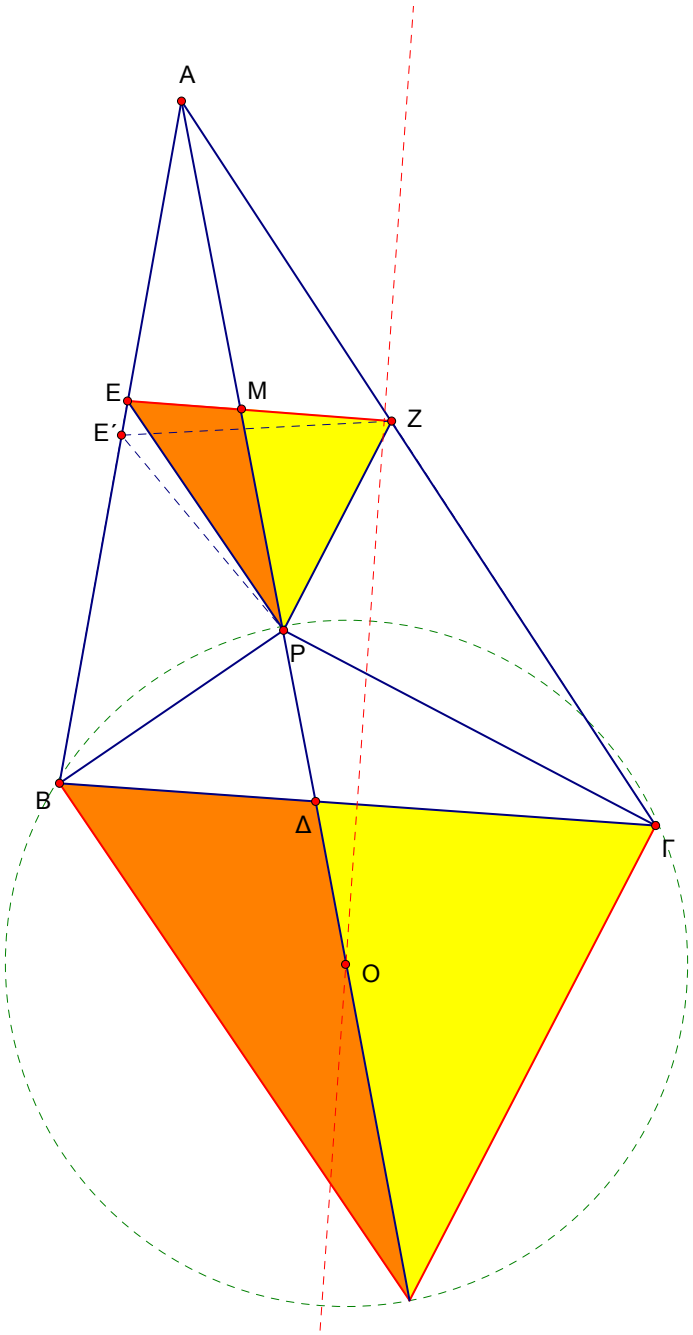
Άσκηση Γεωμετρίας – Κώστας Βήττας - mathematica.gr

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σταθερό σημείο της ΒΓ.

Στο Ρ, μεταβλητό σημείο του τμήματος ΑΔ, φέρνουμε τις καθέτους προς τις ΒΡ, ΓΡ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα.



Προσδιορίστε το Ρ ώστε να είναι ΕΖ//ΒΓ.

Απάντηση – Κώστας Σερίφης – mathematica.gr

Ανάλυση

Ας υποθέσουμε ότι ΕΖ//ΒΓ.

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το Ρ σε σχέση με σταθερά σημεία.

Στο Γ φέρνουμε την κάθετο προς τη ΓΡ η οποία τέμνει το ΑΔ στο σημείο Ν.

Τα τρίγωνα ΜΖΝ, ΔΓΝ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες και είναι όμοια. Άρα **ΜΖ/ΔΓ** =**ΜΡ/ΔΝ** (1). Όμως ΜΖ//ΔΓ, ΕΖ//ΒΓ οπότε **ΜΖ/ΔΓ**=ΑΖ/ΑΓ = ΑΕ/ΑΒ=**ΕΜ/ΒΔ** (2).

Από (1), (2) ΜΡ/ΔΝ=ΕΜ/ΒΔ και εφόσον οι γωνίες Μ, Δ των τριγώνων ΕΜΡ, ΒΔΝ είναι ίσες , αυτά τα τρίγωνα θα είναι όμοια οπότε …. ΒΝ κάθετη στη ΒΡ.

Το τετράπλευρο ΒΡΓΝ είναι εγγράψιμο και μάλιστα το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου Ο βρίσκεται στο μέσο της ΡΝ και ισαπέχει από τα Β, Γ.

Άρα το Ο θα είναι στη μεσοκάθετο του ΒΓ και συγχρόνως στην ευθεία ΑΔ. Είναι δηλαδή το σημείο τομής δύο σταθερών ευθειών άρα σταθερό σημείο. **Έτσι,**

το Ρ θα είναι το σημείο τομής του σταθερού κύκλου (Ο, ΟΒ) και του σταθερού τμήματος ΑΔ.

Σύνθεση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου έχουμε – επί της ΒΓ- το σημείο Δ, φέρουμε την ΑΔ και την προεκτείνουμε.

Κάνουμε την μεσοκάθετο του ΒΓ και βρίσκουμε το σημείο τομής της Ο με την ΑΔ.

Γράφουμε τον κύκλο (Ο, ΟΒ) και σημειώνουμε Ρ το σημείο στο οποίο αυτός τέμνει το τμήμα ΑΔ.

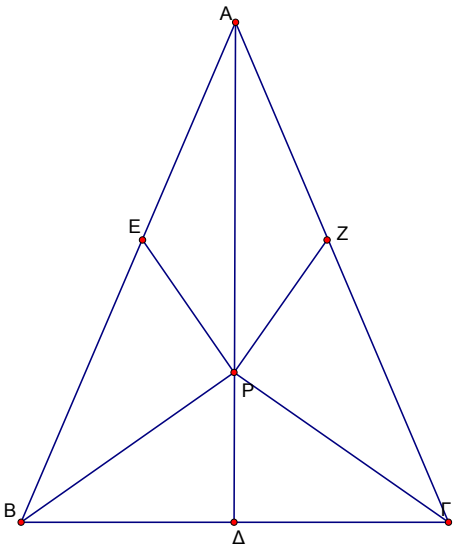
Στο Ρ φέρνουμε τις καθέτους προς τις ΒΡ, ΓΡ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα.

Η ευθεία ΕΖ θα είναι παράλληλη προς τη ΒΓ. **Απόδειξη**: Αν υποθέσουμε ότι η ΕΖ **δεν** είναι παράλληλη στην ΒΓ τότε: φέρουμε από το Ζ την ΖΕ΄ παράλληλη προς την ΒΓ. Τότε και με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε στην σύνθεση, θα πάρουμε ΡΕ΄ κάθετη στην ΒΡ πράγμα άτοπο αφού ΡΕ, ΡΕ΄ δύο διαφορετικές κάθετες προς την ΒΡ.

Διερεύνηση:

Υπάρχουν οι περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν ξεχωριστά:

- Η μεσοκάθετος της ΒΓ ταυτίζεται με την ΑΔ οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές

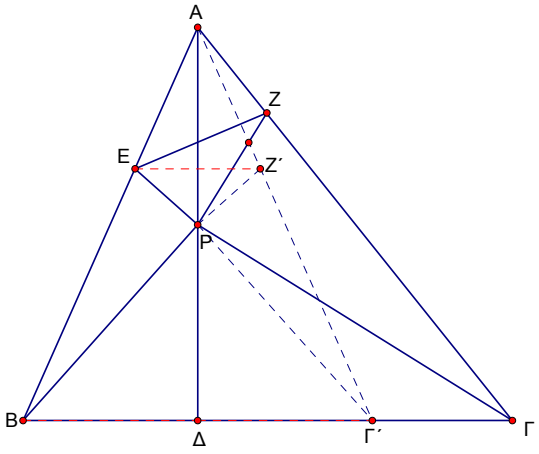


Σ' αυτή την περίπτωση το Ρ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του ΑΔ.

Απόδειξη

ΡΒ=ΡΓ και οι γωνίες ΡΒΕ , ΡΒΖ είναι ίσες ως διαφορά ίσων γωνιών. Έτσι, τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΡΒ, ΖΡΓ είναι ίσα. Άρα ΕΒ = ΖΓ. Ακόμη ΑΕ=ΑΖ ως διαφορά ίσων τμημάτων. Είναι ΑΕ/ΕΒ=ΑΖ/ΖΓ δηλαδή ΕΖ//ΒΓ.

- Η μεσοκάθετος του ΒΓ είναι παράλληλη προς το ΑΔ, οπότε ΑΔ ύψος του τριγώνου, στο οποίο ΑΒ, ΑΓ είναι προφανώς άνισα.



Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα δεν έχει λύση δηλαδή για κάθε σημείο Ρ του τμήματος ΑΒ **δεν μπορεί ΕΖ // ΒΓ**

Απόδειξη

Αν ΑΓ > ΑΒ, θεωρούμε Γ΄ στην ΒΓ ώστε ΔΓ=ΔΓ΄. Φέρνουμε το Γ΄Ρ και την κάθετη σ' αυτό στο Ρ η οποία θα τέμνει την ΑΓ΄ στο Ζ΄. Από την προηγούμενη περίπτωση θα είναι ΕΖ΄//ΒΓ΄.

Εύκολα μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΕΖ΄ δεν μπορούν να συμπίπτουν οπότε η ΕΖ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΒΓ.

Παρατηρήσεις:

- Ενδεχομένως να υπάρχουν κι άλλες περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα να μην έχει λύση ή να έχει περισσότερες από μία λύσεις.
- ……