

1. Δίνεται η εξίσωση $(3x + 2y + 7)\lambda + (x - 2y + 5) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

i) Να βρεθεί σημείο A από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1)

ii) Να βρεθεί ευθεία που διέρχεται από το A και δεν ανήκει στην οικογένεια .

2. Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_k) : 2kx + (k^2 - 1)y + 3k + 2 = 0$ με $k \in \mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$ η πιο πάνω εξίσωση (ε_k) παριστάνει ευθεία.

β) Να βρεθεί αν από το σημείο $M(-\frac{1}{2}, 5)$ διέρχονται ευθείες και ποιες από την οικογένεια (ε_k)

γ) Να προσδιοριστεί το σύνολο των σημείων του επιπέδου, από καθένα από τα οποία διέρχεται μια μόνο ευθεία από την οικογένεια (ε_k)

δ) Να δειχθεί ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (ε_k) εφάπτονται σε σταθερό κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα .

3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία:

1) Διέρχεται μόνο μία από τις ευθείες της οικογένειας των ευθειών: $x - 2y + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

2) Διέρχεται μόνο μία από τις ευθείες της οικογένειας των ευθειών: $(\lambda^2 + \lambda + 1)x - 2(\lambda^2 - 1)y = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

3) Δεν διέρχεται καμία ευθεία της οικογένειας των ευθειών: $(\lambda + 2)x - (2\lambda + 1)y + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

4. Δίνεται η εξίσωση $(u^2 - 1)x + 2uy - u^2 - 2u - g = 0$ όπου $u \in \mathbb{R}$ και g πραγματική σταθερά .

Εάν $g \neq -1$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση

5. Δίνεται η εξίσωση : $(2a - b)x + (a + b - 6)y + 5a - b - 6 = 0$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιές τιμές των a, b η (1) παριστάνει ευθεία;

β) Να βρείτε τι παριστάνει η (1) για $a = 2, b = 4$.

γ) Για τις τιμές των a, b που η (1) παριστάνει ευθεία, να δείξετε ότι αυτή διέρχεται από σταθερό σημείο.

6. Δίνεται η εξίσωση $(m^2 - 4)x + 4my - 4m^2 - 4m + c = 0$ (1) , όπου $m, c \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου m η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

β. Εάν $c = 16$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ. Εάν $c \neq 16$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων ώστε απ' το καθένα από αυτά να διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

7. α) Δίνεται το σημείο $M(\lambda, 0)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 2\lambda x + y - (1 + \lambda^2) = 0$. Να δείξετε ότι το συμμετρικό του M ως προς την (ε) ανήκει σε κύκλο .

β) Οι ευθείες $(\varepsilon_\lambda) : 2\lambda x + y - (1 + \lambda^2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουν ως περιβάλλουσα την παραβολή $(c) : y = -x^2 + 1$

8. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 2009y = 4$ (1) ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$ (2)

9. Η ευθεία $\varepsilon : x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια των ευθειών $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$;

10. Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \varepsilon_2 : A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ με $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Θεωρούμε την εξίσωση: $(A_1x + B_1y + \Gamma_1)\lambda + (A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Οι ευθείες που παριστάνει η (1), διέρχονται από ένα σταθερό σημείο K.

γ. Δεν υπάρχει τιμή του λ , έτσι ώστε η (1) να παριστάνει την ευθεία ε_1

11. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda + 1)x + (2\lambda - 2)y + 7\lambda + 5 = 0$ (1) .

i) Να βρεθεί σημείο A από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1)

ii) Να βρεθεί ευθεία που διέρχεται από το A και δεν ανήκει στην οικογένεια .

