Γενίκευση
του Θεωρήματος Steiner – Lehmus

Δόρτσιος Κωνσταντίνος, μαθηματικός - kdortsi@gmail.com
Τσίντσιφας Γεώργιος, μαθηματικός - gtsintsifas@yahoo.com

Περίληψη - Πρόλογος

Το αντικείμενο της εισήγησης αυτής είναι ένα πρόβλημα της Γεωμετρίας, γνωστό από τα μαθητικά μας χρόνια. Όταν στο σχολείο διδαχθήκαμε τα πρώτα μαθήματα Θεωρητικής Γεωμετρίας μας ζητήθηκε να αποδείξουμε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι διχοτόμοι των παρά την βάση γωνιών είναι ίσες, κάτι που το κατάφεραν και οι μέτριοι μαθητές. Το αντίστροφο, όμως, ότι δηλαδή αν σε τρίγωνο δυο διχοτόμοι είναι ίσες, τότε να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ήταν για πολύ καλούς μαθητές.

Το τελευταίο αυτό πρόβλημα έχει μια ξεχωριστή θέση στη Γεωμετρία των τελευταίων εκατόν πενήντα ετών και είναι γνωστό ότι πάρα πολλές εργασίες έχουν γραφεί πάνω σ’ αυτό και πολύ μελάνι χύθηκε περιγράφοντας διάφορες λύσεις και σχετικές απόψεις.

Summary - Preface

The subject of this contribution is a problem of Geometry, known from our school years. When at school we taught the first lessons of Theoretical Geometry we asked to prove that in every isosceles triangle the two bisectors of the base angles are equal, something that managed even by the modest of the students. The inverse problem, however, i.e. if in a triangle two of its bisectors are equal, then the triangle is isosceles was given only to the best of the students.

The last problem has a special place in Geometry over the past one hundred and fifty years and it is well known that too much work have been done on it and a lot of ink poured out describing various solutions and related views.

Ιστορική αναδρομή

Το 1840 ο Christian Ludolph Lehmus (1780-1863), καθηγητής μαθηματικών στο Βερολίνο, αναρωτήθηκε για το είδος του τριγώνου του οποίου οι δυο διχοτόμοι είναι ίσες. Δυστυχώς ο Lehmus, εκείνη την εποχή δεν μπόρεσε να δώσει κάποια απάντηση στο πρόβλημά του και το έστειλε στον διάσημο Ελβετό μαθηματικό Jacob Steiner (1786 – 1863). Ο Steiner, όπως ιστορικά βεβαιώνεται βρήκε αμέσως τη λύση, αλλά τη δημοσίευσε τέσσερα χρόνια αργότερα, μόλις το 1844. Το έτος 1850 ο Lehmus βρήκε δική του λύση την οποία δημοσίευσε. Εν τούτοις ο Γάλλος μαθηματικός Rougevain τους πρόλαβε δημοσιεύοντας λύση το 1842. Από τότε, όπως γράφουν οι Coxeter και Greitzer στο βιβλίο τους Geometry Revisited ***[1]***, δημοσιεύτηκαν εργασίες στο θεώρημα των Steiner – Lehmus, σε διάφορα περιοδικά, το 1842, 1844, 1848, 1850 και από το 1854 έως το 1864 κάθε χρόνο και με μια αξιοθαύμαστη κανονικότητα για τα επόμενα εκατό χρόνια.

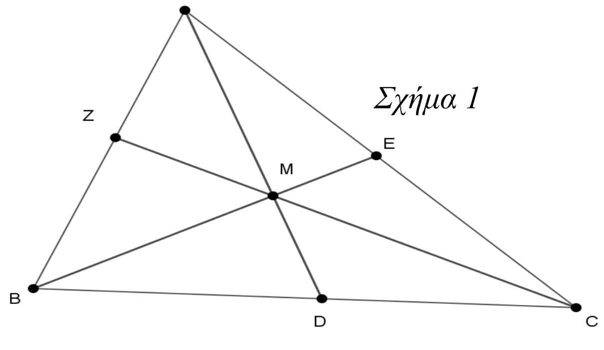
Όλες σχεδόν οι παραπάνω αποδείξεις είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό στοιχείο. Ήταν αποδείξεις ***«έμμεσες»,*** δηλαδή αξιοποιούσαν τη γνωστή μας μέθοδο της ***«απαγωγής σε άτοπο»*** ή ακόμα όσες ισχυρίζονταν ότι ήταν ***«απ' ευθείας»*** αποδείξεις, σε κάποιο σημείο χρησιμοποιούσαν ένα θεώρημα ή κάποιο λήμμα το οποίο είχε έμμεση απόδειξη. Έτσι στην προσπάθεια για απ' ευθείας λύση δημιουργήθηκε καινούργια φιλολογία επάνω στο ήδη διάσημο αυτό θεώρημα.

Η σημερινή έρευνα

Σχετικά πρόσφατα η έρευνα γύρω από το θεώρημα των Steiner – Lehmus πήρε την εξής κατεύθυνση:

Ερώτημα: ***«Πού πρέπει να βρίσκεται ένα σημείο M, μέσα σε ένα δεδομένο τρίγωνο ABC, ώστε αν δυο Cevians του σημείου αυτού είναι ίσες τότε το τρίγωνο αυτό να είναι ισοσκελές;»***

Είναι γνωστό ότι αν ένα σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου ABC, οι Cevians είναι τα ευθύγραμμα τμήματα AD, BE, CZ, όπου: $D = AM \cap BC, \quad E = BM \cap CA, \quad Z = CM \cap AB$. *(Σχ.1)*



Σχήμα 1

Οι L.J.Russel *[2]* και H.J.Woyde *[3]* αποδεικνύουν ότι αν M βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ και οι Cevians BE, CZ, είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Κατόπιν ο K. Tan *[4]* λύνει το ίδιο πρόβλημα για Cevians από σημείο της διαμέσου και ο L. Kelly για σημείο της συμμετροδιαμέσου *[5]*

Στην παρούσα εργασία θα βρούμε έναν ευρύτερο χώρο του σημείου M που απαντά στο **Ερώτημα**. Ο χώρος μάλιστα αυτός περιλαμβάνει όλες τις προηγούμενες εργασίες των προαναφερθέντων Μαθηματικών.

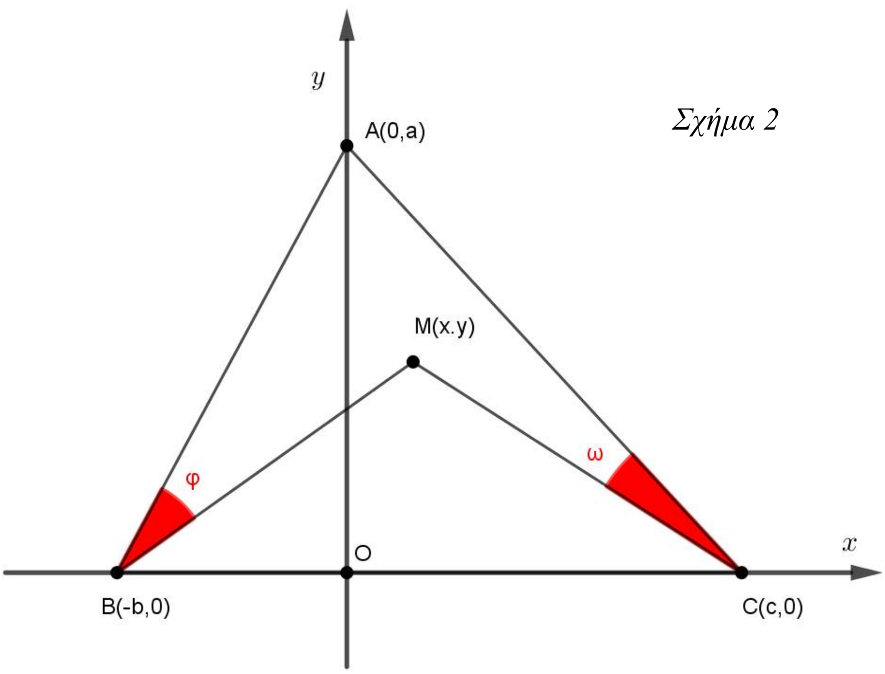
Ένας ενδιαφέρων γεωμετρικός τόπος

Πρόβλημα **Έστω ABC ένα τρίγωνο με $AC > AB$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος G των σημείων M του τριγώνου τέτοια ώστε:**

$$\widehat{MBA} > \widehat{MCA} \quad \textbf{(1)}$$

Λύση

Φέρουμε το ύψος AO του τριγώνου ABC και θεωρούμε το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο O, άξονα των τετμημένων την BC και άξονα των τεταγμένων την OA. *(Σχ.2)*



Θέτουμε: $A(0,a), B(-b,0), C(c,0)$ και $M(x,y)$, όπου $a, b, c, y, x+b, c-x$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί. Έτσι από τη σχέση (1) θα έχουμε ισοδύναμα:

$$(1) \Leftrightarrow \tan\left(\widehat{MBA}\right) > \tan\left(\widehat{MCA}\right) \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\tan(e_1, e_2) = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix}} \quad (3)$$

ο οποίος δίνει την εφαπτομένη της γωνίας των ευθειών:

$$e_1 : A_1 x + B_1 y = C_1 \quad \text{και } e_2 : A_2 x + B_2 y = C_2$$

ο τύπος (2) γίνεται:

$$\frac{ax - by + ab}{b(x+b) + ay} > \frac{ac - ax - cy}{c(c-x) + ay} \Leftrightarrow$$

$$(ax - by + ab)\left(c^2 - cx + ay\right) > (ac - ax - cy)\left(bx + b^2 + ay\right) \Leftrightarrow$$

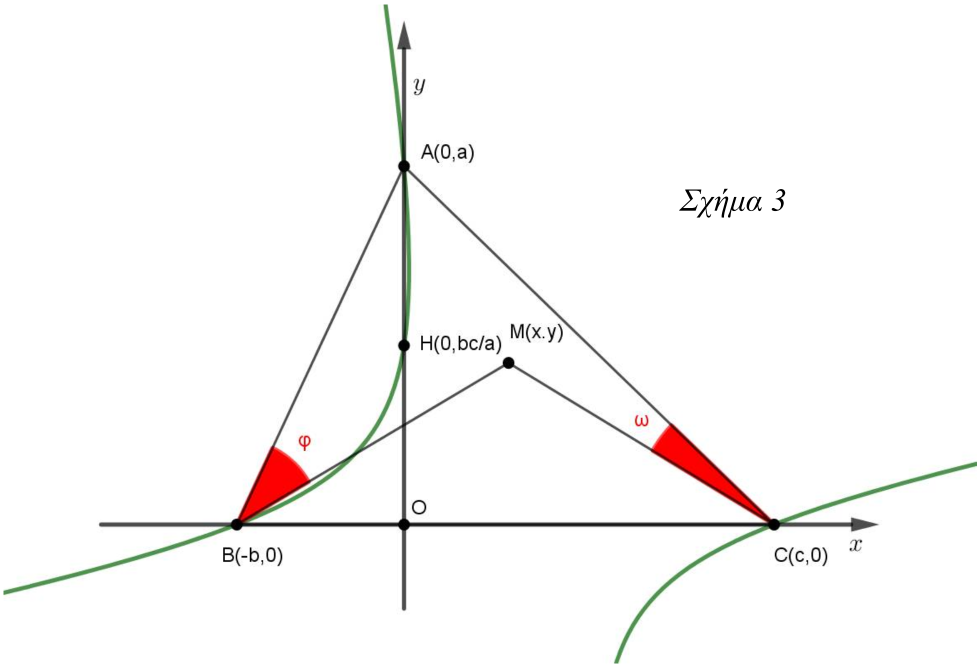
$$f(M) < 0, \quad (4)$$

όπου:

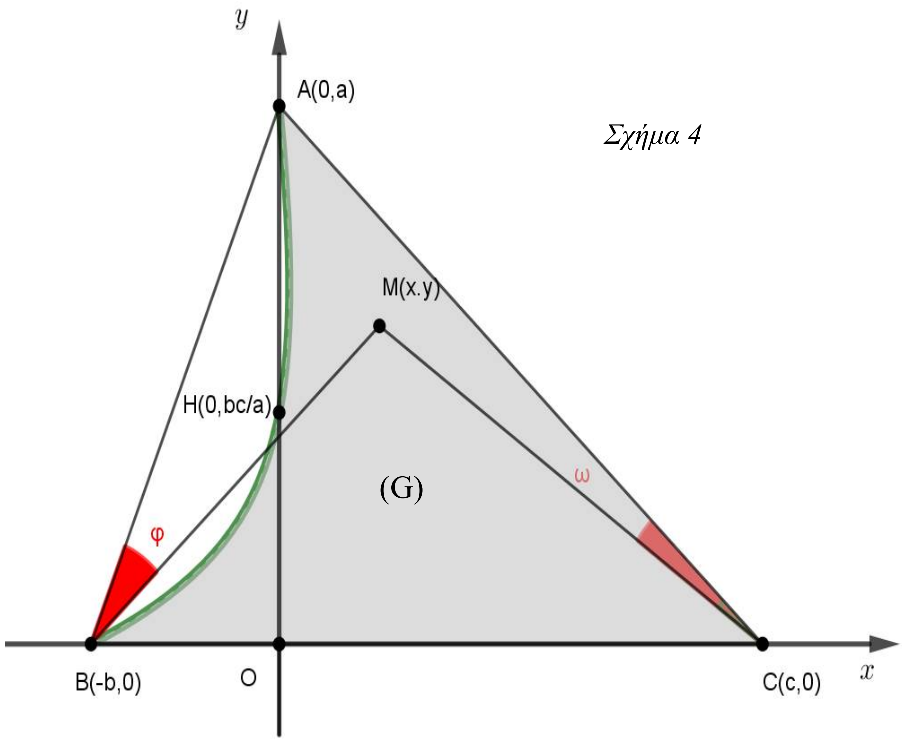
$$f(M) = ax^2 + \frac{2\left(a^2 + bc\right)}{b - c} xy - ay^2 + a(b-c)x + \left(a^2 + bc\right) y - abc \quad (5)$$

Η εξίσωση $f(M) = 0$, είναι μια ισοσκελής υπερβολή (p) της οποίας ο ένας κλάδος διέρχεται από τα σημεία $A(0,a), B(-b,0)$ και $H\left(0, \frac{bc}{a}\right)$, όπου H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Ο άλλος κλάδος διέρχεται από το σημείο $C(c,0)$. *(Σχ.3).*

Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος G, όπως προκύπτει από την (4) είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ των δύο κλάδων της ισοσκελούς υπερβολής (p). *(Σχ.4),* ***(Σχόλιο)***



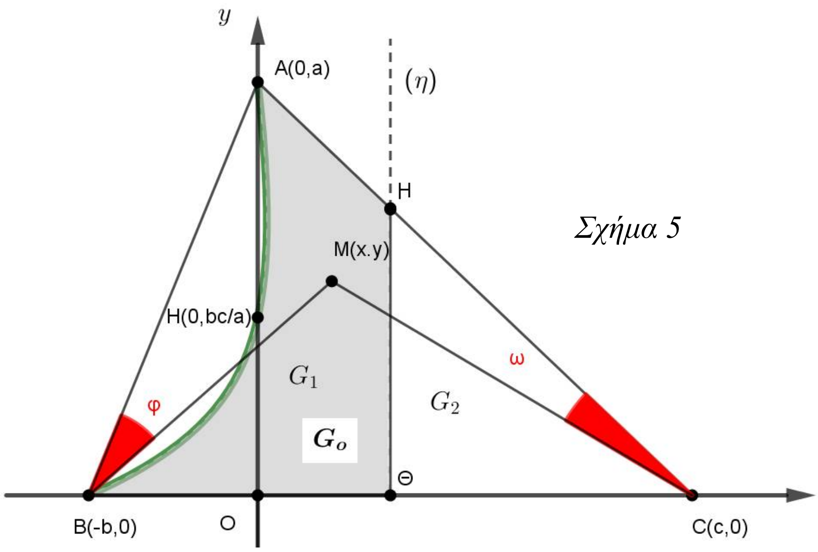
Σχήμα 3



Σχήμα 4

Παρατήρηση:

Αν θεωρήσουμε τη μεσοκάθετη (η) της πλευράς BC του τριγώνου ABC, παρατηρούμε ότι αυτή χωρίζει το τρίγωνο σε δύο περιοχές G_1 και G_2. Η περιοχή G_1, η οποία περιέχει το σημείο B, περιέχει σημεία M τέτοια ώστε: $\widehat{MBC} > \widehat{MCB}$ *(Σχ.5)*



Συνεπώς η περιοχή $G_o = G \cap G_1$ περιέχει σημεία M τέτοια ώστε:

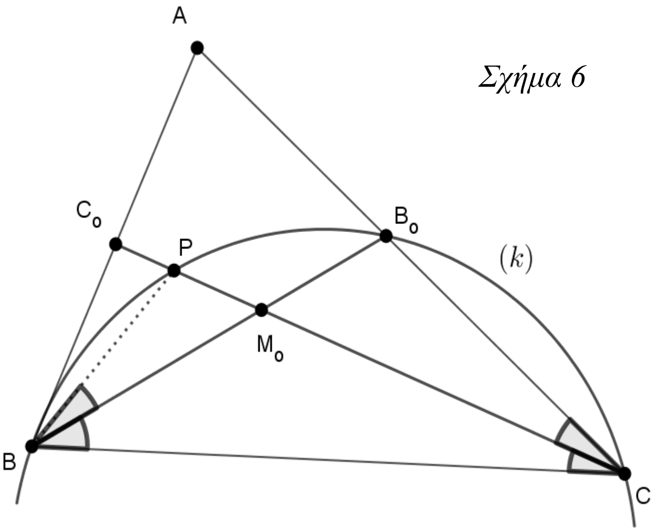
$$\widehat{MBA} > \widehat{MAC} \text{ και } \widehat{MBC} > \widehat{MCB}.$$

Απάντηση στο ερώτημα

Θεωρούμε σημείο $M_o \in G_o$ και BB_o, CC_o οι δύο Cevians του σημείου M_o τέτοιες ώστε

$$BB_o = CC_o \quad (6).$$

Θα δείξουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $AB = AC$ *(Σχ.6).*



Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο «απαγωγής σε άτοπο». Έστω ότι $AB \neq AC$ και μάλιστα $AB < AC$. Θα δείξουμε στην προκειμένη περίπτωση ότι:

$$BB_o < CC_o \quad (7)$$

Θεωρούμε τον κύκλο (k) που διέρχεται από τα σημεία B, B_o, C.

Τότε θα είναι:

$$\widehat{BB_oC} = \widehat{M_oBA} + \widehat{A} > \widehat{M_oCA} + \widehat{A} = \widehat{BC_oC} \Rightarrow$$

$$\widehat{BB_oC} > \widehat{BC_oC} \quad (8)$$

Από τη σχέση (8) προκύπτει ότι το σημείο C_o είναι εξωτερικό του κύκλου (k), δηλαδή θα υπάρχει τομή του τμήματος CC_o και του κύκλου (k). Έστω τότε ότι αυτό το σημείο είναι το P.

Θα δείξουμε ότι:

$$\widehat{PBC} > \widehat{B_oCB} \quad (9)$$

Πράγματι:

$$\widehat{PBC} = \widehat{PBB_o} + \widehat{M_oBC} > \widehat{PCB_o} + \widehat{M_oCB} = \widehat{B_oCB} \Rightarrow$$

$$\widehat{PBC} > \widehat{B_oCB}$$

Από την (7) που είναι μια ανισοτική σχέση γωνιών όμως κύκλου προκύπτει η ανισοτική σχέση των αντίστοιχων χορδών. Δηλαδή:

$$CP > BB_o \quad (10)$$

και τελικά:

$$CC_o > CP > BB_o$$

δηλαδή:

$$BB_o < CC_o$$

η οποία είναι η ζητούμενη σχέση (7) και η οποία αντιφάσκει με την δοθείσα σχέση (6).

Όμοια αν υποθέσουμε:

$$AB > AC$$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$BB_o > CC_o$$

η οποία πάλι αντιφάσκει με την δοθείσα σχέση (6).

Άρα δείξαμε την πρόταση:

Πρόταση:

Αν $M_o \in G_o$ και BB_o, CC_o οι δύο Cevians του σημείου M_o τέτοιες ώστε

$$BB_o = CC_o \quad (6).$$

τότε το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $AB = AC$.

Με άλλα λόγια έχουμε αποδείξει ότι για κάθε σημείο M_o του τόπου G_o, η ισότητα των Cevians οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Παρατηρήσεις

1η) Είναι αξιόλογο να παρατηρήσει κανείς *(Σχ.7)* ότι η εφαπτομένη(p) μιας παραβολής στο σημείο $A(0,a)$ είναι η ευθεία (q) με εξίσωση:

$$(q): y = \frac{a\left(2a^2 + b^2 + c^2\right)}{(b-c)\left(a^2 - bc\right)}x + a \quad (11)$$

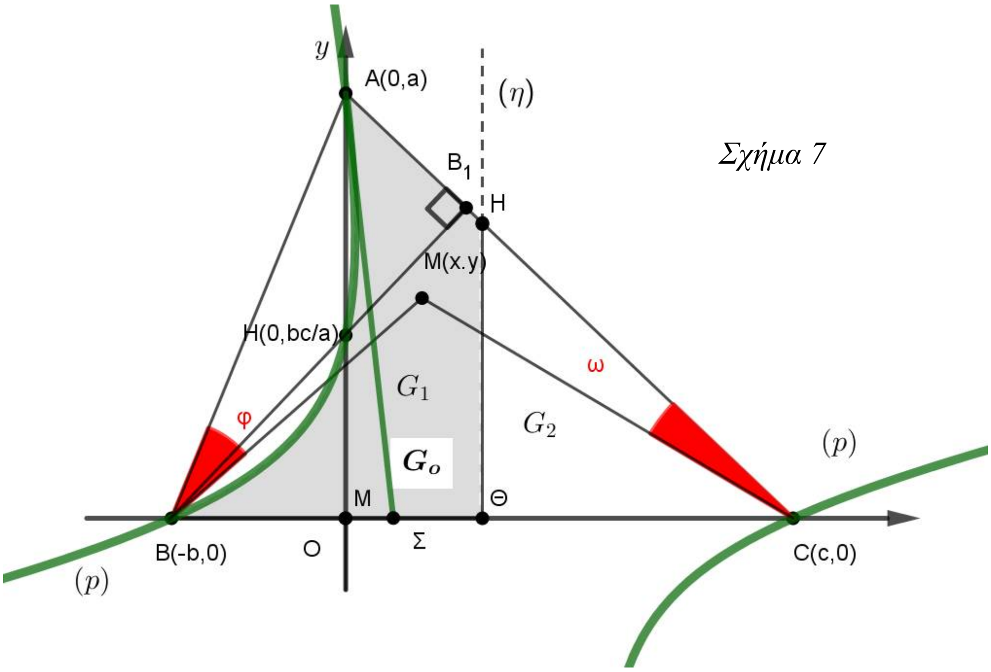
Ο τύπος (11) προκύπτει από την εξίσωση όμως ισοσκελούς υπερβολής (5) σύμφωνα με τον γενικό τύπο:

$$Axx_1 + B\left(x_1y + xy_1\right) + Cyy_1 + D\left(x + x_1\right) + E\left(y + y_1\right) + Z = 0 \quad (12)$$

ο οποίος δίνει την εφαπτομένη μιας δευτεροβάθμιας καμπύλης με εξίσωση:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+Z=0$$

σε ένα σημείο αυτής $T(x_1,y_1)$. ***[7]***



Έτσι αν εφαρμόσουμε τον τύπο (12) για την ισοσκελή υπερβολή (q) και για το σημείο $A(0,a)$ θα προκύψει μετά από πράξεις η εξίσωση (11).

Η ευθεία (q) τέμνει την πλευρά BC στο σημείο Σ, του οποίου οι συντεταγμένες είναι:

$$\Sigma\left(\frac{(b-c)(bc-a^2)}{2a^2+b^2+c^2},0\right)$$

και εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι το σημείο αυτό ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{B\Sigma}{\Sigma C}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}=\frac{AB^2}{AC^2} \quad (13)$$

η οποία είναι μια σχέση που δηλώνει ότι η AS είναι η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC η οποία αντιστοιχεί στην πλευρά BC. Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των L.J. Russel, H.J.Woyde, K. Tan και L.M. Kelly εμπεριέχονται στα αποτελέσματά μας.

2η) Πρέπει να τονιστεί ακόμα ότι στην ανωτέρω εργασία δεν προσδιορίστηκε ολόκληρος ο τόπος G' της περιοχής του τριγώνου ABC, για τον οποίο:

Αν $M \in G'$ και οι Cevians του σημείου αυτού είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Όμως βρέθηκε ένα υποσύνολο G_o τέτοιο ώστε $G_o \subseteq G'$.

Επίλογος

Η προσπάθεια της όλης εργασίας έφτασε τελικά στον προσδιορισμό ενός τόπου γενικότερου των τόπων εκείνων στους οποίους εργάστηκαν οι L.J.Russel - H.J.Woyde, καθώς και οι K. Tan και L. Kelly που ήταν η διχοτόμος μιας γωνίας του τριγώνου, η διάμεσος και η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου αυτού αντίστοιχα.

Σχόλιο

Ο εύρεση του γεωμετρικού αυτού τόπου στηρίζεται στην ακόλουθη πρόταση:

«Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x,y) = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2, \quad a,b>0,\ a>b \quad (1)$$

η οποία παριστά μια υπερβολή και η οποία χωρίζει το όλο επίπεδο σε τρία ανοιχτά χωρία, έστω τα $(\cap)$ $(\cap_1)$ $(\cap_2)$ (Σχ.8)

Τότε: $\forall M \in (\cap)$ θα ε ίναι $f(x,y) < 0 \quad (2)$

Απόδειξη

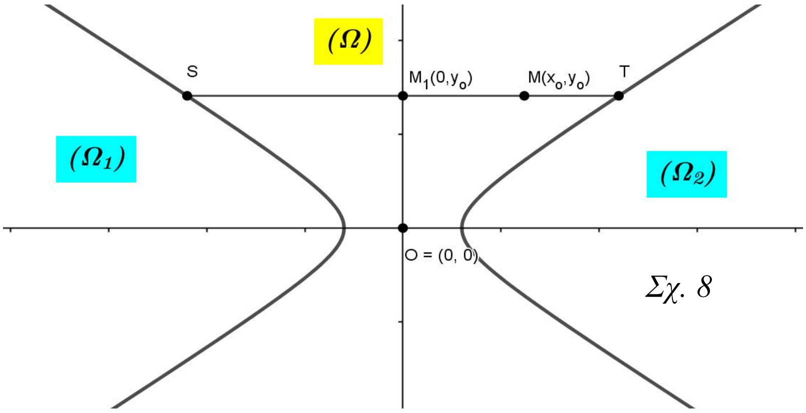
Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο. Πράγματι, παρατηρούμε λόγω της (1) ότι: $f(0,0) = -a^2b^2 < 0 \quad (3)$ και έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $\mathrm{M}(x_o, y_o)$ του χώρου (Ω) τέτοιο ώστε:

$$f(x_o, y_o) > 0 \quad (4).$$

Θεωρούμε $\mathrm{M}_1(0, y_o) \in (\Omega)$ την προβολή του σημείου M στον άξονα των $y'y$ και τότε θα είναι:

$$f(0, y_o) = -a^2y_o^2 - a^2b^2 < 0 \quad (5)$$

Ύστερα από αυτά θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση: $F(x)=f(x,y_o), x\in R$, λόγω των (4) και (5) θα είναι: $F(0)=f(0,y_o)<0$, και $F(x_o)=f(x_o,y_o)>0$.



Σχ. 8

Επομένως λόγω του Θεωρήματος του Bolzano θα υπάρχει αριθμός $\xi\in(0,x_o): F(\xi)=0 \quad (6)$. Η σχέση (6) δηλώνει ότι $f(\xi,y_o)=0$, δηλαδή ότι το σημείο $\Xi(\xi,y_o)$ ανήκει στην υπερβολή κι όχι στο ανοιχτό χώρο (Ω), δηλαδή άτοπο.

Βιβλιογραφία

1. *H.S.M. Coxeter – S.L.Greitzer. Geometry Revisited, Random House.*
2. *L.J.Russel. The "equal bisector" Theorem. Math Gazette 45(1961) p. 214-215.*
3. *H.G.Woyde. A note inspiral by the Steiner – Lehmus theorem. Math Gazette57(1973), p. 338.*
4. *K. Tan. Problem 555, a triangular inequality. Math magazine 38(1963), p. 57-58.*
5. *L.M.Kelly. Problem E613, A critevion for unequal cevians. Amer. Math. Montley 5(1944), p. 590-591.*
6. *G. Tsintsifas. Problem 939. Crux Mathematicorum 11(1985), p.224, 225, 251, 252.*
7. *Γρηγόριος Τσάγκας. Αναλυτική Γεωμετρία. Εκδοτικός οίκος αδελφών Κυριακίδη. Κων/νου Μελενίκου 11, Θεσσαλονίκη, 1978. Σελ.196.*