

Να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις εντός των κενών που σας δίνεται. Αν δεν σας περισσεύει περαιτέρω χώρος να συνεχίσετε στην σελίδα πίσω.

Επαναληπτικό διαγώνισμα άλγεβρας Α' λυκείου - Εξισώσεις / Ανισώσεις
Επιμέλεια διαγωνίσματος: Βώβος Μάριος

Θέμα Α

(μονάδες 25) Να μαυρίσετε το κατάλληλο κυκλάκι ώστε οι παρακάτω προτάσεις να είναι αληθείς.

- Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 - \beta x = 0$, $\alpha \neq 0$ είναι ίση με:
 - ☐ $\beta^2 - 4\alpha$
 - ☐ β^2
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha < 0$ και $\Delta > 0$, τότε μεταξύ των ριζών του είναι:
 - ☐ θετικό
 - ☐ αρνητικό
- Ισχύει $x^2 > \alpha^2$ αν και μόνο αν:
 - ☐ $x > \alpha$ ή $x < -\alpha$
 - ☐ $x < \alpha$ και $x > -\alpha$
- Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $|x - x_0| < \rho$, όπου $\rho > 0$ είναι το:
 - ☐ $(\rho - x_0, \rho + x_0)$
 - ☐ $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$
- Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε μια δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει δύο πραγματικές, άνισες και αρνητικές ρίζες είναι:
 - ☐ $\Delta > 0, P < 0, S < 0$
 - ☐ $\Delta > 0, P > 0, S < 0$
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την εξίσωση:
 - ☐ $\gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$
 - ☐ $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$:
 - ☐ είναι αδύνατη
 - ☐ έχει άπειρες λύσεις
- Από τις παρακάτω εξισώσεις αυτή που είναι αδύνατη είναι η:
 - ☐ $0 \cdot x < \beta$, όταν $\beta > 0$
 - ☐ $0 \cdot x < \beta$, όταν $\beta < 0$
- Η περίπτωση το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ να μην αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων είναι όταν η διακρίνουσα του είναι:
 - ☐ αρνητική
 - ☐ μηδέν
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, με την βοήθεια των τύπων Vieta, μετασχηματίζεται στην:
 - ☐ $x^2 - Sx + P = 0$
 - ☐ $x^2 + Sx - P = 0$

Θέμα Β

Έστω η παράσταση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4}$.

(α') (μονάδες 12) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $f(x)$.

(β') (μονάδες 13) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Θέμα Γ

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2020x + 2019$.

(α') (μονάδες 8) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x , να βρείτε το πρόσημο του.

[Υπόδειξη για την εύρεση των ριζών: Να μην υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.]

(β') (μονάδες 9) Να βρείτε το πρόσημο της παρακάτω αριθμητικής παράστασης:

$$\mathcal{A} = \left[\left(\frac{100}{101} \right)^2 - 2020 \left(\frac{100}{101} \right) + 2019 \right] \left[\left(\frac{101}{100} \right)^2 - 2020 \left(\frac{101}{100} \right) + 2019 \right]$$

(γ') (μονάδες 8) Να λύσετε την παρακάτω ανισότητα:

$$\left| x\sqrt{\mathcal{A}+1} - 1 \right| \leq \left| x - \sqrt{\mathcal{A}+1} \right|$$

όπου $\mathcal{A}$ η αριθμητική παράσταση του ερωτήματος (β').

Θέμα Δ

(I) (μονάδες 10) Να λύσετε την ανίσωση $-3x^4 + 2x^2 + 1 > 0$.

(II) Έστω ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση:

$$x = \frac{x^2 + \lambda^2}{\lambda^2 + 1}, \quad (*)$$

(α') (μονάδες 6) Να γράψετε την εξίσωση (*) στη μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης και να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση αυτή έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(β') (μονάδες 9) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-1, 1)$ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

όπου x_1, x_2 οι πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης (*). Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η απόσταση των x_1, x_2 να γίνεται μέγιστη, δηλαδή να ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ερώτημα Bonus: Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} > \frac{1}{\alpha\beta}$$

Καλή επιτυχία! Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.