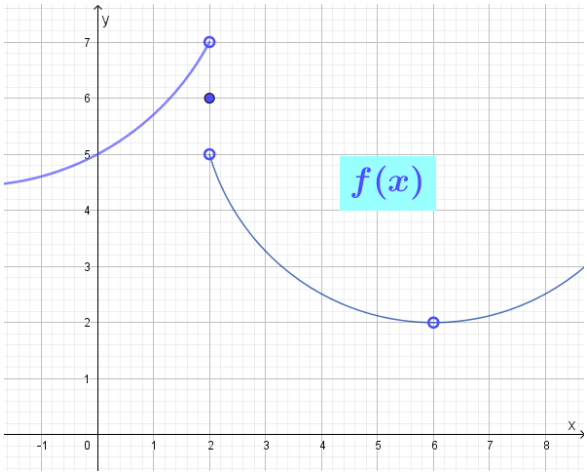
Υ.Π.Ε.Θ.
ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΛ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΤΜΗΜΑ:.....
ΟΝΟΜΑ:.....
ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

Εξάσκηση στα Μαθηματικά Προσαντολισμού Γ΄λυκείου 2018 σελίδα: 1

Θέμα Α

Α1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:R-\{6\}\to\mathbb{R}$. Να απαντήσετε, με **Σ**ωστό ή **Λ**άθος στα επόμενα ερωτήματα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

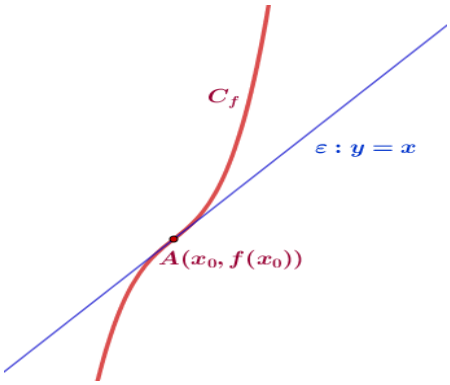


1. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2. Υπάρχει το όριο της f στο $x_0=6$.

3. Δεν υπάρχει το όριο της $f(f(x))$ στο $x_0=6$.

Α2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, κοίλη για $x\le x_0$, κυρτή για $x\ge x_0$ και έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=x$ στο σημείο A. Να απαντήσετε, με **Σ**ωστό ή **Λ**άθος στα επόμενα ερωτήματα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:



1. Η f έχει σημείο καμπής το Α.

2. Η εξίσωση $f(x)=x$ μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.

3. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-x}=+\infty$

Α3.α) Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράτασης μιας συνάρτησης.

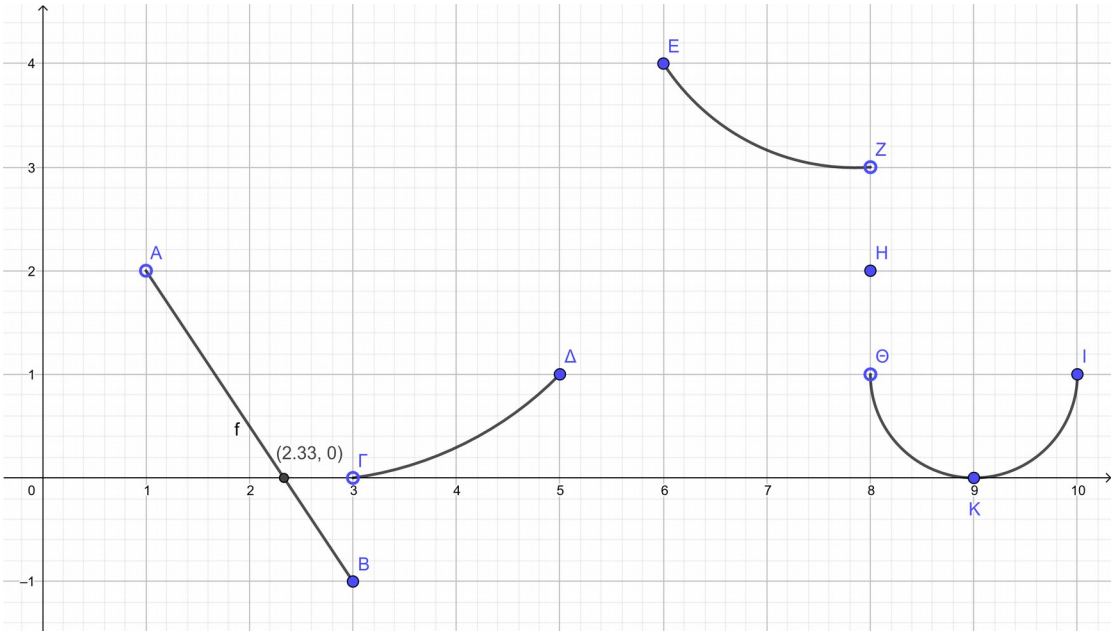
β) Σύμφωνα με τον ορισμό, η κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν μπορεί να έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ**ωστό ή **Λ**άθος;

(Μονάδες, Α1: 3+3+3, Α2: 3+3+3, Α3: 4+3)

Θέμα Β

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Εξάσκηση στα Μαθηματικά Προσαντολισμού Γ΄λυκείου 2018 σελίδα: 2



Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Β2. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

Για όσα όρια δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2,33} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{1}{f(x)}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β4. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της γραφικής παράστασης της f. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β5. Να σχεδιάσετε μία πιθανή γραφική παράσταση της f' σε κατάλληλο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες, Β1:5 Β2: 4 Β3: 6 Β4: 4 Β5: 6)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε: $x+1 \le f(x) \le x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Κάνοντας κατάλληλο σχήμα, να γραμμοσκιάσετε το μέρος του επιπέδου στο οποίο μπορεί να βρίσκεται η γραφική παράσταση της f.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

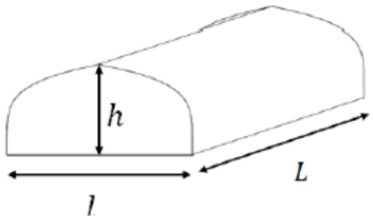
Γ3. Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(x)=-2x^2+3x+5$ να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των f, g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in [-1, 1)$.

Γ4. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε: $|f'(\xi)-2| \le 1$.

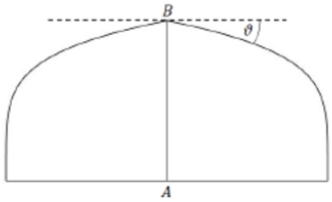
(Μονάδες, Γ1: 5 Γ2: 8 Γ3: 6 Γ4: 6)

Θέμα Δ

Στο *σχήμα 1* φαίνεται μία δεξαμενή πετρελαίου θέρμανσης και στο *σχήμα 2* το προφίλ της. Οι προδιαγραφές για την κατασκευή της είναι:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

α) το μήκος *L* της δεξαμενής πρέπει να είναι οκτώ μέτρα.

β) το πλάτος *l* της δεξαμενής πρέπει να είναι δύο μέτρα.

γ) το ύψος *h* της δεξαμενής πρέπει να είναι ένα μέτρο.

δ) η πλευρά μιας διατομής της δεξαμενής, κάθετης προς το μήκος της (προφίλ), πρέπει να σχηματίζει μια απότομη γωνία στην κορυφή, προκειμένου να αποφευχθεί η συσσώρευση πάγου κατά τη διάρκεια των χειμερινών μηνών. Για τη γωνία θ πρέπει να ισχύει $\varepsilon\varphi\theta > \frac{1}{6}$, (βλ. σχήμα 2).

ε) η χωρητικότητα της δεξαμενής πρέπει να είναι τουλάχιστον 13 κυβικά μέτρα, ώστε να εξασφαλίζεται η θέρμανση στο συγκρότημα καθ' όλη τη διάρκεια του χειμώνα.

(Δίδεται ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής της (προφίλ) επί το μήκος της).

Δ1. Αν θεωρήσετε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο *A* του *σχήματος 2*, να προσδιορίσετε ποια από τις ακόλουθες οικογένειες συναρτήσεων μπορεί να περιγράψει το πλευρικό περίγραμμα της δεξαμενής για $x \in [-1,1]$, όπου *k* θετικός ακέραιος αριθμός. Να λάβετε υπόψη σας ότι η συνάρτηση στο *σχήμα 2* δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο *B* :

$$f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}} \quad \text{ή} \quad f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1 \quad \text{ή} \quad f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

ΤΜΗΜΑ:.....
ΟΝΟΜΑ:.....
ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

Δ2. Αν $f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}}, x\in[-1,1]$ να προσδιορίσετε την τιμή του k ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προϋποθέσεις αναφορικά με τη γωνία θ και τη χωρητικότητα της δεξαμενής.

Δ3. Αν $k=5$ και $g(x)=f(x), x\in[0,1]$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των " $C_{g^{-1}}, x'x, y'y$ ". Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω εμβαδόν για να υπολογίσετε τον όγκο της δεξαμενής;

(Μονάδες, Δ1: 6 + 4 , Δ2: 5+5, Δ3: 3+2)