

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Μονάδες 3

Λύση 1

- Δ1.** Η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ και $\alpha > 1$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $2e^{x-\alpha}$ (παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $x-\alpha$ που είναι πολυωνυμική και της $2e^x$, που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και x^2 (παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$. Οπότε είναι και συνεχής.

Επίσης η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $x-\alpha$ που είναι πολυωνυμική και της $2e^{x-\alpha}$ (παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $2e^x$ που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και $2x$ (παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$. Τότε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha,$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha,$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} < 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} < 1 \Leftrightarrow x - \alpha < 0 \Leftrightarrow x < \alpha,$$

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ και είναι κυρτή στο

διάστημα $[\alpha, +\infty)$ και αφού $f''(\alpha) = 0$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \alpha$, δηλαδή η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2 - \alpha^2)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			
Σ.Κ.			

Λύση 2

- Δ1.** Η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού ο τύπος της προκύπτει από πράξεις και σύνθεση μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$. Οπότε είναι και συνεχής.

Επίσης η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για τον ίδιο λόγο, με $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$. Τότε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha,$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha,$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} < 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} < 1 \Leftrightarrow x - \alpha < 0 \Leftrightarrow x < \alpha,$$

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ και είναι κυρτή στο

διάστημα $[\alpha, +\infty)$ και αφού $f''(\alpha) = 0$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \alpha$, δηλαδή η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2 - \alpha^2)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			
Σ.Κ.			

Λύση 3

- Δ1.** Η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού ο τύπος της προκύπτει από πράξεις και σύνθεση μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$. Οπότε είναι και συνεχής.

Επίσης η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για τον ίδιο λόγο, με $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$. Τότε:

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow x - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha \text{ οπότε έχουμε τον πίνακα :}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			
Σ.Κ.			

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ και είναι κυρτή στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ και αφού $f''(\alpha) = 0$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \alpha$, δηλαδή η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$, δηλαδή το $(\alpha, 2 - \alpha^2)$