ΣΤΑ ΙΧΝΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Θεματική ενότητα 3: Μαθηματικά επιτεύγματα και εκπαιδευτικές προκλήσεις στην ιστορική και εξελικτική τους προοπτική.

Κυριαζής Χρήστος
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Η αποδεικτική μέθοδος της Μαθηματικής επαγωγής αποτελεί ένα από τα στολίδια της επιστήμης των Μαθηματικών. Είναι μια εξαιρετικά διδακτική μέθοδος με την οποία αναδεικνύεται ο ιδιαίτερος και σημαντικός χαρακτήρας των Μαθηματικών σε διάφορους τομείς. Ο χαρακτήρας του ντόμινο που διαθέτει, ταιριάζει απολύτως με την έννοια του επόμενου και του προηγούμενου αριθμού που υπάρχει στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Επιπλέον είναι ένα ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο που απαιτεί ιδιαίτερους και προσεκτικούς χειρισμούς. Χρησιμοποιώντας μερικά αξιόλογα παραδείγματα θα αναδείξουμε τις λεπτές και ευφυείς διαδικασίες που απαιτούνται για την εφαρμογή της.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική επαγωγή, απόδειξη.

Abstract

The proof method of mathematical induction is one of the ornaments of the science of mathematics. It is an excellent teaching method that highlights the special and important character of Mathematics in various fields. The character of the domino that it possesses fits perfectly with the meaning of the next and the previous number that exists in the set of integer numbers. It is also a powerful proof tool that requires special and careful handling. Using some remarkable examples, we will highlight the intelligent processes required to implement it.

Ιστορική αναδρομή

Η Μαθηματική επαγωγή ήταν γνωστή, με κάποια μορφή της, στους αρχαίους Έλληνες [1]. Ίχνη της μαθηματικής επαγωγής εμφανίζονται σε κείμενα του Πρόκλου και του Πλάτωνα [2]. Η διατύπωση της Μαθηματικής Επαγωγής έγινε αργότερα από πολλούς μαθηματικούς που εργάζονταν ανεξάρτητα, όπως οι Jacob Bernoulli και Pierre de Fermat [3].

Ο πρώτος που χρησιμοποίησε την Μαθηματική Επαγωγή [4] ήταν ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός Μαθηματικός Francesco Maurolico (1495-1575), ο οποίος το 1557 μ.Χ. απέδειξε ότι:

$$1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2, \qquad (1)$$

χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nu^2+(2\nu+1)=(\nu+1)^2$, αναδεικνύοντας ότι υφίσταται ένας τρόπος μετάβασης από μια κατάσταση στην επόμενή της.

Μεταγενέστερα το 1654 μ.Χ., ο Pascal διατύπωσε με σαφήνεια την Μαθηματική Επαγωγή ασχολούμενος με το γνωστό σε όλους αριθμητικό του τρίγωνο [5]. Ο De Morgan το 1838 ήταν ο πρώτος που καθιέρωσε, τον όρο Μαθηματική επαγωγή [5], ενώ ο Dedekind το 1887, χρησιμοποίησε τον όρο Τέλεια επαγωγή [3].

Η Μαθηματική επαγωγή

Σύμφωνα με το *αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής* (ή απλά *επαγωγής*) [6] αν $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από τον $n\in\mathbb{N}$ για την οποία:

- η $P(0)$ είναι αληθής και
- με δεδομένη την αλήθεια της $P(n)$ να έπεται η αλήθεια της $P(n+1)$,

τότε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Στο δεύτερο βήμα της επαγωγής η αλήθεια της $P(n)$ ονομάζεται *επαγωγική υπόθεση*.

Η επαγωγή με προτασιακό λογισμό γράφεται:

$$\left[P(0)\wedge\forall n\left[P(n)\to P(n+1)\right]\right]\to\forall nP(n), \qquad (2)$$

αφού σύμφωνα με το κανόνα της απόσπασης (modus ponens) ισχύει:

$$p\wedge(p\to q)\to q.$$

Πολλά συγγράμματα στη διατύπωση της αρχής της Μαθηματικής επαγωγής θέτουν $P(n_0)$, για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ αντί για $P(0)$. Στην ουσία κάνουμε επαγωγή στην πρόταση $Q(n)=P(n+n_0)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Στην βιβλιογραφία αυτή η διατύπωση της Μαθηματικής επαγωγής χαρακτηρίζεται ως *ασθενής*. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της Μαθηματικής επαγωγής, όπως η ισχυρή Μαθηματική επαγωγή, η επαγωγή με πηδήματα, η επαγωγή των δύο διαστάσεων, η διπλή επαγωγή, η επαγωγή μπρος-πίσω [1].

Σύμφωνα με το *αξίωμα της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής* [7], αν $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$ για την οποία:

- η $P(n_0)$ είναι αληθής κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και
- με δεδομένη την αλήθεια των $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$, …, $P(n_0+\kappa-1)$ να έπεται η αλήθεια της πρότασης $P(n_0+\kappa)$,

τότε η $P(n)$ είναι αληθής πρόταση για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Η δεύτερη πρόταση χαρακτηρίζεται ως ισχυρή Μαθηματική επαγωγή, διότι στο δεύτερο βήμα έχουμε ισχυρότερη υπόθεση, εφόσον απαιτείται να ισχύει η $P(n)$ για κάθε φυσικό $n \leq n_0+\kappa-1$ με $\kappa \in \mathbb{N}^*$. Εξάλλου αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές προτάσεις είναι ισοδύναμες [7].

Στη συνέχεια της εργασίας θα εφαρμόσουμε την αποδεικτική μέθοδο σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών, ώστε να αναδείξουμε την μαθηματική ομορφιά, την ιδιαιτερότητα και την καθολικότητα της διαδικασίας.

Ανάλυση: Εύρεση ορίου

Να υπολογίσετε [6] το

$$L_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\dots\cos(nx)}{x^2},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση

Καταρχήν αποδεικνύουμε την ύπαρξη του ορίου.

- Για $n=1$ και με τη χρήση του θεωρήματος του De L’ Hospital έχουμε:
$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}. \qquad (3)$$
- Θα αποδείξουμε ότι αν το L_{n-1} υπάρχει, θα υπάρχει και το όριο L_n.
Θεωρούμε τη διαφορά:
$$L_n - L_{n-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(nx)}{x^2} = \frac{n^2}{2}, \qquad (4)$$
οπότε υπάρχει και το όριο L_n, αφού υπάρχει το L_{n-1}.

Για τον υπολογισμό του ορίου, θέτοντας $n=2,3$ στην (4) και λόγω της (3), έχουμε $L_2=\frac{5}{2}=\frac{2\cdot3\cdot5}{12}$, $L_3=\frac{14}{2}=\frac{3\cdot4\cdot7}{12}$, δηλαδή «υποψιαζόμαστε» ότι $L_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$, $n\in\mathbb{N}^*$ (η απόδειξή της γίνεται με νέα επαγωγή).

Θεωρία αριθμών: το μικρό θεώρημα του Fermat

Αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n\in\mathbb{N}^*$, τότε ο αριθμός n^p-n διαιρείται με το p [8].

<u>*Απόδειξη*</u>

- Για $n=1$, ο αριθμός $1^p-1=0$ διαιρείται με το p.
- Θα αποδείξουμε ότι αν ο αριθμός n^p-n διαιρείται με το p, τότε και ο αριθμός $(n+1)^p-(n+1)$ διαιρείται με το p.

  Πράγματι:

  $$(n+1)^p-(n+1)=n^p+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}n^j-n\equiv 0\ (\text{mod } p),$$

  αφού ισχύει ότι $j\binom{p}{j}=p\binom{p-1}{j-1}$, $1\le j\le p-1$, οπότε ο p διαιρεί τον $j\binom{p}{j}$, άρα και τον $\binom{p}{j}$ δεδομένου ότι $1\le j\le p-1$.

Γραμμική Άλγεβρα: Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα πίνακα

Αν ο nxn πίνακας Α έχει ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, $k\le n$ με $\lambda_i\ne\lambda_j$, $\forall i\ne j$, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v^{(1)},v^{(2)},\ldots,v^{(k)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα [9].

<u>*Απόδειξη*</u>

- Για $k=1$ το $v^{(1)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ως μη μηδενικό.
- Για $k=2$ τα $v^{(1)},v^{(2)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (η αποδεικτική διαδικασία φαίνεται στο επόμενο βήμα της επαγωγής).
- Θα αποδείξουμε ότι αν τα $v^{(1)},v^{(2)},\ldots,v^{(k-1)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $v^{(1)},v^{(2)},\ldots,v^{(k-1)},v^{(k)}$ θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

  Αν ισχύει

$$c_1 v^{(1)} + c_2 v^{(2)} + \ldots + c_{k-1} v^{(k-1)} + c_k v^{(k)} = 0, \tag{5}$$

τότε $c_1 A v^{(1)} + c_2 A v^{(2)} + \ldots + c_{k-1} A v^{(k-1)} + c_k A v^{(k)} = 0$ και

$$c_1 \lambda_1 v^{(1)} + c_2 \lambda_2 v^{(2)} + \ldots + c_{k-1} \lambda_{k-1} v^{(k-1)} + c_k \lambda_k v^{(k)} = 0, \tag{6}$$

αφού $A v^{(i)} = \lambda_i v^{(i)}$ για $i = 1, 2, .., k$.

Πολλαπλασιάζοντας την (5) με λ_k και αφαιρώντας κατά μέλη με την (6) βρίσκουμε ότι:

$$c_1 (\lambda_k - \lambda_1) v^{(1)} + c_2 (\lambda_k - \lambda_2) v^{(2)} + \ldots + c_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) v^{(k-1)} = 0,$$

άρα $c_i (\lambda_k - \lambda_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, k-1$ (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης) και κατά συνέπεια $c_i = 0, i = 1, 2, \ldots, k-1$. Επιπλέον, από τη (6) προκύπτει ότι $c_k = 0$, δηλαδή τα $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k-1)}, v^{(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άλγεβρα

Αν $x_1^3 + x_2^3 + \ldots.. + x_n^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, να βρείτε [10] τους μη μηδενικούς φυσικούς x_i.

Λύση

Για $n = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$x_1^3 = x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 (x_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1. \tag{7}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$1^3 + 2^3 + \ldots. + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 \text{ για κάθε } n \geq 1, \tag{8}$$

οπότε υποψιαζόμαστε ότι $x_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

- Για $n = 1$, έχουμε $x_1 = 1$, η οποία ισχύει.
- Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει $x_i = i, \forall i \leq n$, ισχύει και $x_{n+1} = n + 1$.

  Πράγματι η δοσμένη σχέση για $n + 1$ προσθετέους, γίνεται:

$$1^3 + 2^3 + \ldots. + n^3 + x_{n+1}^3 = (1 + 2 + \ldots. + n + x_{n+1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + x_{n+1}^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + x_{n+1} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} (x_{n+1} + n)(x_{n+1} - (n+1)) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = n + 1, \text{ αφού } n \in \mathbb{N}^*.$$

Διανυσματικός λογισμός

Αν $P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots., P_{2n+1}$ διαφορετικά σημεία ενός μοναδιαίου ημικυκλίου [6], ισχύει ότι $\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.

Απόδειξη

- Για $n=0$ έχουμε $\left|\overrightarrow{OP_1}\right| \geq 1$, η οποία προφανώς ισχύει.
- Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει $\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$, τότε θα ισχύει $\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+2}}+\overrightarrow{OP_{2n+3}}\right| \geq 1$.

  Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τα σημεία $P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots., P_{2n+3}$ είναι διαδοχικά πάνω στο ημικύκλιο.

  Το $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+2}}$ είναι άθροισμα $2n+1$ διανυσμάτων και ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση, άρα $\left|\overrightarrow{OP}\right| \geq 1$.

  Επίσης, το $\overrightarrow{OP}$ ανήκει στο εσωτερικό της $P_1\hat{O}P_{2n+3}$ και σχηματίζει οξεία γωνία με το $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{2n+3}}$ (το $\overrightarrow{OS}$ διχοτομεί τη $P_1\hat{O}P_{2n+3}$ αφού το $P_1OP_{2n+3}S$ είναι ρόμβος).

  Έτσι έχουμε:

  $$\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+2}}+\overrightarrow{OP_{2n+3}}\right| = \left|\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OP}\right| \geq \left|\overrightarrow{OP}\right| \geq 1.$$

Ειδικές συναρτήσεις: Πολυώνυμα Legendre

Το πολυώνυμο Legendre $P_n(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες [11] στο διάστημα $(-1,1)$.

Απόδειξη

Για τα πολυώνυμα Legendre ισχύει $P_n(x)=\dfrac{d^n Q_n(x)}{dx^n}$ με $Q_n(x)=(x^2-1)^n$.

Το $Q_n(x)$ έχει ρίζες τους $-1, 1$ με πολλαπλότητα n. Θα αποδείξουμε ότι για $1<k\leq n$ το $Q_n^{(k)}(x)$ έχει k διαφορετικές ρίζες στο $(-1,1)$.

- Για $k=1$ το $Q_n^{(1)}(x)=n(x^2-1)^{n-1}2x$ έχει μοναδική ρίζα το $0\in(-1,1)$.
- Με δεδομένο ότι το $Q_n^{(k)}(x)$ έχει k διαφορετικές ρίζες στο $(-1,1)$, θα αποδείξουμε ότι το $Q_n^{(k+1)}(x)$ έχει $k+1$ διαφορετικές ρίζες στο $(-1,1)$.

  Έστω $-1<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{k-1}<x_k<1$ οι $k+2$ διαφορετικές ρίζες του $Q_n^{(k)}(x)$ στο $[-1,1]$. Για το $Q_n^{(k)}(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα $k+1$ διαστήματα $[-1,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ..., $[x_{k-1},x_k]$, $[x_k,-1]$, οπότε στο εσωτερικό καθενός από τα διαστήματα αυτά υπάρχει ρίζα της παραγώγου του $Q_n^{(k)}(x)$, δηλαδή το $Q_n^{(k+1)}(x)$ έχει $k+1$ διαφορετικές ρίζες στο $(-1,1)$.

Συνεπώς για $k=n$ το $Q_n^{(n)}(x)=P_n(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες στο $(-1,1)$.

Γραμμική Άλγεβρα: Ορίζουσα Vandermode

Για την ορίζουσα Vandermode [12] ισχύει:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} \left(x_i - x_j\right) .$$

Απόδειξη

- Για $n=1$, ισχύει $|1|=1$.
- Για $n=2$, ισχύει $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.
- Θα αποδείξουμε ότι αν:

$$V_n = \prod_{1\le i<j\le n} \left(x_i - x_j\right), \text{ τότε } V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_{n+1}^{n} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} \left(x_i - x_j\right).$$

Θεωρούμε την V_{n+1} σαν πολυώνυμο ως προς x_{n+1}, το οποίο έχει βαθμό το πολύ n. Αν $V_{n+1}=P(x_{n+1})$, ισχύει $P(x_1)=P(x_2)=...=P(x_n)=0$, δηλαδή το $P(x_{n+1})$ έχει ρίζες $x_1,x_2,...,x_n$. Επιπλέον στο $P(x_{n+1})$ ο συντελεστής του x_{n+1}^n είναι η V_n, οπότε:

$$V_{n+1} = P(x_{n+1}) = V_n\left(x_{n+1}-x_1\right)\left(x_{n+1}-x_2\right)...\left(x_{n+1}-x_n\right)$$

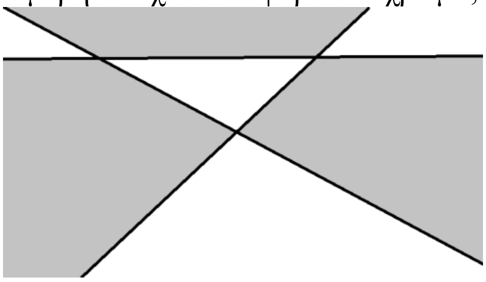
και το ζητούμενο προκύπτει με χρήση της της επαγωγικής υπόθεσης.

Θεωρία γραφημάτων

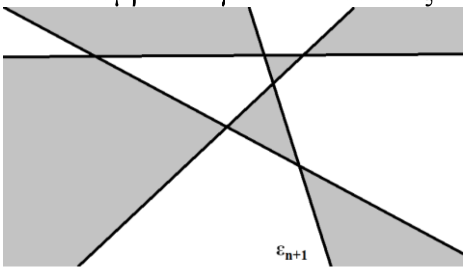
Τα μέρη στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από ευθείες, μπορούν να χρωματισθούν με δύο χρώματα, ώστε τα γειτονικά μέρη (εκείνα που έχουν κοινές πλευρές) να έχουν διαφορετικό χρώμα [8].

Απόδειξη

- Για $n=1$, η μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, τα οποία μπορούν να χρωματισθούν με δύο μόνο χρώματα.
- Θα αποδείξουμε ότι αν τα μέρη του επιπέδου που δημιουργούνται από n ευθείες μπορούν να χρωματισθούν με δύο χρώματα ώστε τα γειτονικά μέρη να έχουν διαφορετικό χρώμα, το ίδιο συμβαίνει για $n+1$ ευθείες.



Σχήμα 1: n ευθείες



Σχήμα 2: n + 1 ευθείες

Έστω ότι έχουμε χρωματίσει κατάλληλα το χώρο που δημιουργείται από τις n ευθείες (σχήμα 1). Προσθέσουμε μια επιπλέον ευθεία την ε_{n+1} (σχήμα 2). Η ευθεία αυτή δημιουργεί δύο ημιεπίπεδα. Στο ένα ημιεπίπεδο διατηρούμε το χρωματισμό και στο άλλο ημιεπίπεδο αλλάζουμε τα χρώματα (σχήμα 2). Τότε τα χωρία που μοιράζονται το ίδιο κομμάτι της ε_{n+1}, που ήταν προηγουμένως μέρος του ίδιου χωρίου, τώρα βρίσκονται σε αντίθετα ημιεπίπεδα και έχουν διαφορετικό χρώμα.

Όταν η Μαθηματική επαγωγή δε δίνει «άμεση» απόδειξη

Πολλές φορές όταν έχουμε να αποδείξουμε μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικούς αριθμούς σκεφτόμαστε τη Μαθηματική επαγωγή. Αυτή όμως δε δίνει πάντα αποτελέσματα. Τότε συχνά μπορούμε να διατυπώσουμε μια ανάλογη πρόταση που να δίνει λύση. Για την ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3,\ n\in\mathbb{N}^*, \qquad (9)$$

παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος περιέχει μεταβλητή [13], ενώ το δεύτερο μέλος όχι. Αυτό σημαίνει ότι η επαγωγή δε μπορεί να δώσει «άμεσο» αποτέλεσμα. Για να εφαρμοσθεί θα πρέπει το δεύτερο μέλος να έχει μεταβλητή. Αφού $3-\frac{1}{n}<3, n\in\mathbb{N}^*$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)...\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*. \qquad (10)$$

- Για $n=1$ έχουμε $2\leq 2$ που ισχύει.
- Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η (10) θα ισχύει και η:

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)...\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n+1}.$$

Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow -\frac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}\leq 0,$$ η οποία ισχύει.

Στην ουσία με τη βοήθεια της Μαθηματικής επαγωγής αποδείξαμε μια πιο ισχυρή πρόταση από αυτήν που θέλαμε να αποδείξουμε!!! Η επιλογή της ισχυρότερης πρότασης εξαρτάται από την υφή του προβλήματος.

Ένα «παράδοξο» …

Για κάθε σύνολο n αυτοκινήτων για κάθε $n\geq 1$, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα [14].

<u>*Απόδειξη*</u>

- Για $n=1$ ισχύει.
- Θα αποδείξουμε ότι αν τα n αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα, τότε και τα $n+1$ έχουν το ίδιο χρώμα.

  Έστω ότι τα $n+1$ αυτοκίνητα είναι τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$.

  Από την επαγωγική υπόθεση τα n πρώτα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ και τα n τελευταία $(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ έχουν το ίδιο χρώμα, άρα όλα τα $n+1$ αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα, αφού έχουν κοινά στοιχεία.

  Το συμπέρασμα είναι προφανώς παράλογο!!! Συνεπώς υπάρχει λάθος. Η εξήγηση είναι πολύ απλή. Στο δεύτερο βήμα της επαγωγής αν $n=1$, τα $n+1=2$ αυτοκίνητα είναι τα α_1, α_2. Όταν επικαλούμαστε ότι τα $n=1$ πρώτα έχουν το ίδιο χρώμα, λέμε ότι το α_1 «έχει το ίδιο χρώμα» και όταν αναφερόμαστε στα $n=1$ τελευταία που έχουν το ίδιο χρώμα, λέμε ότι το α_2 «έχει το ίδιο χρώμα». Συνεπώς δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και τα 2 αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα, αφού τα δύο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία. Πρακτικά αυτό που συμβαίνει είναι ότι δεν ισχύει η $P(1) \to P(2)$!!!

Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει το πόσο λεπτή είναι η διαδικασία, κάτι που επιβάλλει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στην εφαρμογή της.

Συμπεράσματα

Το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής είναι μία απλή, αλλά ισχυρή μέθοδος απόδειξης προτάσεων που εξαρτώνται από ακεραίους. Παραθέσαμε ενδεικτικά παραδείγματα από μεγάλο εύρος μαθηματικών κλάδων, όπως στη Γραμμική Άλγεβρα, στην Άλγεβρα, στην Ανάλυση, στη Θεωρία Αριθμών, στην Θεωρία Γραφημάτων και ο ανήσυχος αναγνώστης μπορεί να βρει και άλλα στη Τριγωνομετρία, στη Συνδυαστική, στην Αναλυτική Γεωμετρία, κτλ.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

1. Lambrou, M. (2005). *Mathematical induction: Notes for teacher (part 1)*. Creative Mathematics and Informatics, 14, 19-30.
2. Καλαβάσης, Φ., Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο. Αναστοχαστική οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών*. Gutenberg.
3. Cajori, F. (1918). *Origin of the Name "Mathematical Induction"*. The American Mathematical Monthly, 25 (5), 197-201.
4. Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ. και Σβέρκος Α. (2004). *Μαθηματικά Β΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Ο.Ε.Δ.Β.
5. Πάλλα, Μ. (2006). *Η μαθηματική επαγωγή και η κατανόησή της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. Διπλωματική Εργασία. Αθήνα: ΔΔΠΜΣ Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών.
6. Andreescu T., Crisan V. (2017). *Mathematical Induction. A powerful and elegant method of proof*, XYZ press.
7. Schach, A. (1958). *Two Forms of Mathematical Induction*. Mathematics Magazine, 32(2), 83-85.
8. Andreescu T. & Gelca R. (2007). *Putnam and Beyond*. Springer.
9. Strang, G. (2005). *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.), Brooks Cole.
10. Andreescu T., Tetiva M. (2018). *Sums and Products*, XYZ press.
11. Wang X. Z., Guo R. D. (2010). *Special functions*. World Scientific.
12. Horn A. R., Johnson R. C. (1991). *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press.

13. Andreescu T., Enescu B. (2010). *Mathematical Olympiad Treasures second edition*, Birkhauser.
14. Φωτάκης Δ., Σουλίου Δ. (2017). *Σημειώσεις για τα Διακριτά μαθηματικά.* Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π.