

Να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις εντός των κενών που σας δίνεται. Αν δεν σας περισσεύει περαιτέρω χώρος να συνεχίσετε στην σελίδα πίσω.

Επαναληπτικό διαγώνισμα άλγεβρας Α' λυκείου - Εξισώσεις / Ανισώσεις
Επιμέλεια διαγωνίσματος: Βώβος Μάριος

Θέμα Α

(μονάδες 25) Να μαυρίσετε το κατάλληλο κυκλάκι ώστε οι παρακάτω προτάσεις να είναι αληθείς.

- Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 - \beta x = 0$, $\alpha \neq 0$ είναι ίση με:
 - ☐ $\beta^2 - 4\alpha$
 - ☐ β^2
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha < 0$ και $\Delta > 0$, τότε μεταξύ των ριζών του είναι:
 - ☐ θετικό
 - ☐ αρνητικό
- Έστω $\alpha > 0$. Ισχύει $x^2 > \alpha^2$ αν και μόνο αν:
 - ☐ $x > \alpha$ ή $x < -\alpha$
 - ☐ $x < \alpha$ και $x > -\alpha$
- Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $|x - x_0| < \rho$, όπου $\rho > 0$ είναι το:
 - ☐ $(\rho - x_0, \rho + x_0)$
 - ☐ $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$
- Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε μια δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει δύο πραγματικές, άνισες και αρνητικές ρίζες είναι:
 - ☐ $\Delta > 0, P < 0, S < 0$
 - ☐ $\Delta > 0, P > 0, S < 0$
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την εξίσωση:
 - ☐ $\gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$
 - ☐ $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$
- Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$:
 - ☐ είναι αδύνατη
 - ☐ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x
- Από τις παρακάτω εξισώσεις αυτή που είναι αδύνατη είναι η:
 - ☐ $0 \cdot x < \beta$, όταν $\beta > 0$
 - ☐ $0 \cdot x < \beta$, όταν $\beta < 0$
- Η περίπτωση το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ να μην αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων είναι όταν η διακρίνουσα του είναι:
 - ☐ αρνητική
 - ☐ μηδέν
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, με την βοήθεια των τύπων Vieta, μετασχηματίζεται στην:
 - ☐ $x^2 - Sx + P = 0$
 - ☐ $x^2 + Sx - P = 0$

Θέμα Β

Έστω η παράσταση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4}$.

(α') (μονάδες 10) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $f(x)$.

(β') (μονάδες 15) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Θέμα Γ

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2020x + 2019$.

(α') (μονάδες 8) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x , να βρείτε το πρόσημο του.

[Υπόδειξη: Για την εύρεση των ριζών να χρησιμοποιήσετε τους τύπους Vieta.]

(β') (μονάδες 8) Να βρείτε το πρόσημο της παρακάτω αριθμητικής παράστασης:

$$\mathcal{A} = \left[\left(\frac{10000}{10001} \right)^2 - 2020 \left(\frac{10000}{10001} \right) + 2019 \right] \left[\left(\frac{10001}{10000} \right)^2 - 2020 \left(\frac{10001}{10000} \right) + 2019 \right]$$

(γ') (μονάδες 9) Να λύσετε την παρακάτω ανισότητα:

$$\left| x\sqrt{\mathcal{A}+1} - 1 \right| \leq \left| x - \sqrt{\mathcal{A}+1} \right|$$

όπου $\mathcal{A}$ η αριθμητική παράσταση του ερωτήματος (β').

Θέμα Δ

Έστω ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση:

$$x^2 - x\sqrt{|\lambda|} - \frac{\lambda}{4} = 0, \quad (\star)$$

(α') (μονάδες 10) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $(\star)$ συναρτήσει του αριθμού λ ισούται με:

$$\Delta = \begin{cases} 2\lambda, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια, να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση $(\star)$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\star)$ να είναι αδύνατη;

(β') (i) (μονάδες 6) Να λύσετε την ανισότητα $3x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 32 \leq 0$. Δίνεται ότι $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$.

(ii) (μονάδες 9) Έστω $\lambda > 0$ και x_1, x_2 οι πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης $(\star)$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει:

$$d(x_1, x_2) + d(x_1^2, -x_2^2) \leq 16$$

όπου $d(\cdot, \cdot)$ ορίζουμε την απόσταση δύο αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών.