Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος IV

Κυριαζής Χρήστος
2ο ΓΕ.Λ. Αγίας Βαρβάρας
chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου θεωρούνται από τους περισσότερους μαθητές το δυσκολότερο μάθημα που καλούνται να δώσουν ώστε να επιτύχουν την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το τρέχον σχολικό βιβλίο έχει γραφεί σχεδόν 20 χρόνια πριν και σε πολλές περιπτώσεις, με βάση τα θέματα των εξετάσεων, φαίνεται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων. Επιπλέον και σε επίπεδο θεωρίας, στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να γίνουν χρήσιμες βελτιώσεις και συμπληρώσεις, οι οποίες αφορούν: ορισμούς, παραδείγματα, προτάσεις και αποδείξεις προτάσεων. Ειδικά για τις προτάσεις που δεν υπάρχουν ούτε ως αναφορά στο σχολικό βιβλίο, είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν είτε χωρίς απόδειξη (με άμεσο αποτέλεσμα βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις), είτε να τις αποδεικνύουν χάνοντας πολύτιμο χρόνο. Με αυτή τη σειρά των εργασιών προτείνουμε βελτιώσεις για τη θεωρία του σχολικού βιβλίου. Η εργασία αυτή είναι συνέχεια των τριών εργασιών που παρουσιάσαμε στην 9η μαθηματική εβδομάδα στην Θεσσαλονίκη (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2017α) στο 34ο πανελλήνιο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη Λευκάδα (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2017β) και στο 2ο πανελλήνιο συνέδριο των εκπαιδευτηρίων Πολύτροπη Αρμονία στους Δελφούς (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2018).

Abstract

Most students believe that mathematics in the last class of Lyceum is the most difficult subject for their entry to university. The current school book was written almost 20 years ago and in many cases, in relation to exam topics, needs to be revised. Furthermore the theory in this book needs improvement in definitions, examples, propositions and proofs. Especially with regard to propositions not mentioned in the book students are obliged to prove them and waste valuable time during the examination or obtain a lower score for not proving them. In this series of papers we propose improvements about the theory of the school book. We presented the first three papers in the 9th mathematical week, in the 34th Panhellenic conference of the Hellenic Mathematical Society and in the 2nd Panhellenic conference of the school Politropi Armonia. This paper is the fourth part.

Εισαγωγή

Η ενασχόληση των συναδέλφων μαθηματικών με τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου και η χρήση του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά. 2016) ως κύριου οδηγού της διδασκαλίας αναδεικνύει τις ελλείψεις που έχει σε επίπεδο θεωρίας. Ασάφειες σε ορισμούς, απουσία παραδειγμάτων για την αποσαφήνιση λεπτών και κρίσιμων σημείων, έλλειψη χρήσιμων προτάσεων αλλά και αποδείξεων σε προτάσεις του βιβλίου είναι μερικά από τα στοιχεία που συνθέτουν τις εν λόγω ελλείψεις. Πολλά από αυτά διδάσκονται από τον καθηγητή, ο οποίος υποδεικνύει στους μαθητές να τα γνωρίζουν ως θεωρία, ενώ στην περίπτωση χρήσης προτάσεων που δεν υπάρχουν στο σχολικό οι μαθητές επιβάλλεται να τις αποδείξουν, αν θέλουν να είναι σίγουροι ότι δεν θα έχουν βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές. Αν συνυπολογίσουμε πως τα παιδιά βάλλονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τα κάνει να λειτουργούν μηχανικά, τότε μπορούμε να πούμε πως αλλοιώνεται η ουσιαστική σημασία του μαθήματος των μαθηματικών, αφού οι μαθητές δεν μαθαίνουν να σκέπτονται σωστά, ενώ και οι γνώσεις που αποκτούν συχνά δεν είναι επαρκείς για να τους συνοδεύσουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρούμε πως ένα σωστό θεωρητικό υπόβαθρο χωρίς κενά, που θα δομηθεί σταδιακά και ας μοιραστεί σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, θα είναι αρωγός στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Και αυτό πρέπει να έχει ως αρχή και βασικό θεμέλιο του το σχολικό εγχειρίδιο.

Χωρίς καμία διάθεση κριτικής αλλά με τη ματιά του παρατηρητή, θέλουμε μέσω αυτής της σειρά των εργασιών να επισημάνουμε κάποιες ελλείψεις που θεωρούμε σημαντικές για την κατανόηση του μαθήματος. Ίσως κάποιες από αυτές που θα επισημάνουμε φανούν υπερβολικές αλλά θεωρούμε ότι η πληρότητα ενός σχολικού βιβλίου επιβάλλει τέτοιες παρατηρήσεις. Δυστυχώς, η έλλειψη χώρου μας αναγκάζει αυτό να γίνει σε συνέχειες. Αυτή η εργασία είναι το τέταρτο μέρος.

Κεφάλαιο 2ο – Διαφορικός Λογισμός

Σχόλιο 42: Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή ισχύει $A_{f'} \subseteq A_f$. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Η θεωρία αναφέρει ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο A_f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A_f$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Συνεπώς αφού το x_0 στο οποίο ορίζεται η παράγωγος ανήκει υποχρεωτικά στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, τότε σίγουρα το πεδίο ορισμού της παραγώγου f' είναι υποσύνολο του A_f.

Αυτό δεν τονίζεται επαρκώς στο σχολικό βιβλίο και οι μαθητές συχνά παρανοούν, αλλά και αγνοούν, τη σημασία του σχολίου αυτού.

Χρήσιμη θα ήταν και η αναφορά σε ένα παράδειγμα που να γίνεται σαφές ότι μπορεί το πεδίο ορισμού της παραγώγου να είναι λίγο (ή περισσότερο) «μικρότερο». Μια βολική συνάρτηση είναι η f με $f(x)=\sqrt{x}$ της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το $[0,+\infty)$, ενώ η παράγωγος της ορίζεται στο $(0,+\infty)$.

Σχόλιο 43: Η έννοια του γωνιακού σημείου απουσιάζει παντελώς από το σχολικό βιβλίο. Δεν υπάρχει πουθενά ο ορισμός του και χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε πως στη διόρθωση γραπτών των πανελληνίων του 2017 πάρα πολλοί μαθητές το είχαν χρησιμοποιήσει ως επιχείρημα για να απαντήσουν στο ερώτημα Α2: «είναι μια συνεχής συνάρτηση πάντοτε παραγωγίσιμη;» Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του γωνιακού σημείου (Κατσαργύρης κ.ά., 1992): «Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ πεπερασμένα ή άπειρα και είναι διαφορετικά, τότε το σημείο $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ ονομάζεται γωνιακό σημείο της γραφικής παράστασης της f ή γωνιακό σημείο της f.

Σχόλιο 44: Στο σχολικό βιβλίο σε κανένα σημείο δεν γίνεται η σύνδεση των εννοιών της παραγώγου μιας συνάρτησης και της συνέχειάς της. Έτσι συχνά οι μαθητές θεωρούν δεδομένο ότι η ύπαρξη της παραγώγου σημαίνει και συνέχεια της παραγώγου. Ένα παράδειγμα θα βοηθούσε και εδώ. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \tag{145}$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \tag{146}$$

η οποία δεν είναι συνεχής στο 0. Στο σημείο αυτό θα θυμίσουμε ότι στις πανελλήνιες εξετάσεις του 2000 στο πρώτο θέμα, στην πρώτη από τις ερωτήσεις σωστού-λάθους ζητήθηκε ο χαρακτηρισμός της πρότασης: «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0». Είναι σαφές ότι κάτι τέτοιο δεν υποστηρίζεται σε κανένα σημείο της θεωρίας του σχολικού βιβλίου.

<u>*Σχόλιο 45*</u>: Η παραγώγιση μιας σύνθετης συνάρτησης είναι μια διαδικασία η οποία έχει συγκεκριμένα βήματα. Όμως αυτή καταλήγει να εφαρμόζεται μηχανικά, χωρίς να ελέγχονται οι προϋποθέσεις εφαρμογής. Βέβαια, όπως έχουμε θίξει στην τρίτη εργασία αυτής της σειράς, η απουσία του σημείου συσσώρευσης υπεραπλουστεύει πολλές φορές πολύ σημαντικές έννοιες. Ακόμη και η παράσταση με τα απειροστά γίνεται χωρίς τη χρήση κάποιου παραδείγματος που θα απλούστευε κατά πολύ τις παραπάνω έννοιες. Η συγκεκριμένη έννοια υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά είναι πολύ υποβαθμισμένη και ο μαθητής είναι πολύ δύσκολο να καταλάβει τι γίνεται. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης f με

$$f(x)=\left(x^2+3\right)^4,\ x\in R, \tag{147}$$

θέτουμε:

$$g(y)=y^4,\ y\in R \text{ και } h(x)=x^2+3,\ x\in R, \tag{148}$$

οπότε:

$$f(x)=g\left(h(x)\right),\ x\in R \tag{149}$$

και

$$f'(x)=g'\left(h(x)\right)h'(x)=4\left(x^2+3\right)^3 2x,\ x\in R. \tag{150}$$

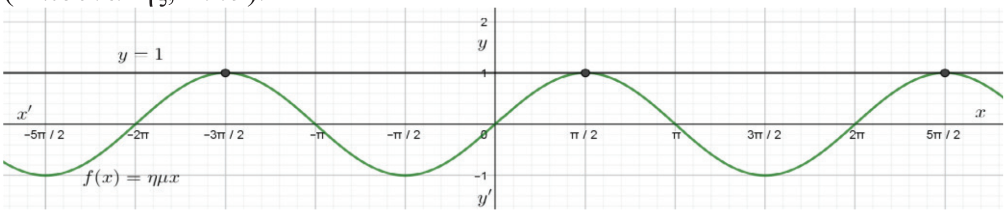
Με τη χρήση απειροστών θα είχαμε:

$$y=x^2+3,\ x\in R,\ z=y^4,\ y\in R, \tag{151}$$

άρα

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=4y^3 2x=8x\left(x^2+3\right)^3,\ x\in R. \qquad (152)$$

<u>*Σχόλιο 46*</u>: Οι μαθητές, προερχόμενοι από τη Β΄ Λυκείου έχοντας διδαχθεί τα βασικά χαρακτηριστικά των κωνικών τομών, έρχονται στη Γ΄ Λυκείου έχοντας την (εσφαλμένη) εντύπωση πως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με αυτήν, το σημείο επαφής. Στο σχολικό εγχειρίδιο αυτό δεν είναι εμφανές σε θεωρητικό επίπεδο. Μια εφαρμογή και μια γραφική παράσταση θα ήταν ότι πιο εποικοδομητικό. Προτείνουμε μια ήδη γνωστή συνάρτηση από τη Β΄ Λυκείου, την f με $f(x)=\eta\mu x$, $x\in R$ η οποία έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=1$ στα σημεία $\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},1\right)$, $\kappa\in Z$, δηλαδή έχει με αυτήν άπειρα (αλλά αριθμήσιμου πλήθους) κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f (Μπουνάκης, 2009).



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\eta\mu x$, $x\in R$ και η εφαπτομένη με εξίσωση $y=1$.

<u>Πρόταση 37</u>: (Θεώρημα Rolle). Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

<u>*Απόδειξη*</u>

- Αν η f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε επειδή είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu\in[\alpha,\beta]$, τέτοια, ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύει:

  $$f(x_\varepsilon)\le f(x)\le f(x_\mu), \qquad (153)$$

  όπου $f(x_\varepsilon)<f(x_\mu)$.

  Τα x_ε, x_μ δε μπορεί να είναι και τα δύο άκρα του $[\alpha,\beta]$, διότι αν ήταν θα έπρεπε να ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)$ (αν $x_\varepsilon=\alpha, x_\mu=\beta$) ή $f(\alpha)>f(\beta)$ (αν $x_\mu=\alpha, x_\varepsilon=\beta$), που είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Επομένως τουλάχιστον ένα από τα x_ε, x_μ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος (α,β).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_\varepsilon \in (\alpha,\beta)$. Τότε, επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_\varepsilon \in (\alpha,\beta)$ και ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat θα ισχύει $f'(x_\varepsilon)=0$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε, για $x_\varepsilon = \xi$.

- Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε έχουμε ότι $f'(\xi)=0$ για οποιοδήποτε ξ στο (α,β).

Η υιοθέτηση της πρότασής μας αυτής απαιτεί είτε αναδιάταξη της ύλης, είτε η απόδειξη του θεωρήματος Rolle να παρουσιάζεται μετά το θεώρημα Fermat.

<u>Πρόταση 38</u>: (Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού). Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha\right),\ x \in [\alpha,\beta], \tag{154}$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (α,β) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \tag{155}$$

και $g(\alpha)=g(\beta)=f(\alpha)$.

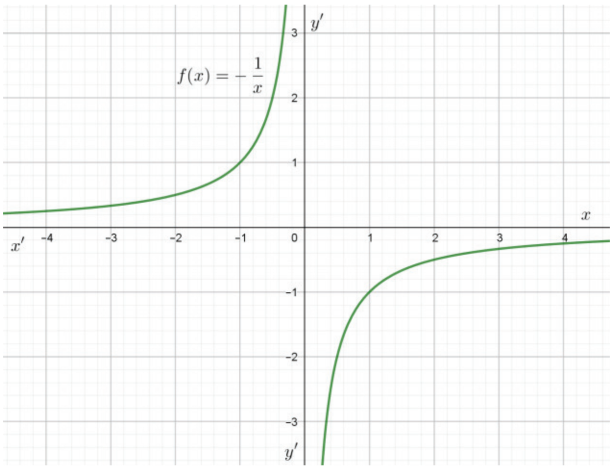
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in \left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

<u>Σχόλιο 47</u>: Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(\alpha,\beta\right)$ και $\left(\beta,\gamma\right)$ με $\alpha<\beta<\gamma$, προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\alpha,\gamma\right)$; Αυτό το ερώτημα δημιουργεί ενδιαφέροντες διαλόγους με τους μαθητές. Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται διαπραγμάτευση του θέματος αυτού. Η ύπαρξη ενός σχολίου συνοδευόμενου με κατάλληλο

παράδειγμα θα είχε καταλυτικό ρόλο στην αποσαφήνιση του θέματος. Για παράδειγμα η συνάρτηση f με

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \ x \in R^*, \tag{156}$$

είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = -\frac{1}{x}, \ x \in R^*$.

Μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο διάστημα (α, γ) και είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (α, β), (β, γ) με $\alpha < \beta < \gamma$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο (α, γ), αν για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο β ή ότι $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) \le f(\beta) \le \lim\limits_{x \to \beta^+} f(x)$ (εφόσον τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί).

<u>Σχόλιο 48</u>: Με την ίδια διαπραγμάτευση αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα (α, γ) και είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (α, β), (β, γ) με $\alpha < \beta < \gamma$, δεν είναι απαραίτητο ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, γ). Για παράδειγμα, θα ήταν γνησίως φθίνουσα στο (α, γ), αν επιπλέον γνωρίζαμε ότι η f είναι συνεχής στο β ή ότι $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) \ge f(\beta) \ge \lim\limits_{x \to \beta^+} f(x)$ (εφόσον τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί).

Πρόταση 39: Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει $f'(x) \geq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Απόδειξη

Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$ με α < β και τυχαίο ξ του (α, β).

Αν $\alpha < x < \xi$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, έχουμε:

$$f(x) < f(\xi) \Rightarrow f(x) - f(\xi) < 0, \tag{157}$$

οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0 \tag{158}$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0. \tag{159}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, άρα και στο ξ προκύπτει ότι:

$$f'(\xi) \geq 0. \tag{160}$$

Επίσης, αφού το ξ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο στο Δ θα ισχύει:

$$f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε x στο εσωτερικό του } \Delta. \tag{161}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 40: Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και γνησίως φθίνουσα στο Δ, ισχύει $f'(x) \leq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Σχόλιο 49: Το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει και το σχολικό βιβλίο δεν κάνει αυτή την απαραίτητη διευκρίνιση άμεσα, αλλά έμμεσα. Είναι απαραίτητο κατά τη γνώμη μας να υπάρξει σαφής διευκρίνιση για το θέμα, με τη χρήση ενός σχολίου, αλλά και ενός παραδείγματος όπως είναι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3, x \in R$ της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται στο 0, αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $O(0, f(0))$.

Σχόλιο 50: Το σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 1.3 δίνει τον ορισμό του (ολικού) μεγίστου και του (ολικού) ελαχίστου. Καταλήγει στην παράγραφο γράφοντας: «Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα της f». Κατόπιν, παρουσιάζοντας τα τοπικά ακρότατα, αναφέρει τη διαφορά τοπικού και ολικού ακροτάτου, χωρίς όμως να τονίζεται ιδιαίτερα η σημασία των εννοιών και τελειώνοντας ξαναγράφει πως το μέγιστο και το ελάχιστο λέγονται ολικά ακρότατα της συνάρτησης. Στις ασκήσεις προς λύση ζητά να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάποιες συναρτήσεις και στις απαντήσεις αναφέρεται σε τοπικά ακρότατα!!! Θεωρούμε πως είναι απαραίτητο αφενός μεν να υπάρξουν καλύτερες διατυπώσεις επί των θεμελιωδών αυτών εννοιών, αφετέρου δε να δοθεί πλήθος παραδειγμάτων που να αναδεικνύει τις διαφορές, οπότε οι μαθητές θα μπορούν να αποσαφηνίσουν πλήρως αυτές τις πολύ σημαντικές και λεπτές έννοιες. Παραθέτουμε χαρακτηριστικά και τα γραφόμενα του σχολικού βιβλίου της γενικής παιδείας στην παράγραφο 1.4, όπου αναφέρει ότι: «Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης». Είναι σαφές το ολικό μπέρδεμα των εννοιών ενός μαθητή της Γ΄ Λυκείου που διαβάζει και τα δύο βιβλία…

<u>Πρόταση 41</u>: Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι:

$$\ln x \le x-1,\ x>0. \tag{162}$$

Επίσης αφού $x > 0$ ισχύει $\frac{1}{x} > 0$, οπότε θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ βρίσκουμε:

$$\ln\frac{1}{x} \le \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \le \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x \ge \frac{x-1}{x} \tag{163}$$

και η απόδειξη τελειώνει.

<u>Πρόταση 42</u>: Για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x \ge x+1$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Θέτουμε όπου x το $e^x > 0$, στη (162) και βρίσκουμε:

$$\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1, \tag{164}$$

για κάθε $x \in R$.

Η πρόταση (42) από το σχολικό έτος 2017-2018 μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές χωρίς απόδειξη (Υ.Π.Ε.Θ., 2017).

<u>*Σχόλιο 51*</u>: Όταν ένας μαθητής καλείται να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα (ρυθμού μεταβολής ή ακροτάτων) πρέπει να ορίσει την κατάλληλη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της. Το πεδίο ορισμού της δεν καθορίζεται μόνο από τη μορφή της συνάρτησης, αλλά και τα χαρακτηριστικά του

προβλήματος. Αν για παράδειγμα η μεταβλητή της συνάρτησης είναι ο χρόνος t, απαιτούμε $t \geq 0$, ενώ αν η μεταβλητή εκφράζει μήκος απαιτούμε κάθε μήκος που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση να είναι θετικό. Θα ήταν καλό να υπάρχει ένα σχόλιο, αλλά και επαρκές πλήθος εφαρμογών ή λυμένων παραδειγμάτων στο σχολικό βιβλίο για να μην υπάρχει παρανόηση στο θέμα.

Σχόλιο 52: Στο σχολικό βιβλίο, στον ορισμό του σημείου καμπής ως προϋπόθεση τίθεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης να δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$. Η προϋπόθεση αυτή προφανώς μπήκε για να καλυφθεί και η περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης. Όμως εδώ και πάρα πολλά χρόνια η έννοια αυτή έχει τεθεί εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης. Οι μαθητές σε αυτό το σημείο παρουσιάζουν κάποια δυσκολία στην κατανόηση γι' αυτό και επισημαίνεται. Προφανώς δεν θα ήταν άσχημο στην εξεταστέα-διδακτέα ύλη των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου να ήταν η έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης.

Πρόταση 43: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και κυρτή στο Δ, τότε ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Απόδειξη

Αφού η f είναι κυρτή στο Δ, ισχύει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ και τυχαίο ξ του (α, β).

Αν $\alpha < x < \xi$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, έχουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) < 0, \tag{165}$$

οπότε

$$\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0 \tag{166}$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} \geq 0. \tag{167}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο Δ, άρα και στο ξ προκύπτει ότι:

$$f''(\xi) \geq 0. \tag{168}$$

Επίσης, αφού το ξ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο στο (α, β) θα ισχύει:

$$f''(x) \geq 0 \text{ για κάθε x στο εσωτερικό του } \Delta. \tag{169}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.
Πρόταση 44: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και κοίλη στο Δ, τότε ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Πρόταση 45: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) εκτός ίσως από ένα σημείο ξ, στο οποίο όμως η f' είναι συνεχής. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο (α,β), ενώ αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο (α,β).
Απόδειξη
Έστω ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$.
Επειδή η f' είναι συνεχής στο ξ έπεται ότι θα είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και στο (α,β), δηλαδή η f είναι κυρτή στο (α,β).
Ομοίως αποδεικνύεται η περίπτωση $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$.

Πρόταση 46: Αν η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της A_f, τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f βρίσκεται κάτω από τη C_f, εκτός από το σημείο επαφής.
Απόδειξη
Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{170}$$

ή

$$y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0). \tag{171}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)x + x_0 f'(x_0) - f(x_0), \quad x \in A_f. \tag{172}$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο A_f ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο A_f ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0), \quad x \in A_f. \tag{173}$$

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (άρα και ένα προς ένα) στο A_f, ισχύει:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(x_0) \Leftrightarrow x = x_0, \tag{174}$$

Επιπλέον:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0, \tag{175}$$

και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow x < x_0. \tag{176}$$

Συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq x_0$, γνησίως φθίνουσα για $x \leq x_0$, οπότε στη θέση $x = x_0$ η g παρουσιάζει ελάχιστο το $g(x_0) = 0$.

Επομένως:

$$g(x) \geq g(x_0) = 0, \text{ για κάθε } x \in A_f \tag{177}$$

ή

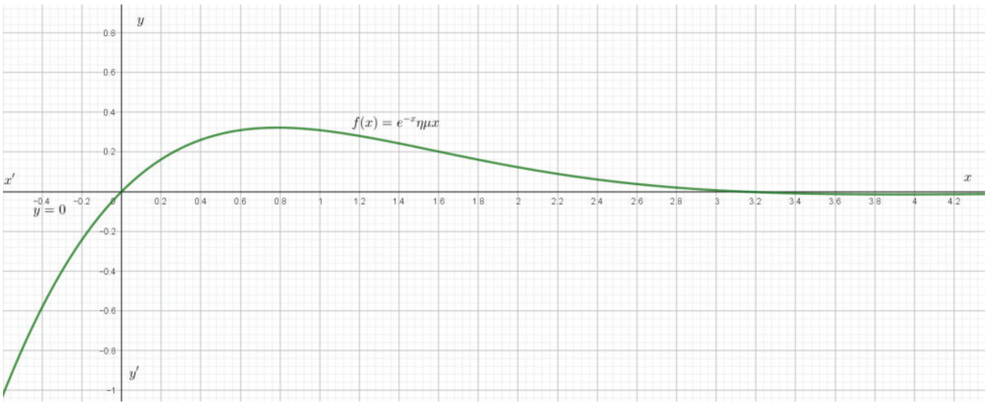
$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \;\; x \in A_f, \tag{178}$$

δηλαδή οποιαδήποτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται κάτω από τη C_f, εκτός από το σημείο επαφής.

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 47: Αν η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της A_f, τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f βρίσκεται πάνω από τη C_f, εκτός από το σημείο επαφής.

Σχόλιο 53: Η ονομασία της ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης παραπέμπει στο ότι η γραφική παράσταση δε συμπίπτει ποτέ με αυτήν, επομένως (εσφαλμένα) δεν έχει κοινά σημεία με αυτήν. Και όμως υπάρχουν ασύμπτωτες γραφικών παραστάσεων οι οποίες έχουν κοινά σημεία με αυτήν. Για το ξεκαθάρισμα της περίπτωσης αυτής προτείνεται η ύπαρξη μιας εφαρμογής όπου αυτό θα διασαφηνίζεται. Για παράδειγμα (Παντελίδης, 1998) η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-x}$ημx, $x \in R$ έχει για (οριζόντια) ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 0$. Αποδεικνύεται (εύκολα) πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άπειρα (αλλά αριθμήσιμου πλήθους) κοινά σημεία με την ασύμπτωτη, τα $(\kappa\pi, 0)$, $\kappa \in Z$.



Σχήμα 12: Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = e^{-x}\eta\mu x$, $x \in R$ και η οριζόντια ασύμπτωτη με εξίσωση $y = 0$.

Σχόλιο 54: Τα θεωρήματα του de l' Hospital (που αναφέρονται και ως κανόνες de l' Hospital) διέπονται από διάφορες προϋποθέσεις, οι οποίες δεν αναφέρονται και τόσο αναλυτικά όταν αυτά εφαρμόζονται. Είναι επιτακτική η ανάγκη παραδειγμάτων όπου θα αναδεικνύεται η αναγκαιότητα εξασφάλισης όλων των προϋποθέσεων των θεωρημάτων. Το σχολικό βιβλίο έχει ένα παράδειγμα μα νομίζουμε πως δεν είναι αρκετό. Σημειώνουμε επίσης και την απουσία ενός παραδείγματος όπου η «άψογη» εφαρμογή του κανόνα δε μας παράγει τελικό αποτέλεσμα, αλλά οδηγεί σε μια ατέρμονη διαδικασία χωρίς τελειωμό, διότι απλά δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος. Για παράδειγμα (Υ.Π.Ε.Θ., 2017) μπορεί να δοθεί ο υπολογισμός του ορίου $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με χρήση του κανόνα de l' Hospital, οπότε θα καταστεί σαφέστερο στους μαθητές πως αυτός ο κανόνας δεν αποτελεί την πανάκεια για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Πρόταση 48: (Ανισότητα Jensen). Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (Βλάμος, 1998).

Απόδειξη

- Αν $\alpha = \beta$, η προς απόδειξη σχέση ισχύει τετριμμένα ως ισότητα.
- Έστω $\alpha \neq \beta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha < \beta$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right] \subseteq [\alpha,\beta]$,

άρα υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = 2 \cdot \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \tag{179}$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = 2 \cdot \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}. \tag{180}$$

Όμως η f είναι κυρτή στο Δ, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \tag{181}$$

και αντικαθιστώντας τις (179), (180) βρίσκουμε:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{182}$$

Συνεπώς:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}. \tag{183}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 49: (Ανισότητα Jensen). Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και κοίλη στο διάστημα Δ, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (Βλάμος, 1998).

Κεφάλαιο 3ο – Ολοκληρωτικός Λογισμός

Πρόταση 50: Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha] \to R$ με $\alpha > 0$. Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ (Βλάμος, 1999).

<u>*Απόδειξη*</u>

Ισχύει ότι:

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx \overset{f\ \text{άρτια}}{=} \int_{-\alpha}^{0} f(-x)dx \overset{u=-x}{=} \int_{\alpha}^{0} f(u)(-du) = \int_{0}^{\alpha} f(u)du, \qquad (184)$$

δηλαδή θέτοντας $u = x$ έχουμε:

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx, \qquad (185)$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \overset{(185)}{=} 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx, \qquad (186)$$

Από τις (185) και (186) προκύπτει ότι:.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx. \qquad (187)$$

<u>Πρόταση 51</u>: Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha] \to R$ με $\alpha > 0$. Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ (Βλάμος, 1999).

<u>*Απόδειξη*</u>

Ισχύει ότι:

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx \overset{f\ \text{περιττή}}{=} -\int_{-\alpha}^{0} f(-x)dx \overset{u=-x}{=} -\int_{\alpha}^{0} f(u)(-du) = -\int_{0}^{\alpha} f(u)du, \qquad (188)$$

δηλαδή θέτοντας $u = x$ έχουμε:

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{\alpha} f(x)dx. \qquad (189)$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \overset{(189)}{=} 0. \qquad (190)$$

<u>Πρόταση 52</u>: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$$h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha, \beta]. \tag{191}$$

Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι

$$h(x) \geq 0,\ x \in [\alpha, \beta]. \tag{192}$$

Συνεπώς:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx \geq 0\,, \tag{193}$$

άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\,. \tag{194}$$

<u>Πρόταση 53</u>: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_0) \neq g(x_0)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$$h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha, \beta]. \tag{195}$$

Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι

$$h(x) \geq 0,\ x \in [\alpha, \beta], \tag{196}$$

χωρίς να είναι παντού μηδέν.

Συνεπώς:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx > 0\,, \tag{197}$$

άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\,. \tag{198}$$

Οι προτάσεις (52), (53) από το σχολικό έτος 2016-2017 μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές χωρίς απόδειξη (Υ.Π.Ε.Θ., 2017).

<u>*Σχόλιο 55*</u>: Στο σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 3.4 γίνεται εκτενής αναφορά στη σύνδεση του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου με το ορισμένο ολοκλήρωμα, δίνοντας παράλληλα τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Η όλη διαδικασία επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πολύ

δύσκολες έννοιες για το μαθητή. Κατά τη γνώμη μας η συγκεκριμένη παράγραφος είναι εκτός του συνολικού πνεύματος του σχολικού βιβλίου και θα ήταν χρήσιμο είτε το μεγαλύτερο μέρος της να βγει εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης είτε μέσω των οδηγιών του υπουργείου να υπάρξει μια διαφορετική προσέγγιση του θέματος δεδομένου ότι όσα διαπραγματεύονται στην παράγραφο 3.4 είναι και πιθανά θέματα εξετάσεων!

Σχόλιο 56: Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγουσα, αλλά πουθενά δεν γίνεται σαφές ότι υπάρχει περίπτωση αυτή να μην μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Ως παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Spivak, 1999), η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\ x \in R, \qquad (199)$$

της οποίας η παράγουσα είναι η συνάρτηση σφάλματος erf(x), για την οποία ισχύει

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx,\ x \in R. \qquad (200)$$

Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που θεμελιώνεται σταδιακά. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να αποκομίζουν αυτή τη γνώση από το σχολείο. Είναι αναγκαία η δόμηση της προσφερόμενης μαθηματικής ύλης, ίσως και από μικρότερες τάξεις, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρουσιάζει συνοχή. Η μη αναφορά βασικών γνώσεων και προτάσεων μόνο κακό κάνει στα μαθηματικά. Ο «χαρακτηρισμός» βασικών προτάσεων ως «απαγορευμένες» (οπότε η χρήση τους είναι στη «μαύρη αγορά») δημιουργεί πολλούς κινδύνους στη βαθμολόγηση γραπτών και βλάπτει τον επιθυμητό από τους περισσότερους, ενιαίο και αμερόληπτο χαρακτήρα της. Γι' αυτό πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία πρέπει να δίνουν τα απαραίτητα εφόδια στον οποιοδήποτε να πετύχει το σκοπό του. Σε αυτά στηρίζεται το τέταρτο και τελευταίο μέρος της πρότασής μας για το σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Γενικού*

Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βλάμος Μ. Π. (1998). *Παράγωγος συνάρτησης*, Εκδόσεις “V”.

Βλάμος Μ. Π. (1999). *Ολοκλήρωμα συνάρτησης*, Εκδόσεις “V”.

Κατσαργύρης Β., Μεντής Κ., Παντελίδης Γ., Σουρλάς Κ. (1992). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Ανάλυση*, ΟΕΔΒ.

Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος Ι*, Πρακτικά 9ης διεθνούς μαθηματικής εβδομάδας, σελ. 463-474.

Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος ΙΙ*, Πρακτικά 34ου συνεδρίου της ΕΜΕ, σελ. 492-504.

Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2018). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου – Μέρος ΙΙΙ*, Πρακτικά 2ου πανελλήνιου συνέδριου των εκπαιδευτηρίων ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ, υπό έκδοση.

Μπουνάκης Δ. (2009). Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, *Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Διαφορικός Λογισμός Α΄ μέρος*, Ηράκλειο.

Μπουνάκης Δ. (2009). Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, *Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Διαφορικός Λογισμός Β΄ μέρος*, Ηράκλειο.

Μπουνάκης Δ. (2009). Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, *Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Ηράκλειο.

Υ.Π.Ε.Θ., (2017), Διαχείριση της Διδακτέας - Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και της Δ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολ. έτος 2017–2018, 163573/Δ2/2-10-17.

Παντελίδης Ν. Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου*, εκδόσεις Ζήτη.

Spivak M. (1999), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.