ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ, ΟΡΙΟ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δημήτρης Ντρίζος
Μαθηματικός στο 8^{ο} ΓΕ.Λ Τρικάλων,
πρώην Σχολικός Σύμβουλος

Μάρτιος 2019

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ, ΟΡΙΟ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
(Μάρτιος 2019)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής σ' ένα σημείο είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (*μονάδα 1*)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (*μονάδες 3*)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β) Αν μια συνάρτηση έχει τοπικά ελάχιστα, τότε το μικρότερο από αυτά είναι πάντοτε ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ έχει υποχρεωτικά θετική παράγωγο παντού στο εσωτερικό του Δ.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που η παράγωγός τους μηδενίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους χωρίς να είναι σταθερές στο πεδίο ορισμού τους.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε αποκλείεται να υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-ημ(3x)}{x}=3$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^2+2x+α$, $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και στη συνέχεια ότι $f'(0)=6$

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε το $α\in\mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 7

Στο παρακάτω ερώτημα θεωρήστε ότι $α=4$

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f\circ g)(x)=x^3-3x^2+5x-3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου g συνάρτηση με $g(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Γ2. Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ διαφορετικά μεταξύ τους, με $x_1\cdot x_2\neq 0$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A και B είναι παράλληλες.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x)=(f\circ g)(x)-2g(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

Γ4. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha<0<\beta$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)=\alpha\beta x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)+f''(x)+e^{-x}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=2$ και $f'(0)=-1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες είναι ετερόσημες. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, η εφαπτομένη της οποίας στο σημείο αυτό έχει εξίσωση την $y=-x+2$.

Μονάδες 7

Δ3. Ένα κινητό $M(x,y)$ κινείται στην παραπάνω εφαπτομένη έτσι, ώστε η τετμημένη του να ελαττώνεται με ρυθμό $3\,\text{cm/sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του κινητού M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 που αυτό περνάει από το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Δ4. Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $g'(x)=2\big(f(x)+x-2\big)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=0$

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\lambda)\le g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8
