z)$.

Υπόδειξη

α) Είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο $K(3, -4)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $\Lambda(3, 4)$

γ) Η βασική ανισότητα

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w| \quad (1)$$

δίνει :

$$|z - (3 - 4i)| \leq |z| + |(3 - 4i)| \leq 2 + 5 = 7 \quad (2)$$

Άρα

$$A(z) = |z - 3 - 4i| \leq |z| + |3 + 4i| \leq 7 + 5 = 12 \quad (3)$$

Ωστόσο η τιμή 12 δεν είναι η μέγιστη, κάτι που δείχνει η γεωμετρική λύση της άσκησης. Η μέγιστη τιμή είναι 10. Που βρίσκεται άραγε το λάθος το λάθος; Την απάντηση θα τη δούμε στο γενικό σχόλιο στο τέλος αυτού του άρθρου.

Σχόλιο

Μπορούμε να γράψουμε :

$$A(z) = |z - 3 - 4i| = |(z - 3 + 4i) - 8i| \leq |z - 3 + 4i| + |8i| \leq 2 + 8 = 10 \quad (4)$$

Βλέπουμε τώρα ότι η μέγιστη τιμή που δίνει η σχέση (4) είναι η σωστή, αν και χρησιμοποιήσαμε την ίδια ανισότητα (την (1)). Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Η απάντηση βασίζεται στο γεγονός ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z - 3 + 4i$ και $8i$ μπορούν να βρεθούν στην ίδια ευθεία με την αρχή O , για κάποια κατάλληλη θέση της εικόνας του z στον κύκλο με κέντρο $K(3, -4)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Απάντηση : $\max A(z) = 10$ και $\min A(z) = 6$

Άσκηση 3^η

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z - 3 + 4i| \leq 2$, $|z - 3 - 4i| \leq 3$ καθώς και η παράσταση

$$A = |z - w|$$

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z, w που ικανοποιούν τις δοσμένες σχέσεις.

β) Τι εκφράζει γεωμετρικά η παράσταση $A = |z - w|$;

γ) Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 7$, $|w| \leq 8$ και να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = |z - w|$

Υπόδειξη

α) Είναι οι κυκλικοί δίσκοι (K, ρ) και (Λ, R) με

$$K(3, -4), \Lambda(3, 4), \rho = 2 \text{ και } R = 3$$

β) Την απόσταση των εικόνων των δύο μιγαδικών z και w που βρίσκονται ο ένας στον κύκλο K και ο άλλος στον κύκλο Λ .

γ) Η λύση για την εύρεση της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής είναι προτιμότερο να γίνει γεωμετρικά. Χαράζοντας τους κύκλους αυτούς βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης A είναι

$$A_{\max} = K\Lambda + \rho + R = 8 + 2 + 3 = 13$$

Ας προσέξουμε ότι η βασική ανισότητα δίνει:

$$|z| - |3 - 4i| \leq |z + (3 - 4i)| \leq 2, \text{ οπότε } |z| \leq 5 + 2 = 7$$

και

$$|w| - |3 + 4i| \leq |w + (3 + 4i)| \leq 3, \text{ οπότε } |w| \leq 5 + 3 = 8$$

Επομένως

$$A = |z - w| \leq |z| + |w| \leq 7 + 8 = 15$$

Το 15 όμως απέχει σημαντικά από το πραγματικό μέγιστο της παράστασης A που είναι το 13.

Γιατί όμως προκύπτει αυτή η διαφορά ; Η απάντηση είναι παρόμοια με αυτή που δόθηκε στην προηγούμενη άσκηση.

Η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι

$$A_{\max} = K\Lambda - \rho - R = 8 - 2 - 3 = 5$$

Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε εποπτικά, χαράσσοντας τους αντίστοιχους κυκλικούς δίσκους.

Άσκηση 4^η

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $(i\bar{z} + 6)w = 3z + 2i$. Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 2$ τότε :

- α)** να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r = 1$
- β)** να υπολογίσετε την ελάχιστο και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

Λύση:

α) Είναι $|z| = 2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$, τότε $|w| = \left| \frac{3z + 2i}{i\bar{z} + 6} \right| = \left| \frac{3z + 2i}{i\frac{4}{z} + 6} \right| = \left| \frac{3z + 2i}{\frac{6z + 4i}{z}} \right| = \dots = 1$

- β)** Παρά το ότι με μια πρόχειρη γεωμετρική ερμηνεία φαίνεται, ότι $1 \leq |z - w| \leq 3$, δεν είναι έτσι αφού:

$$|z - w| = \left| z - \frac{3z + 2i}{i\bar{z} + 6} \right| = \left| \frac{iz\bar{z} + 6z - 3z - 2i}{i\bar{z} + 6} \right| = \left| \frac{3z + 2i}{i\bar{z} + 6} \right| = |w| = 1$$

που σημαίνει ότι $|z - w|_{\min} = |z - w|_{\max} = 1$

Σχόλιο

Στην άσκηση αυτή τόσο η αλγεβρική προσέγγιση με την ανισότητα όσο και η γεωμετρική λύση οδηγούν σε τελείως εσφαλμένα συμπεράσματα, διότι οι μιγαδικοί

z, w βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση και έτσι δεν μπορούν να βρεθούν συγχρόνως στις κατάλληλες θέσεις ώστε να προκύψουν γεωμετρικά η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή για την απόστασή τους. Πιο συγκεκριμένα, οι εικόνες των μιγαδικών αυτών βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το O και έτσι ποτέ δεν μπορούν να απέχουν 3 ή 1, παρά όσο η διαφορά των ακτίνων τους, δηλαδή 1.

Άσκηση 5^η

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ και $|z| = 1$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του w .

β) Να αποδείξετε ότι $|z-w| \leq 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K = |w-z|$

Λύση

α) Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι αφού $|z| = 1$, ο w ορίζεται για όλες τις τιμές του z που οι εικόνες τους βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο (ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνο για $z = -2i$, τιμή που απορρίπτεται διότι δεν έχει μέτρο 1).

Επειδή $|z|=1$, είναι επίσης $\bar{z} = \frac{1}{z}$, οπότε :

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}+i}{2-iz} = \frac{\frac{2}{z}+i}{2-\frac{i}{z}} = \frac{2+iz}{2z-i} = \frac{1}{w}$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $|w| = 1$, που σημαίνει ότι η εικόνα N του w γράφει τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή τον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 1$

β) Είναι

$$|z-w| \leq |z| + |w| = 1+1=2$$

γ) Είναι $|z-w| \leq 2$. Αλλά για να έχουμε ισότητα πρέπει οι z, w να είναι αντίθετοι, δηλαδή πρέπει $w = -z$. Η εξίσωση όμως αυτή είναι αδύνατη, οπότε το μέγιστο δεν είναι το 2.

Στην πιθανή μέγιστη τιμή 2 μπορούμε να φτάσουμε επίσης παρατηρώντας ότι οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων M, N των z, w αντίστοιχα ταυτίζονται και μάλιστα είναι οι μοναδιαίοι κύκλοι. Η μέγιστη λοιπόν τιμή του $K = |w-z|$ θα περίμενε κανείς να είναι το μήκος μιας διαμέτρου, δηλαδή 2. Τα συμπεράσματα όμως αυτά

είναι παραπλανητικά, διότι, όπως έχουμε ξαναπεί, τα σημεία M, N αλληλεξαρτώνται και δεν μπορούν να βρεθούν σε αντιδιαμετρικές θέσεις. Την μέγιστη τιμή πρέπει επομένως να αναζητήσουμε με άλλον τρόπο.

Είναι

$$K = |w - z| = \left| \frac{2z - i}{2 + iz} - z \right| = \left| -\frac{i(z^2 + 1)}{2 + iz} \right| = \left| \frac{z^2 + 1}{2 + iz} \right|$$

Θέτουμε $z = x + yi$, οπότε μετά την αντικατάσταση, την εφαρμογή του ορισμού του μέτρου και την εκτέλεση των πράξεων παίρνουμε:

$$K = |w - z| = \left| \frac{z^2 + 1}{2 + iz} \right| = \sqrt{\frac{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}{(2 - y)^2 + x^2}} = 2\sqrt{\frac{1 - y^2}{5 - 4y}}$$

Στην πορεία χρησιμοποιήσαμε και τις σχέσεις

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 = 1 - y^2$$

και προαιρετικά $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 2x^2y^2$

Με τη βοήθεια των παραγώγων βρίσκουμε ότι η συνάρτηση

$$f(y) = \frac{1 - y^2}{5 - 4y} \quad \text{με } y \in [-1, 1]$$

έχει παράγωγο

$$f'(y) = \frac{4(2y^2 - 5y + 2)}{(5 - 4y)^2} = \frac{8(y - 2)(y - \frac{1}{2})}{(5 - 4y)^2}$$

οπότε στο $y \in [-1, 1]$ έχει ελάχιστη τιμή το 0 (για $y = 1$ και $y = -1$) και μέγιστη τιμή για $y = \frac{1}{2}$ την $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Επομένως η παράσταση

$$K = |w - z| = 2\sqrt{\frac{1 - y^2}{5 - 4y}} = 2\sqrt{f(y)}$$

έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη το 1.

♦ Την ελάχιστη τιμή την έχουμε για $z = \pm i$, διότι για $y = 1$ ή $y = -1$, η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ δίνει $x = 0$.

♦ Τη μέγιστη τιμή την έχουμε για $z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$, διότι για $y = \frac{1}{2}$ η σχέση

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ δίνει } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άσκηση 6^η

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z-i}{1+iz}$ και $|z| = 1$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του w .

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K = |w - z|$

Υπόδειξη

α) Όπως και στην άσκηση 5 βρίσκουμε ότι η εικόνα του w γράφει τον κύκλο

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

β) Απλή εφαρμογή της βασικής ανισότητας.

γ). Ελάχιστο είναι το μηδέν, αλλά δεν υπάρχει μέγιστο. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$K = |w - z| = \left| \frac{z^2 + 1}{1 + iz} \right| = \dots = 2\sqrt{\frac{1+y}{2}}$$

με $y \in [-1, 1)$. Άρα τη παράσταση K παίρνει μόνο τις τιμές του διαστήματος $[0, 2)$ και έτσι δεν έχει μέγιστο.

Ασκήσεις για εξάσκηση
Άσκηση 7^η

Δίνονται οι μεταβλητοί μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z| = 4$ και $w = z + \frac{4}{z}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z .

β) Να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 5$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του w

δ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 9$

ε) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

Υπόδειξη

α) Ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 4$

β) Είναι

$$|z| - \left| \frac{4}{z} \right| \leq \left| z + \frac{4}{z} \right| \leq |z| + \left| \frac{4}{z} \right| \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{4} \leq |w| \leq 4 + 1$$

διότι $|\bar{z}| = |z| = 4$

γ) Είναι η έλλειψη με εξίσωση

$$(C): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

δ) Είναι

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq 4 + 5 = 9$$

ε) Είναι

$$|w - z| = \dots = \left| \frac{4}{z} \right| = 1$$

δηλαδή η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι 1 και όχι 0 ή 9 αντίστοιχα που δείχνει η γεωμετρική εποπτεία !

Άσκηση 8^η

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|z| = 1$ και $w = -z$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του w .

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z - w|$

δ) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z|=1\}, \quad B = \{w \in \mathbb{C} / w = -z \text{ και } z \in A\}$$

Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = |\alpha - \beta| \text{ με } \alpha \in A \text{ και } \beta \in B$$

Υπόδειξη

α) Ο μοναδιαίος κύκλος

β) Με χρήση της βασικής ανισότητας.

γ) Είναι πάντα $A = 2$, οπότε η ελάχιστη τιμή δεν είναι 0, όπως δείχνει η εποπτεία, αλλά 2.

δ) Στην περίπτωση αυτή η γεωμετρική απεικόνιση των συνόλων A και B δείχνει καθαρά ότι η ελάχιστη τιμή του K είναι 0 και η μέγιστη είναι 2.

Άσκηση 9^η

Δίνονται οι μιγαδικοί α, β με $|\alpha| = 3$ και $|\beta| = 4$ καθώς και η παράσταση

$$A(\alpha, \beta) = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|$$

α) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 4i$, να αποδείξετε ότι $|\alpha^2 - \beta^2| = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

β) Να αποδείξετε ότι $6 \leq A(\alpha, \beta) \leq 14$

γ) Να αποδείξετε ότι :

$$A(\alpha, \beta) = \sqrt{50 + 2|\alpha^2 - \beta^2|}$$

δ) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $A(\alpha, \beta)$ και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τα αποτελέσματα του ερωτήματος β). Τι παρατηρείτε και πώς ερμηνεύετε τις διαφορετικές τιμές που προκύπτουν ;

Υπόδειξη

α) Είναι απλή αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων.

β) Είναι

$$\blacklozenge \quad |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 3 + 4 = 7 \quad \text{και} \quad \blacklozenge \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = 3 + 4 = 7$$

Επομένως $A(\alpha, \beta) \leq 7 + 7 = 14$. Επίσης είναι :

$$A(\alpha, \beta) = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| \geq |(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)| = |2\alpha| = 2|\alpha| = 6$$

γ) Υψώνουμε στο τετράγωνο τη δοσμένη παράσταση και χρησιμοποιούμε την βασική ιδιότητα του μέτρου : $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

δ) Είναι

$$|\alpha^2 - \beta^2| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 9 + 16 = 25$$

με ισότητα πχ για $\alpha = 3$ και $\beta = 4i$, σύμφωνα με το ερώτημα α). Άρα η μέγιστη τιμή για την παράσταση $A(\alpha, \beta)$, όπως προκύπτει από το ερώτημα γ) είναι η

$$A_{\max} = \sqrt{50 + 2 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$$

Ανάλογα είναι :

$$|\alpha^2 - \beta^2| \geq |\beta|^2 - |\alpha|^2 = 16 - 9 = 7$$

με ισότητα για πχ $\alpha = 3$ και $\beta = 4$. Επομένως η ελάχιστη τιμή για την παράσταση $A(\alpha, \beta)$, όπως προκύπτει από το ερώτημα γ) είναι

$$A_{\min} = \sqrt{50 + 2 \cdot 7} = \sqrt{64} = 8$$

Γενικό σχόλιο

Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί, μη μηδενικοί. Με εφαρμογή της βασικής ιδιότητας του μέτρου $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ αποδεικνύεται ότι :

i) $|z + w| = |z| + |w|$, αν και μόνο αν οι εικόνες O, M, N των μιγαδικών $0, z, w$ αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα το O δεν είναι μεταξύ των M, N , δηλαδή όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ είναι ομόρροπα.

ii) $|z - w| = |z| + |w|$, αν και μόνο αν οι εικόνες O, M, N των μιγαδικών $0, z, w$ αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα όταν το O είναι μεταξύ των M, N . Με άλλα λόγια, όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ είναι αντίρροπα.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις που

$$|z - w| = ||z| - |w|| \text{ ή } |z + w| = ||z| - |w||$$

Με βάση λοιπόν αυτές τις παρατηρήσεις εξηγούνται τα διαφορετικά αποτελέσματα στα οποία οδηγούν οι διαφορετικές προσεγγίσεις σε ορισμένες από τις ασκήσεις που προηγήθηκαν.

Σημείωση :

Ευχαριστώ το συνάδελφο **Αντώνη Κυριακόπουλο** για μερικές πολύ βασικές παρεμβάσεις στο παραπάνω κείμενο καθώς και τον καθηγητή κύριο **Μ. Λάμπρου** από το πανεπιστήμιο Κρήτης που διάβασε το κείμενο και διόρθωσε ορισμένες αβλεψίες.