

‘ Α σ κ η σ η

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν:

$$|(1+i)z - 2 - 4i| = \sqrt{18} \quad \text{και} \quad w = 2z - 11 + 5i$$

Να βρείτε:

- Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
- Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$
- Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w
- Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

Λ ύ σ η

i.

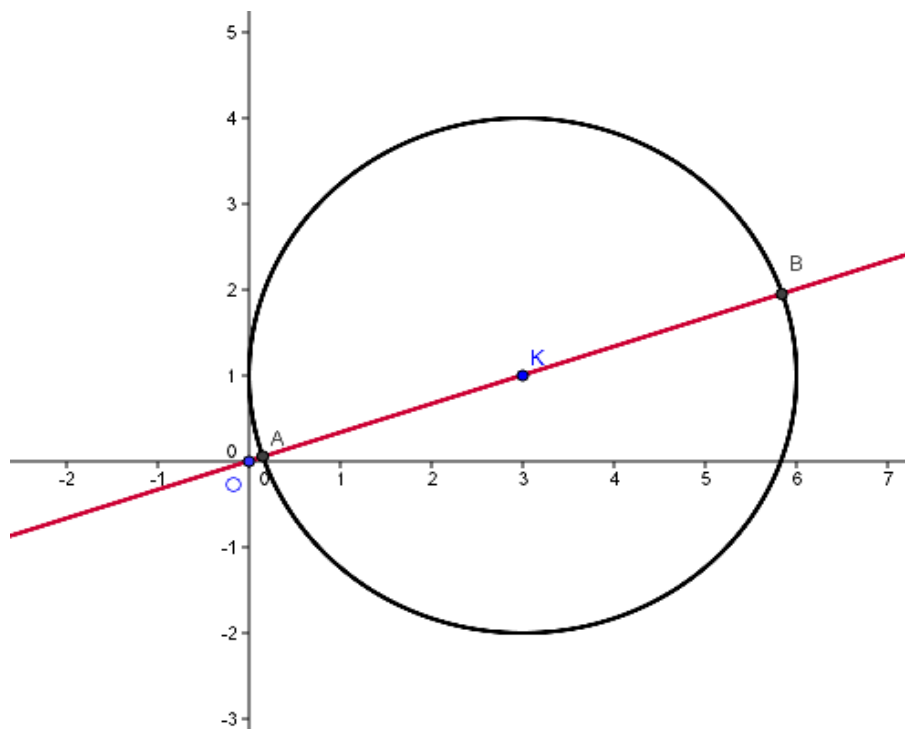
$$|(1+i)z - 2 - 4i| = \sqrt{18} \Leftrightarrow \left| (1+i)\left(z - \frac{2+4i}{1+i}\right) \right| = \sqrt{18} \Leftrightarrow$$

$$|1+i| \cdot \left| z - \frac{2(1+2i)(1-i)}{2} \right| = \sqrt{18} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z - (1-i+2i+2)| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|z - (3+i)| = 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho=3$

ii.



Για να βρώ την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$ φέρνω την OK και έχω

$$(OK) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ οπότε}$$

$$|z|_{\min} = (OA) = (OK) - \rho = \sqrt{10} - 3$$

$$|z|_{\max} = (OB) = (OK) + \rho = \sqrt{10} + 3$$

iii. Στο ερώτημα αυτό θεωρώ πως η διατύπωση θα έπρεπε να ήταν:

Αν $w = 2z - 11 + 5i$ να βρεθεί η καμπύλη πάνω στην οποία ανήκουν οι εικόνες του w

$$w = 2z - 11 + 5i \Leftrightarrow 2z - 6 - 2i = w + 5 - 7i \Leftrightarrow 2(z - (3 + i)) = w + 5 - 7i$$

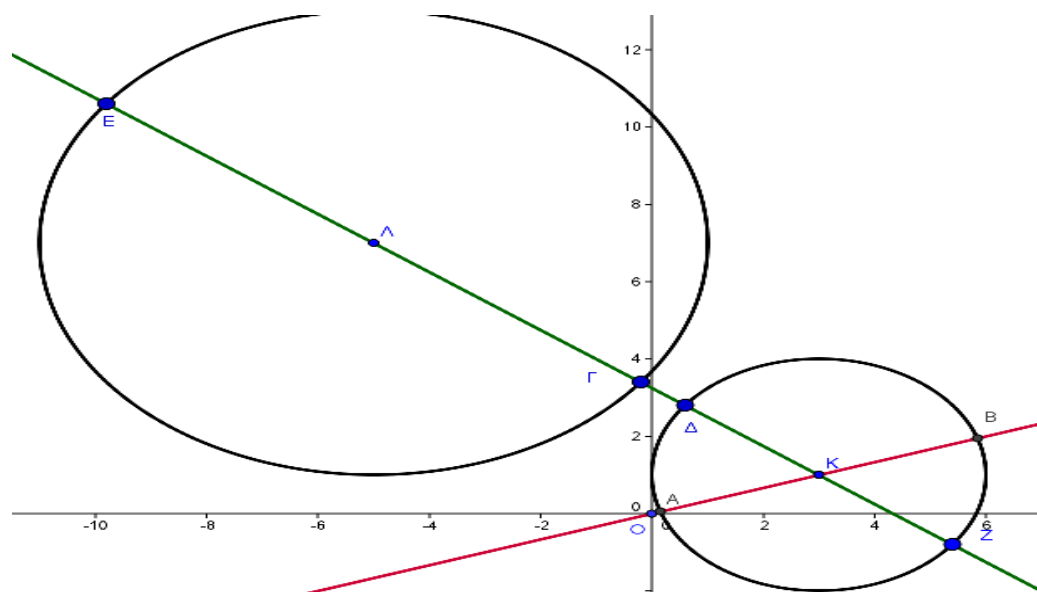
$$\text{Επομένως έχουμε } |2(z - (3 + i))| = |w + 5 - 7i| \Leftrightarrow |w - (-5 + 7i)| = 6 \Leftrightarrow$$

$$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

Κύκλος με κέντρο $\Lambda(-5,7)$ και ακτίνας $\rho=6$

iv. Με μια πρώτη ματιά δείνει το $|z - w|_{\min} = (\Gamma\Delta) = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 1$

$$|z - w|_{\min} = (EZ) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 16.$$



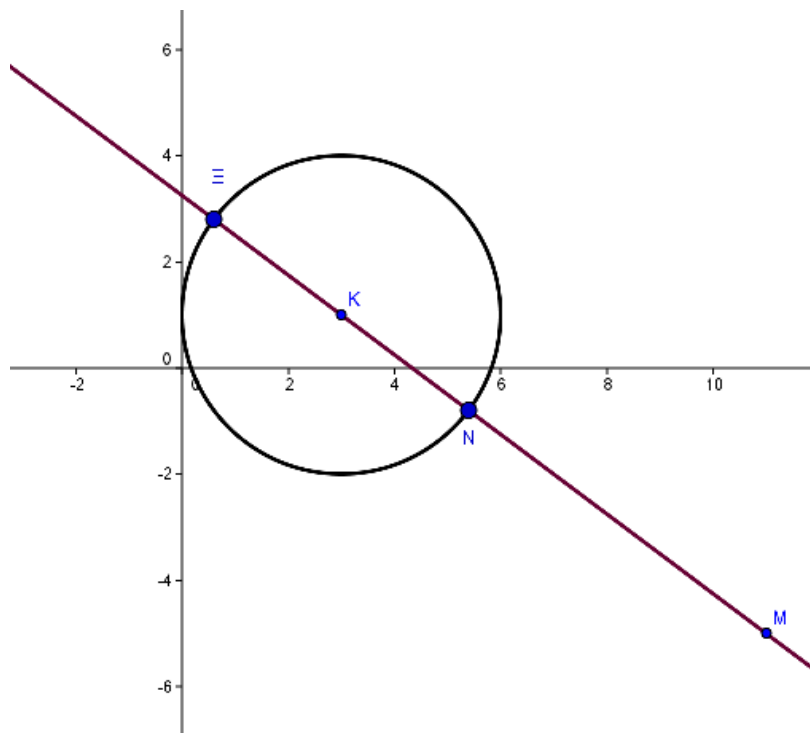
Αυτό όμως είναι λάθος διότι οι μιγαδικοί z και w βρίσκονται σε αλληλοεξάρτηση, οπότε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ δεν μπορούμε να την βρούμε γεωμετρικά, διότι οι μιγαδικοί z και w δεν μπορούν να πάρουν τις κατάλληλες θέσεις ώστε

$$|z - w|_{\min} = (ΓΔ) = (ΚΛ) - \rho_1 - \rho_2 = 1$$

$$|z - w|_{\min} = (ΕΖ) = (ΚΛ) + \rho_1 + \rho_2 = 16$$

$$\text{Έτσι έχουμε } |z - w| = |w - z| = |2z - 11 + 5i - z| = |z - (11 - 5i)| \quad (1)$$

Όμως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho=3$ έτσι η (1) παριστάνει την απόσταση του σημείου $M(11,-5)$ από τον κύκλο με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho=3$



$$(KM) = \sqrt{(11 - 3)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\text{Έτσι έχουμε } |z - w|_{\min} = (MN) = (KM) - \rho = 10 - 3 = 7$$

$$|z - w|_{\min} = (ME) = (KM) + \rho = 10 + 3 = 13.$$

Κατσίποδας Δημήτρης