ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w με $|w|=2$ και $z=\frac{4-w}{w-1}$.

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $|z|$.

β) Να δείξετε ότι :

i) $|z-w|\leq 4$ και ii) $|w^2-4|\leq 4|w-1|$

γ) Να δείξετε ότι : $|w^4+8(2-w^2)|+32\mathrm{Re}(w)\leq 80$.

δ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z , w ώστε η απόσταση των εικόνων τους να είναι μέγιστη .

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(1)=1$, $f'(1)=0$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g, με τύπο $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}, & x>1\\ 1, & x=1\end{cases}$. Σας ζητάτε να :

Α) δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$

Β) βρείτε τη παράγωγο της g

Γ) δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Δ) δείξετε ότι $\dfrac{\int_1^a f(t)dt}{\int_1^b f(t)dt} < \dfrac{a-1}{\beta-1},\ 1<a<\beta$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot \eta\mu x}{e^x-1}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

ii. Να βρείτε της ασύμπτωτες της C_f και να δείξετε ότι έχουν άπειρα κοινά σημεία

iii. Αν $g(x)=e^x\cdot f(x), \forall x\in R$ τότε:

a) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f ,g και τις ευθείες $x=0, x=\pi$

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$

ΘΕΜΑ 4ο

A) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln x + x,\ x\in(0,+\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{1+e} h^{-1}(x)dx$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, έστω $\rho\in(0,+\infty)$.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{h(x)}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{h^2(x)}$.

B) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+\dfrac{x^2}{2}, x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\rho\in(0,+\infty)$ του A) b).

ii) Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (1, f(1)) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{11}{6}$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to\rho}\frac{f'(x)}{x-\rho}$, όπου $\rho \in (0,+\infty)$ του A) ii).

ΘΕΜΑ 5º

Έστω οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ με τις ιδιότητες $z.w \neq 0$, $|z| = |w|$ και $w = |z^2| + \bar{z}i$. Να δείξετε ότι :

i) ο μιγαδικός w δεν είναι φανταστικός.

ii) οι εικόνες των μιγαδικών z , w ανήκουν σε δυο τεμνόμενους κύκλους.

iii) οι εικόνες των μιγαδικών z , w δεν ταυτίζονται.

ΘΕΜΑ 6º

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση h , που έχει τις ιδιότητες:

$h'(x) = h(x) + x + e^x - 1, \forall x \in R$ (1) και $h(0) = 0$.

A. i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (1 + xe^{-x} - e^{-x})dx$

ii) Να βρείτε τον τύπο της h

iii) Εάν $h(x) = x(e^x - 1), \forall x \in R$, να δείξετε ότι $h(x) \geq 0, \forall x \in R$

B. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, για την οποία ισχύουν:

$\int_0^1 f(x)dx = 1$ (2) και $\int_0^1 (1-f(x))e^{-f(x)}dx \le 0$, σχέση (3)

Να δείξετε ότι $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{2\mathbf{x}-1} \frac{1}{\sqrt{4-(\mathbf{t}+1)^2}}\mathbf{dt}$

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της F.

β) Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{F}(\eta\mu\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\pi}{6}, \mathbf{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{4-(\mathbf{t}+1)^2}}$, τους άξονες και την ευθεία $\mathbf{x} = \sqrt{3} - 1$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-\mathbf{x}^2}}\mathbf{dx}$.

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο R και η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) ,0 < α < β της γραφικής παράστασης C της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Α . Να δειχτεί ότι:

i. Ισχύει $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$

ii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f''(x) \neq 0$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, υπάρχει ακριβώς μια ευθεία ε που εφάπτεται στη C στο $M(x_o, f(x_o))$ και η οποία περνά από την αρχή των αξόνων.

Β. Αν η f έχει τα κοίλα κάτω στο (-∞ , 0]να δειχτεί ότι:

i. να δειχτεί ότι αν $\lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{x} = L$ τότε $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x-1)-f(x)}{x} = L$

ii. να δειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x < 0$ με f(0)=0 είναι γνησίως φθίνουσα .

Γ. Αν το σημείο Β ανήκει στην εφαπτόμενη στο $M(x_o, f(x_o))$ να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (α , β) τέτοιο ώστε: $f'(\xi)(\xi - \alpha) = f(\xi) - f(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ με f(0)=f ′(0)=0, για την οποία ισχύει f ′(x) > f(x), $x \in (0,3]$.

Α. Να δείξετε ότι:

α) $f(x) > \int_0^x f(t)dt$, $x \in (0,3]$.

β) η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 3].

γ) $\int_0^x f(t)dt > 0$, $x \in (0,3]$.

Β. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $\varphi(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ είναι κυρτή στο [0, 3].

β) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}f(t)dt > \int_0^1 f(t)dt$.

Γ. Αν $\int_0^2 f(t)dt = 1$, τότε:

α) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της Cφ στο σημείο της Α(2, φ(2)).

β) αν Ε είναι εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cφ, τον άξονα x΄x και τις κατακόρυφες ευθείες x=2, x=3 , να αποδείξετε ότι: $E > \dfrac{2\varphi(2)+\varphi'(2)}{2}$.

ΘΕΜΑ 10ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=\sqrt{3}$, $f'(\alpha)=2$,

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{8}}\cdot f(\beta)+\int_a^x \sqrt{\kappa+f^2(t)}dt$, $x\in[\alpha,\beta]$ και $\kappa\in\mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί το κ.

ii) Να δείξετε ότι f(x) > 0, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

iii) Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$.

ΘΕΜΑ 11ο

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=f'(x), \forall x\in[0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
ii. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iii. Να δείξετε ότι ισχύει $f\left(f(x)\right)=\int_0^x tf'(t)dt, \forall x\in[0,+\infty)$

iv. Να ελέγξετε εάν για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>x$ ή $f(x)<x$

v. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x, x\in(0,+\infty)$ έχει ακριβώς μία θετική λύση k

vi. Να δείξετε ότι $f(x)>x, \forall x>k$ και $f(x)<x, \forall x\in(0,k)$

vii. Να δείξετε ότι $f(x)>\frac{1}{2}x^2, \forall x>k$ και $f(x)<\frac{1}{2}x^2, \forall x\in(0,k)$

viii. Εάν ισχύει επιπλέον $xf^{-1}(x)=\alpha f(x), \forall x\in[0,+\infty)$, όπου α Ελληνικότατη θετική σταθερά, να βρείτε τον τύπο της f.

ΘΕΜΑ 12ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(\alpha-1)>\alpha-1$, $f(\alpha)<\alpha$ και $f(\alpha+1)>\alpha+1$, για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, η γραφική παράσταση της f και η διχοτόμος της 1ης-3ης γωνίας των αξόνων έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία.

β. Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $f'(x)-1=f(x)-x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(\alpha-1,\alpha+1)$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha-1,\alpha+1)$ ώστε: $f''(\xi)>0$.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $\int_0^1 t^2f(t)dt\leq 1$.

Έστω ακόμη η συνάρτηση $g(x)=\int_0^1\left(f(t)-2xt^2f(t)+5x^2t^4\right)dt$, $x\in\mathbb{R}$ με $g(0)\succ 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

γ) Αν ο αριθμός z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ και ισχύει $|z_1|=\sqrt{3}$ τότε:

(i) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

(ii) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}\le|\mathrm{Im}(z_1)|\langle\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 14ο

Έστω οι συναρτήσεις

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-1-\mathbf{x}-\frac{\mathbf{x}^2}{2},\mathbf{x}\ge 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2},\mathbf{x}\ge 0$$

i. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία
ii. Να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{x}\ge 0$ ισχύει $\mathbf{g}(\mathbf{x})\ge 0$, πότε ισχύει η ισότητα;
iii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης
iv. Να σχεδιάσετε στην τελευταία σελίδα του τετραδίου σας και στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των f στο [0,1] και της αντίστροφης της στο $\mathbf{f}([0,1])$
v. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}+\int_1^{\mathbf{e}}\sqrt{\ln \mathbf{x}}\,\mathbf{dx}=\mathbf{e}$

vi. Να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{e}{2}$

ΘΕΜΑ 15ο

Έστω η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα $f^3(x)+x^2f(x)-2\int_1^x tf(t)dt = x-1, \forall x\in[1,+\infty)$

i. Να δείξετε ότι $f(1)=0$
ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
iii. Να δείξετε ότι $0\le f(x)\le\sqrt{\frac{x-1}{2}}, \forall x\in[1,+\infty)$
iv. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη
v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f'
vi. Να δείξετε ότι $2-\sqrt{3} > \int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: f , F με: $f(t)=\frac{e^t}{t}$ και $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση: $G(x)=\begin{cases} xF(x), 0<x<1 \\ 0, \quad x=0 \\ x^2f'(x), x\ge 1\end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

α. η G είναι συνεχής

β. η G έχει ολικό ελάχιστο.

γ. η G είναι κυρτή

δ. για κάθε $x\ge 0$ ισχύει: $G(x)\ge e(x-1)$

ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με

$$\int_0^x 2t\eta\mu t f(t)dt \geq \int_0^x t^2 f^2(t)dt + \int_0^x \eta\mu^2 t dt \quad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty) .$$

i) Να αποδείξετε ότι $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη.
ii. να βρείτε τα ακρότατα στο [- π, π]
iii. να λυθεί η $f(x) + f(x^2) = f(x^3) + f(x^{2009})$ στο [0, π]

iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεταξύ των C_f , ψ=x ημ1 και του άξονα των x είναι μικρότερο του π+ημ1 .

iv) Αντί του (3) να βρείτε ότι το εμβαδόν μεταξύ των ψ=xf(x) , ψ=x ημ1 και του άξονα των x .

ΘΕΜΑ 18ο

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $\ln\xi + \xi - 3 = 0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Για το ξ του ερωτήματος Α ,να δείξετε ότι

α. για κάθε x > 0, ισχύει: $f(x) + \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} \geq 0$.

β. υπάρχει $x_0 > \xi$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0)+f\,'(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ 19ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x)= x^2+|z-4-3i|x+2010,\ \ x\in\mathbb{R}$, για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z\neq 4+3i$. Αν η γραφική παράσταση της f(x) στο σημείο της $A\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε:

i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

ii) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-\bar{z}|$.

iii) Να αποδείξετε ότι $9\leq|z+4+3i|\leq 11$.

ΘΕΜΑ 20ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{2009}+x^{2007}+x$, $x\in\mathbb{R}$ και η γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $g(x)$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(fog)(2009)$ και $(fog)(2008)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ. Να δείξετε ότι: $f(x) < f^{-1}(x)$ για κάθε $x < 0$ και $f(x) > f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 21ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)\neq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Έστω επίσης η συνεχής συνάρτηση $g:R\to R$, τέτοια ώστε:

- $f^2(x)+g^2(x)=1, x\in\mathbb{R}$
- $f'(g(x))=f(g(x))f^2(x), x\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(g(x))-1}{g(x)}$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x_0/\,g(x_0)=0\}$.

γ) Να δείξετε ότι $-1<g(x)<1, x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τη συνάρτηση f στο $x\in(-1,1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση f (ημx) = f (συνx).

ε) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\sqrt{2}}{e}<\left(\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^{\frac{3}{2}}<2e\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{t+1}dt$.

i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\eta\mu(x-1)}{(x-1)^2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\ln t}{t+1}dt<\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{\ln t}{t+1}dt$.

iii) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = 1 και x = e.

v) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\le x-1$, για κάθε $x\ge 1$.

ΘΕΜΑ 23ο

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [-2 , 2] παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα (-2 , 2) για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0) = 3$ και $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω και οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z-i| = 2$.

Να αποδείξετε ότι :

α) Η f δεν έχει σημεία καμπής .

β) $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$

γ) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) -1$ διατηρεί πρόσημο στο (-2 , 2) .

δ) Η f είναι κοίλη

ε) $f(x) = 1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2 , 2]$

στ) Η γραφική παράσταση της f είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου των μιγαδικών z και ότι η εφαπτομένη της , στο σημείο που είναι η εικόνα του z για τον οποίο το μέτρο $|z|$ γίνεται μέγιστο , είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

ζ) $\int_0^2 (f(x)-1)dx = \pi$.

ΘΕΜΑ 24ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z\neq\frac{1}{2}$ για τους οποίους ισχύουν $f^2(x)+\eta\mu^2 x = 2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\left|\dfrac{z-2}{2z-1}\right|$.

α) Να δείξετε ότι $|z|=1$

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{(z+i)^{10}}{z^{10}-1}$ είναι πραγματικός .

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(5+|z+3-4i|)x=x^3+10$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [1 , 2] .

ΘΕΜΑ 25ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $xf(x)\ln[f(x)]=1,\ x>0$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x)>1$ για κάθε $x>0$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $f(x)f(f(x))>f(1)$ για κάθε $x>0$.

δ) Να βρείτε τους $x_1,x_2>0$ για τους οποίους ισχύει: $f(x_1)=e$ και $f(x_2)=e^2$.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 26ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=2\ln x+x^2-1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ε) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+f(x^2)=f(x^5)+f(x^{10})$.

στ) Αν $\alpha,\beta>0$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

ΘΕΜΑ 27ο

Έστω συνάρτηση f ώστε: $\left(f(x)\right)^3+f(x)+e^{f(x)}+2=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι: η συνάρτηση g με $g(x)=f(2-3x)-f(3+2x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Να λυθεί η ανίσωση: $f\left(g\left(x^2(x-1)\right)\right)>f\left(g\left(x(4-x)\right)\right)$.

ΘΕΜΑ 28ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [α, β] και ισχύει $f(x)\geq g(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Β. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν a, β $\in\mathbb{R}$, με α < β, να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)<\frac{f(a)+f(\beta)}{2}$.

ii. $f(x)-f(\alpha)\leq f'(\beta)(x-a)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

iii. $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$

ΘΕΜΑ 29ο

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ συνάρτηση f που έχει συνεχή παράγωγο στο $(0,1)$ και η εξίσωση: $z^3+f(1)z^2-z+f(0)=0$ (1)

Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό $1+i$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(\xi_1)=0$.

β. Υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $2f'(\xi_2)+7=0$.

γ. Υπάρχουν $\xi_3,\xi_4 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi_3)f'(\xi_4)=\dfrac{3}{2\xi_1-2\xi_1^{\,2}}$.

δ. Αν οι αριθμοί $f'(\xi_3)$, $f'(\xi_4)$ δεν είναι και οι δύο αρνητικοί να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 30ο

Α. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & , \ x>0 \\ e & , \ x=0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=e^x-x^2-1\ , \ \text{με} \ \ x\in\mathbb{R}.$$

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

β) Να αποδείξετε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση παρουσιάζει ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση h ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x \ge 0 \\ g(x) & , \quad x<0 \end{cases}$$

. Να αποδείξετε ότι η h είναι ''1-1''.

ΘΕΜΑ 31ο

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- $0<f'(x)\le 4$, για κάθε $x\in(0,1)$.
- $f(0)+f(1)=0$
- $f(0)<0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2f(1)$.

γ) ισχύει $2x-2<f(x)<2x$, για κάθε $x\in(0,1)$.

δ) ισχύει $\left|\int_0^1 f(x)dx\right|<1$.

ΘΕΜΑ 32ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-x)-x$, με $x<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\ln(1-x)$ σε μοναδικό σημείο, το $O(0,0)$.

γ) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να λυθεί η εξίσωση $f\left(2008+f^{-1}(x)\right)=0$.

δ) Αν $g(x)=1-e^{x}$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση της σύνθεσης $(f\circ g)$, τη συνάρτηση της σύνθεσης $(g\circ f)$ και να αποδείξετε ότι

$$(f\circ g)(x)=e^{x}(g\circ f)(x) .$$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1-e$.

ΘΕΜΑ 33ο

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f η οποία για κάθε $x\in(-1,1)$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)\neq 0$ και $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)=x$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $συν\left(\int_0^x f(t)dt\right)=\dfrac{1}{f(x)}$.

β) $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

γ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση αν $g(x)=3x^4+4x^3-12x^2+f(0)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης g.

ΘΕΜΑ 34ο

Δίνεται η συνάρτηση F με $F(x)=\int_1^x \frac{e^{tx}}{t}dt$.

α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F και η $F'(x)$.

β)Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{x-1}$

γ) Να αποδείξετε την ανίσωση $e^x \ln x \le F(x) < \ln x$ με $0<x<1$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $y'y$ είναι ασύμπτωτη της F.

ΘΕΜΑ 35ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x^2}$, για κάθε $x>0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{2\sqrt{3}}^{3} e^x dx \le \int_{2\sqrt{3}}^{3} x^e dx$ για κάθε $x>0$.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $h(x)=g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)-\ln^2 x$

είναι σταθερή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt+2-2xf(x)=\frac{2}{x}-\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t}dt$, $x>0$.

ΘΕΜΑ 36ο

Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο [2002, α] με α >2002 ισχύουν f(2002) = g(2002) = 1 και $f(x)+g(x)=\int_{2002}^{\alpha} f(t)g(t)dt$ για κάθε $x\in[2002,\alpha]$, τότε να αποδειχθεί ότι:

i. g(x) = 2 - f(x) .

ii. $\int_{2002}^{\alpha}\left(f(t)-1\right)^2 dt=\alpha-2004$.

iii. $\alpha \geq 2004$.

iv. α) Αν $h(x)=\int_{2002}^{x}\left(f(t)-1\right)^2 dt$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (2002, 2004)$ ώστε $h'(x_o)=0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f\,'$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο .

γ) η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 37ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1 , z_2, z_3 με εικόνες Α, Β, Γ αντίστοιχα. Αν ισχύει $z_3+i^{2009}z_1=\left(1+i^{2009}\right)z_2$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ii) Να αποδείξετε ότι $2\left(|z_3|^2+|z_1|^2\right)\geq\left(|z_3|+|z_1|\right)^2$.

iii) Αν $|z_2|=2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}\left(z_3\overline{z_1}\right)\leq 4$.

iv) Αν $|z_3|^2+|z_1|^2=2|z_2|^2$, όπου $z_1 = \alpha + f(\alpha)i$, $z_3 = \beta + f(\beta)i$ με $\alpha.\beta > 0$ και η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\neq 0$, είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι: α) Ο αριθμός $z_3\overline{z_1}$ είναι πραγματικός.

β) Υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 38ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

ii) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.

iv) Η f είναι αντιστρέψιμη και αν $f^{-1}(x)=\int_0^x h(t)dt$, όπου h μία συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

ΘΕΜΑ 39ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Αν οι συναρτήσεις f^{-1} και f' είναι συνεχείς και ισχύει

$2x^2+3x+\int_3^{f(x)} f^{-1}(t)dt=5+\int_1^x f(1-t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(1-x)=4x+3+xf'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ϵ (0 ,1) τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f'(1)=-4$.

iii) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = 3$, $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E = 1$ τ.μ .

ΘΕΜΑ 40ο

Έστω οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f , g , φ με $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, $\varphi(x)>0$

και η συνάρτηση $h(x)=\frac{\int_0^x t\varphi(t)dt}{\int_0^x \varphi(t)dt}$ με $\int_{h(2)}^{h(-1)} f(x)dx>0$.

i) Να δειχθεί ότι η h είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii) Αν $h(0) = 0$, να δείξετε ότι η h είναι ''1-1'' στο $\mathbb{R}$.

iii) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο (α, β), με $0 < \alpha < \beta$, $f(\beta) > g(\beta)$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, τότε να δείξετε ότι:

α) υπάρχει ένα μόνο $\xi_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_o) = g(\xi_o)$.

β) η εξίσωση $h\left(\dfrac{\int_{\beta}^{x} g(t^t)dt}{x-\alpha}\right)=h\left(\dfrac{f(x^x)g(x)}{\beta-x}\right)$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ΘΕΜΑ 41º

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $1 < f(0) < 2$, ώστε να ισχύει $f'(x)=f^2(x)-4f(x)+5$, για κάθε $x \in [0,1]$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι $f(1) > 2$.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

iv) Αν δίνετε ότι $\dfrac{f(0)}{f(1)}=\alpha$ και $\int_0^1 f(x)dx=\beta$, να υπολογίσετε το $I=\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}dx$.

ΘΕΜΑ 42º

Έστω ο μιγαδικός z με $|z| < 2$.

i) Να περιγραφεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

ii) Αν $w=\frac{1}{z-2}$, να δειχθεί ότι $\mathrm{Re}(w)<-\frac{1}{4}$.

iii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(2-x)e^{x}-|z|=0$ έχει μοναδική λύση $\xi \in (1, 2)$.

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{x}-|z|}{e^{x}-|z|x}$, $x\geq 1$. Να δειχθεί ότι

$f(x)\leq\frac{1}{\xi-1}$.

ΘΕΜΑ 43ο

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ και $\int_{1}^{|z|} f(x)dx=0$.

i) Να δειχθεί ότι $f(x) > 0$.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(|z+\bar{z}|-3\right)x^{3}+x}{\left(|z-\bar{z}|-3\right)x^{2}+x}$.

iv) Αν το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι μικρότερο του $|z+2\bar{z}|$ τότε, να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{0}^{x} f(t)dt=3x^{2}+6x-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 44ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και ο μιγαδικός z με την ιδιότητα

$|z-4|=2|z-1|$. Αν $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)}$, $\beta=\int_1^e f(x)dx$ και $\gamma=f'(e)+|z|$, τότε:

i) να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3\alpha)$ και $f(10\beta)$.

ii) να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $\gamma f(x) = 1$.

iii) να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{x}{e}} e^{-t^2}dt \geq \int_0^{\ln x} e^{-t^2}dt$ για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 45ο

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$, με $\mathrm{Im}(z) = 1$. Θεωρούμε και την

συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\ln\left(e^x+|z|\right)$.

i) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τη καμπυλότητα.

iii) Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $\frac{|z|}{e^{x+1}+|z|}<f(x+1)-f(x)<\frac{|z|}{e^x+|z|}$

iv) Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν ισχύει ότι:

$$\int_0^1\left[x^2f'(x)+2xf(x)\right]dx=-\ln 2 \quad .$$

ΘΕΜΑ 46ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει η σχέση : $f(x)=-e^{f(0)}+\int_0^x \frac{1}{1+e^{f(t)}}dt$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την καμπυλότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να υπολογισθούν τα όρια : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

iv) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|f(\beta)-f(\alpha)| \le |\beta-\alpha|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + e^x = 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

vi) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

vii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \frac{f^2(0)}{2} - f(0) - 1$.

ΘΕΜΑ 47ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z}$ και $\mathbf{w} = \mathbf{z} + \mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{z}}$.

i) Να δείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του μιγαδικού $\mathbf{z}$ η εικόνα του $\mathbf{w}$ κινείται πάνω στη **διχοτόμο** του **1ου** και **3ου** τεταρτημορίου των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.

ii) Αν $\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{i}$, με $|\boldsymbol{\alpha}| \neq |\boldsymbol{\beta}|$, να δείξετε ότι η αρχή των αξόνων **O(0 , 0)** και οι εικόνες των $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{z}}$ είναι κορυφές **ρόμβου.**

iii) Να δείξετε ότι $\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$.

iv) Να υπολογίσετε τη δύναμη $\left(\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\right)^{2006}$, εφόσον $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

ΘΕΜΑ 48ο

Έστω μια συνάρτηση **f**, παραγωγίσιμη στο ℝ με τις ιδιότητες :

$f(\pi) = 1$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $2f'(x) = f^2(x) \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης **f** είναι : $f(x) = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x + 3}$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

β) Αν **g** είναι μια παραγωγίσιμη στο ℝ συνάρτηση με $g(x) > 0$ και

$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i) $0 \leq \ln\left[\left(\dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2 \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}\right] \leq \beta - \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

ii) η εξίσωση $\ln g(x) - 2x = 0$ έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα .

iii) $1 \leq E \leq 2$, όπου **Ε** το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της **f** ,τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

ΘΕΜΑ 49ο

Έστω συνάρτηση **f**, δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ με $f(0) = 1$

και οι μιγαδικοί $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$h, h(x) = \displaystyle\int_0^{|z_1 - z_2|x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \left(1 - \left|1 - z_1\overline{z_2}\right|\right)x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η παράγωγος h' .

ii) Αν για την h ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι

$|z_1| = 1$ ή $|z_2| = 1$.

iii) α) Αν θεωρήσουμε ότι οι μιγαδικοί z_1, z_2 κινούνται συγχρόνως σε κύκλο κέντρου **K(0,0)** και ακτίνας $\rho = 1$ και ισχύει $z_1, z_2 \in I$ με $z_1 \neq z_2$, τότε να δείξετε ότι : $h'(x) = 2f(2x) - f(x) - 1$.

β) Αν ισχύει $f(0) = f(1)$,να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε : $h''(\xi_1) = 2f'(\xi_2)$.

ΘΕΜΑ 50ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{2} - \ln x, \quad x > 0$.

i) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της **f** στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης να είναι παράλληλη στον άξονα **x'x.**

ii) Να αποδειχθεί ότι : $f(x) > 0$ για $x > 1$.

iii) Να αποδείξετε ότι $e^3 - e^2 > \ln\frac{9}{4}$.

iv) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της **f** έχει ασύμπτωτες .

ν) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης **F** αν ισχύει $\mathbf{F'(x) = -f(x)F^2(x)}$, $\mathbf{x > 1}$ και $\mathbf{F(1) = 1}$.

ΘΕΜΑ 51ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$f(x) \neq 0$ και $f(x) = 2010 + \int_0^x \frac{t}{f(t)}dt$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{(2010x)^2} f^2(x)$.

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} h(t)dt$.